Андронов И.К. Окунев А.К.

Курс тригонометрии

И. К. АНДРОНОВ и А. К. ОКУНЕВ

КУРС ТРИГОНОМЕТРИИ, РАЗВИВАЕМЫЙ НА ОСНОВЕ РЕАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ДОПОЛНЕННОЕ

ПОСОБИЕ
для учителей

Издательство
„ПРОСВЕЩЕНИЕ"
Москва 1967

2—2—2
142—66

ОГЛАВЛЕНИЕ

Слово к учителям математики, физики, астрономии и географии 3
Введение 7

ЧАСТЬ I. ТРИГОНОМЕТРИЯ ОСТРОГО УГЛА

Глава I. Плоские углы и их косвенные измерения через угловые коэффициенты

§ 1. О непосредственном и косвенном измерении величин . . 17
§ 2. О точности непосредственных и косвенных измерений . 21
§ 3. Косвенное измерение недоступных углов 26
§ 4. Угловой коэффициент, или тангенс острого угла 27
§ 5. Составление двузначной таблицы тангенсов острых углов и пользование ею 33
§ 6. Четырехзначные таблицы тангенсов острых углов и пользование ими 37

Глава II. Недоступные отрезки и их косвенное измерение через тангенсы соответствующих углов

§ 7. Определение расстояния между двумя пунктами, когда один из них недоступен 43
§ 8. Определение расстояния между двумя пунктами, к которым невозможно подойти 46

Глава III. Функции острого угла — тангенс, синус и косинус и их практическое применение

§ 9. Что такое функция? 49
§ 10. Синус острого угла 50
§ 11. Косинус острого угла 54
§ 12. Построение и чтение таблицы синусов и косинусов острых углов 57
§ 13. Применение синуса и косинуса при косвенных измерениях недоступных углов и расстояний 60

Глава IV. Геометрические задачи и методы их решения

§ 14. Графический и вычислительный методы решения геометрических задач и их достоинства и недостатки 69
§ 15. Треугольник как элемент любой прямолинейной фигуры 71
§ 16. Вычислительный тригонометрический метод решения прямоугольных треугольников 72
§ 17. Решение любых треугольников через сведение к решению прямоугольных треугольников 75
§ 18. Вычислительный тригонометрический метод решения многоугольников через сведение к решению треугольников 83
Заключение 94
Таблицы 95

ЧАСТЬ II. ОСНОВНОЙ КУРС ТРИГОНОМЕТРИИ

Глава I. Обобщение понятия угла и круговой дуги. Числовая окружность

§ 1. Необходимость обобщения понятия угла и круговой дуги при изучении вращательных движений 99
§ 2. Обобщенный угол и обобщенная круговая дуга 100
§ 3. Арифметические операции над обобщенными дугами и углами 104
§ 4. Различные меры углов и дуг и выделение наиболее удобной радианной меры 106
§ 5. Числовая окружность 111

Глава II. Круговые функции действительного числа

§ 6. Простейшие периодические процессы 120
§ 7. Определение круговых (тригонометрических) функций . 123
§ 8. Круговые функции любого действительного числа как обобщение тригонометрических функций острого угла . 132
§ 9. Независимость круговых функций от длины радиуса числовой окружности 136
§ 10. Непрерывность круговых функций 137

Глава III. Закономерность изменения круговых функций с изменением их аргументов

§ 11. Характеристика изменения синуса 145
§ 12. Характеристика изменения косинуса 149
§ 13. Характеристика изменения тангенса 153
§ 14. Характеристика изменения котангенса 158

Глава IV. Основные свойства круговых функций, выражаемые в соответствующих тригонометрических тождествах

§ 15. Периодические функции и их графики 161
§ 16. Периодичность и периоды круговых функций. Приводимость аргументов круговых функций к аргументам промежутков $[0; 2\pi]$ и $[0; \pi]$ 165
§ 17. Четные и нечетные функции и приводимость аргументов круговых функций к положительному аргументу 169
§ 18. Сведение круговых функций любого аргумента к тем же функциям положительного аргумента, не превышающего $\frac{\pi}{2}$ 174
§ 19. Сведение круговых функций любого аргумента к соименным круговым функциям положительного аргумента не превышающего $\frac{\pi}{4}$ 176
§ 20. Алгебраическая зависимость между круговыми функциями одного аргумента и возможность сведения каждой из шести круговых функций к одной из них 183
§ 21. Тождества и тождественные преобразования круговых функций 191

Глава V. Обобщенные круговые функции

§ 22. Гармонические колебательные движения и необходимость обобщения понятий круговых функций 196
§ 23. Графики функций $k \sin(az + b)$ и $k \cos(az + b)$ и роль параметров a, b, k 200
§ 24. Применение обобщенных круговых функций при рассмотрении простых гармонических колебательных движений 210

Глава VI. Круговые функции от алгебраической суммы аргументов

§ 25. Практическая необходимость знания тождеств, выражающих круговые функции от суммы аргументов через круговые функции от слагаемых 222
§ 26. Синус и косинус от алгебраической суммы двух аргументов и соответствующие тригонометрические тождества 224
§ 27. Синус и косинус суммы двух аргументов в новом изложении 232
§ 28. Формулы для нахождения синуса и косинуса разности аргумента 244
§ 29. Тангенс и котангенс от алгебраической суммы двух аргументов и соответствующие тригонометрические тождества 247
§ 30. Следствия из теорем о круговых функциях от алгебраической суммы двух аргументов 248
§ 31. Преобразование произведения круговых функций в сумму и обратное преобразование суммы круговых функций в произведение 255

Глава VII. Таблицы круговых функций и их логарифмов с соответствующей точностью

§ 32. Основные тригонометрические неравенства 265
§ 33. Составление таблиц круговых функций 269
§ 34. Таблицы логарифмов круговых функций и их построение 271

Глава VIII. Обратные круговые функции

§ 35. Понятие об обратной функции к данной функции . . . 278
§ 36. Связь между графиками прямой и обратной функции . 280
§ 37. Арксинус — функция, обратная синусу 282
§ 38. Арккосинус — функция, обратная косинусу 291
§ 39. Арктангенс — функция, обратная тангенсу 297
§ 40. Арккотангенс — функция, обратная котангенсу 302
§ 41. Тригонометрические операции над аркфункциями . . . 307
§ 42. Простейшие зависимости между аркфункциями 309

Глава IX. Уравнения и системы уравнений рассматриваемые в тригонометрии

§ 43. Тригонометрические уравнения и их решения 317
§ 44. Классификация тригонометрических уравнений с одним неизвестным 321
§ 45. Тригонометрические уравнения I основного типа: $AT(ax + b) = c$ 324

§ 46. Тригонометрические уравнения II основного типа $T(ax+b)=T(a_1x+b_1)$, где левые и правые части суть одноименные круговые функции 328
§ 47. Тригонометрические уравнения III типа $T(ax+b)=T_s(a_1x+b_1)$, в которых левые и правые части суть соименные круговые функции 332
§ 48. Тригонометрические уравнения IV типа $f[T(ax+b)]=0$, в которых совершаются алгебраические операции только над одной круговой функцией с одним и тем же аргументом 334
§ 49. Тригонометрические уравнения V типа $f_1[T_1(a_1x+b_1)]\cdot f_2[T_2(a_2x+b_2)]\ldots f_k[T_k(a_kx+b_k)]=0$, где левая часть есть произведение функций вида левой части уравнений IV типа 337
§ 50. Тригонометрические уравнения VI типа $f[\sin(ax+b),\ \cos(ax+b),\ \operatorname{tg}(ax+b),\ \operatorname{ctg}(ax+b),\ \sec(ax+b),\ \operatorname{csc}(ax+b)]=0$, где выполняются алгебраические действия над несколькими круговыми функциями одного аргумента 340
§ 51. Тригонометрические уравнения VII типа $f[T(a_1x+b_1),\ T(a_2x+b_2),\ T(a_3x+b_3)]=0$, где производятся какие-либо алгебраические действия над одной и той же круговой функцией с различными аргументами 360
§ 52. Тригонометрические уравнения VIII типа $f[T_1(a_1x+b_1),\ T_2(a_2x+b_2),\ T_3(a_3x+b_3)=0$, с алгебраическими действиями над несколькими круговыми функциями с различными аргументами 365
§ 53. Трансцендентные уравнения, сводимые к тригонометрическим уравнениям 370
§ 54. Трансцендентные уравнения, содержащие неизвестные под знаками круговых функций, но не сводимые к тригонометрическим уравнениям 373
§ 55. Уравнения, образованные аркфункциями 378
§ 56. Простейшие системы тригонометрических уравнений . 389
§ 57. Некоторые задачи сводимые к исследованию круговых функций 400

Глава X. Триангуляция

§ 58. Треугольник как элемент геометрических фигур . . . 409
§ 59. Зависимость между основными элементами треугольника 412
§ 60. Эквивалентность трех основных систем соотношений между элементами треугольника 417
§ 61. Основные четыре случая решения треугольников . . . 421
§ 62. Нахождение неосновных элементов треугольника . . . 440
§ 63. Понятие об общем методе решения треугольников . . . 451
§ 64. Решение четырехугольников через сведение к системе треугольников 464
§ 65. Решение простых многоугольников с любым числом сторон 467
§ 66. Решение стереометрических задач 471
Приложение 479

ЧАСТЬ III. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КУРС ТРИГОНОМЕТРИИ

Приложение круговых функций в сферической геометрии, геодезии и астрономии

Глава I. Сферические двуугольники и треугольники

§ 1. Простейшие образы сферической геометрии — точки и большие круги на сфере 483
§ 2. Сферический двуугольник 486
§ 3. Сферический треугольник 488
§ 4. Площадь и сумма углов сферического треугольника . . 491

Глава II. Основные формулы выражающие зависимости между сторонами и углами сферического треугольника

§ 5. Понятие о решении сферического треугольника 495
§ 6. Формулы I группы, выражающие зависимость в сферическом треугольнике между тремя сторонами и одним углом 497
§ 7. Приложение формул I группы в геометрии и геодезии 500
§ 8. Формулы II группы, выражающие зависимость в сферическом треугольнике между сторонами и противолежащими им углами 507
§ 9. Формулы III группы, выражающие зависимость в сферическом треугольнике между двумя сторонами, углом между ними и углом, лежащим против одной из этих сторон 510
§ 10. Формулы IV группы, выражающие зависимость в сферическом треугольнике между всеми тремя углами и одной из его сторон 514
§ 11. Формулы, выражающие зависимости между сторонами и углами прямоугольного сферического треугольника . 516

Глава III. Приложение сферической тригонометрии в астрономии

§ 12. Небесная сфера и ее элементы 524
§ 13. Определение положения небесных светил с помощью сферических координат 526
§ 14. Задачи из астрономии и их решение 530

Приложение круговых функций в алгебре

Глава IV. Алгебраические операции с комплексными числами, представленными в тригонометрическом виде

§ 15. Геометрическое изображение комплексных чисел на плоскости и конкретное истолкование действий I ступени с этими числами 539
§ 16. Комплексные числа в тригонометрической форме . . . 546
§ 17. Действия II ступени с комплексными числами в тригонометрической форме и геометрическое истолкование этих действий 550
§ 18. Действия III ступени с комплексными числами в тригонометрической форме 556

Глава V. Использование тригонометрической формы комплексных чисел для обобщения теоремы сложения круговых функций и ее следствий

§ 19. Круговые функции от суммы n аргументов 561
§ 20. Круговые функции от краткого аргумента 564
§ 21. Круговые функции от n-й доли аргумента 566
§ 22. Использование тригонометрической и показательной форм комплексных чисел для преобразования некоторых тригонометрических выражений 568

Глава VI. Использование тригонометрической формы комплексных чисел при решении алгебраических уравнений

§ 23. Двучленные уравнения и их приложение в теории построения правильных многоугольников 579
§ 24. Алгебраические уравнения третьей степени и задача о трисекции угла 587

Неалгебраические элементарные функции от комплексного аргумента

Глава VII. Показательная функция

§ 25. Один из замечательных пределов в математике 605
§ 26. Функция e^x и ее приложения 611
§ 27. Определение показательной функции e^z с комплексным аргументом 616

Глава VIII. Круговые функции от комплексного аргумента

§ 28. Замечательные формулы Эйлера 622
§ 29. Определение круговых функций от комплексного аргумента 624
§ 30. Логарифм от комплексного аргумента 628

Ответы 632

СЛОВО К УЧИТЕЛЯМ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ, АСТРОНОМИИ И ГЕОГРАФИИ.

Из основ математических наук, изучаемых в средней школе, как показывает опыт, наиболее поверхностно и во многом формально проводится учение о круговых функциях, традиционно называемое тригонометрией. В ней изучаются абстрактно существенные свойства периодических колебательных движений. Тригонометрия дает необходимый метод развития многих понятий и методы решения реальных задач, возникающих в физике, механике, астрономии, геодезии, картографии и других науках.

В предлагаемом нами пособии учитель найдет неформальное, близкое к школе изложение теории круговых функций в органической связи с ее разнообразными приложениями в науке и технике. Рекомендуемый нами метод изложения учебного материала подскажет учителю реальный путь творческого преодоления традиционных недостатков в школьном преподавании тригонометрии.

Книга состоит из трех частей: I. **Тригонометрия острого угла**; II. **Основной курс тригонометрии**; III. **Дополнительный курс тригонометрии.** Каждая часть содержит то, что нужно знать учителю соответствующих школ и классов.

I. Учителю восьмилетней школы нужна только тригонометрия острого угла с подобранными практическими задачами, которые связаны, во-первых, с непосредственными измерениями отрезков и анализом точности использованных для измерений инструментов и, во-вторых, с косвенными тригонометрическими измерениями недоступных расстояний и углов, например радиусов Земли, Луны и расстояний до планет с учетом точности вычислений, обусловленной степенью точности непосредственных измерений.

Весь курс этой части тригонометрии развивается вначале на созданных лабораторным путем двузначных таблицах тригонометрических функций, а затем на умелом использовании четырехзначных таблиц с округлением, когда нужно, до трех и двух знаков.

II. Учителю средней школы нужен в старших классах основной курс тригонометрии, обобщающий то, что учащиеся получили при изучении тригонометрии острого угла, и переходящий в тригонометрию любого действительного числа, которая развивается на понятиях числовой оси и числовой окружности, связанной с прямоугольной системой координат. В предлагаемом пособии широко используется графическая тригонометрия, вытекающая естественно из данных определений круговых функций. Здесь же в органической связи с графиками вводятся понятия периода, частоты колебания, амплитуды и смещения фазы. Все это рассматривается на задачах механики, электротехники, оптики, астрономии и др. Дается повышенная и логически обоснованная теория в единстве с практикой, способствующая воспитанию творческого математического мышления.

III. Учителю математики специальной средней школы, например с математическим уклоном, а также учителю математики в кружковых занятиях в любой средней школе нужен дополнительный курс тригонометрии, представляющий третью часть этого пособия.

В этой части книги излагаются элементы сферической тригонометрии, имеющей в наш век ракетной техники и кругосветных космических полетов большое практическое и образовательное значение. Здесь же дается дальнейшее обобщение тригонометрии действительного числа в ее связи с алгеброй комплексных чисел и вводятся понятия о круговых функциях от комплексного аргумента, раскрывающие связь этих функций с другими элементарными трансцендентными функциями.

В третьей части пособия (как и в первых двух частях) особое внимание уделено авторами подбору и решению задач, иллюстрирующих разнообразные приложения круговых функций в алгебре, геометрии, механике, астрономии и геодезии, а также в искусстве вождения морских и воздушных кораблей.

Все три части книги объединены общей идеей развития понятия о круговых функциях: 1) начиная от функции острого плоского угла, 2) переходя к функциям любого числового аргумента, и в частности любого плоского угла, и 3) заканчивая понятиями сферических углов и сферических треугольников с раскрытием связи между их элементами.

В данном пособии уделено особое внимание логической стороне развиваемого курса, но по ходу изложения даются конкретные исторические экскурсы, повышающие интерес читателя и полезные учителю.

ВВЕДЕНИЕ

Отметим, что как в русской, так и зарубежной школе и литературе сложились две системы преподавания тригонометрии: 1) система, имеющая дедуктивный характер, когда курс тригонометрии начинают с общего учения о круговых функциях любого действительного аргумента (гониометрии), а заканчивают решением треугольников и сводимых к ним фигур с частичным использованием таблиц круговых функций острого угла, а главным образом с помощью таблиц логарифмов круговых функций; 2) система, имеющая индуктивный характер, когда ничинают с тригонометрии острого угла и ее применения при решении сперва прямоугольных треугольников, а затем любых треугольников и сводимых к ним фигур на основе полного использования таблиц круговых функций острого угла, а заканчивают обобщением — круговыми функциями любого действительного аргумента с установлением свойств этих функций и их применением при изучении различных гармонических движений.

Естественно, встает вопрос: как создались эти две системы в преподавании тригонометрии? Чтобы ответить на него, обратимся к истории тригонометрии и к истории ее преподавания.

I

Тригонометрия в своем развитии прошла две стадии. Первой стадией положены начала в античном мире; в связи с запросами астрономии возникает учение о взаимной связи круговых дуг и их хорд и составляются таблицы хорд через каждые полградуса до 180° в трудах александрийских ученых Гиппарха (II в. до н. э.) и Птолемея (II в. н. э.).

В дальнейшем потребности географии, геодезии, военного дела способствовали развитию зачатков нового предмета, заложенного Гиппархом и Птолемеем. Особенно усиленно шло развитие тригонометрии в средневековое время, в первую очередь на юго-востоке: в Индии (Ариабхата, Брамагупта, Бхаскара), Узбекистане, Азербайджане и Таджикистане (Мухаммед сын бен-Мусы, Насирэддин, ал-Каши, ал-Бируни), Арабии (Ахмад Ибн-Абдаллах, ал-Батани), а затем и в Европе (Пейербах, Иоганн Мюллер — Регномонтан, Коперник, Ретик). Творения ученых этого периода привели к выделению нового самостоятельного предмета сперва в Азербайджане Насирэддином Туси (1201—1274) в его «Трактате о полном четырехстороннике», а позднее, в 1595 году и в Европе в труде Варфоломея Питискуса «Triqonometria sive de Solutione triangulorum fractorum libris et perstricuns» (в переводе — «Тригонометрия, или краткий обзорный трактат о решении треугольников»).

Итак, на первой стадии тригонометрия сложилась как теория вычислительного приема решения треугольников и фигур, сводимых к ним, причем решение проводилось с помощью таблиц синусов и тангенсов, основой для вычисления которых послужили теоремы Пифагора и Птолемея.

Тригонометрия возникла на геометрических основах, имела геометрический язык и применялась к геометрическим задачам, которые выделялись из конкретных задач естествознания и техники того времени.

Вторая стадия, начало которой положено в трудах Франсуа Виета (1540—1603), полностью раскрывается в школе академика Леонарда Эйлера (1707—1783), когда создается аналитическая теория тригонометрических (круговых) функций.

Эта стадия была подготовлена всем ходом развития механики колебательных движений, физики звуковых, световых и электромагнитных волн.

Так, если на первой стадии развития тригонометрии соотношение $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ лишь выражало зависимость между площадями квадратов, построенных на сторонах переменного прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1, то на второй стадии это соотношение отражает также сложение двух колебательных движений с происходящей при этом интерференцией (см. рис. 1).

В этот период даны обобщения многим теоремам тригонометрии, и в частности выведены соотношения для $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$, $\operatorname{tg} n\alpha$, где n — натуральное число, и другие.

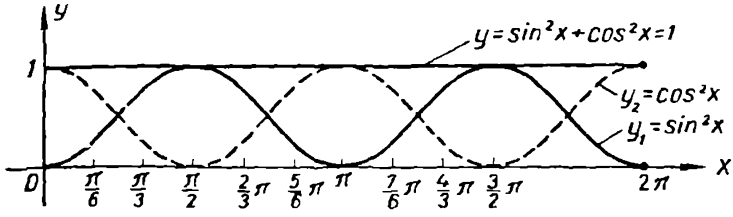


Рис. 1.

Функции $\sin x$ и $\cos x$ рассматриваются теперь как суммы степенных рядов:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Одновременно развивается учение о тригонометрических функциях комплексных чисел.

В связи с открытием великим геометром Николаем Ивановичем Лобачевским новой геометрии выясняется, что тригонометрия состоит из двух принципиально различных частей:

а) первой — гониометрии, части математического анализа, где независимо от геометрических соображений чисто аналитически раскрывается учение о трансцендентных тригонометрических функциях с их свойствами;

б) второй — собственно тригонометрии, где соединяются две ветви математики — математический анализ и геометрия того или иного пространства: в частности, тригонометрия евклидова пространства — учение об аналитическом решении треугольников и сводимых к ним фигур, рассматриваемых в евклидовом пространстве, и тригонометрия пространства Лобачевского — учение об аналитическом решении треугольников и фигур, сводимых к ним, рассматриваемых в пространстве Лобачевского.

Гониометрия не зависит от аксиомы параллельных, а тригонометрия в собственном смысле зависит от аксиомы

параллельных. Соотношение $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ характеризует в общем виде операции с соответствующими рядами и только в евклидовом пространстве выражает соотношение между площадями квадратов, построенных на сторонах переменного прямоугольного треугольника с постоянной гипотенузой, равной единице.

Известное соотношение между сторонами и углами треугольника $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ верно в евклидовом пространстве, а в пространстве Лобачевского неверно, в последнем имеется соотношение более общего характера:

$$\frac{l_a}{\sin A} = \frac{l_b}{\sin B} = \frac{l_c}{\sin C},$$

где l_a, l_b, l_c — длины окружностей с радиусами a, b и c.

Благодаря сложному ходу развития тригонометрии становится все более затруднительной ее связь с содержанием учебного предмета тригонометрии. Если на первой стадии своего развития тригонометрия мало чем отличалась от ее учебного предмета, то во вторую стадию такое различие становится весьма большим и существенным. В XVIII и особенно в XIX в. в связи с бурным развитием дифференциального исчисления возникает новый предмет — математический анализ, и тригонометрия становится составной частью этого предмета, а учебный предмет тригонометрии с его первоначальной геометрической основой продолжает существовать самостоятельно. В содержании учебного предмета тригонометрии возникают два направления: прежнее — аналитическое решение треугольников, и новое — изучение свойств тригонометрических функций.

II

Возник вопрос методического характера: как построить преподавание тригонометрии с учетом двух ее направлений?

Впервые и сравнительно рано (середина XIX в.) дал на этот вопрос принципиально правильный ответ, как нам представляется, наш замечательный академик Михаил Васильевич Остроградский. Он предложил (1848) систему индуктивного характера преподавания тригонометрии так что

а) сперва (в младших классах) изучается тригонометрия острого угла как учение о вычислительном приеме решения треугольников и фигур, сводимых к ним;

б) потом (в старших классах) обобщаются понятия тригонометрии острого угла, т. е. ставится теория тригонометрических функций любого действительного аргумента.

При жизни Остроградского его система была принята в кадетских корпусах (типа наших суворовских училищ), но в дальнейшем не нашлось смелых продолжателей его дела, умеющих ломать отживающие традиции.

Ф. И. Семашко, написавший первое издание учебника тригонометрии в духе Остроградского, в третьем издании (1886 г., после смерти М. В. Остроградского) отступает от новой системы и возвращается к системе дедуктивного характера.

В дальнейшем побеждает дедуктивное направление в методике тригонометрии, и в конце XIX — начале XX в. в нашей стране появляются учебники тригонометрии (Малинина, Шапошникова, Рыбкина, Злотчанского и др.), написанные по системе дедуктивного характера.

В годы политического подъема (1905—1906) передовые педагоги России настойчиво ставят проблему о коренном изменении характера преподавания математики, и в частности тригонометрии; выходят новые программы для одной из прогрессивных ветвей средней общеобразовательной школы — для реальных училищ, где тригонометрия изучается по индуктивной системе.

Появляются новые учебники и задачники, соответствующие новым программам (Слетова, Билибина, Мрочека, Лямина, Кильдюшевского, Глазенапа и др.).

Советская методика основ математических наук строит свою систему на идее развития и на психологических основах соответствия системы преподавания возрастным особенностям учащихся.

К сожалению, во многих программах по математике (с 1919 г. и далее) терялась мера в этом вопросе, переоценивались концентрические системы во многих отделах элементарной математики (в изучении действий над числами, в постановке учения об уравнениях, в учении о площадях и объемах соответствующих фигур) и в частности в системе преподавания тригонометрии.

Авторы данной работы считают, что индуктивная система в преподавании тригонометрии почти необходима или во всяком случае желательна, и придерживаются этой системы в построении данного курса тригонометрии.

III

При выборе метода изложения предмета тригонометрии авторы исходили из естественного процесса познания, раскрытого В. И. Лениным: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности»[1]. В соответствии с этим курс тригонометрии развивается на целесообразных задачах, обеспечивающих естественный переход от наблюдения жизненных явлений к доступной теории и от нее к приложениям.

Принимая во внимание, что преподавание в нашей школе должно строиться на основе идеи развития как в логическом, так и историческом ее понимании, авторы стремились к тому, чтобы приучить учащихся к обобщениям полученных знаний. Изложенные в первой части курса понятия тригонометрических функций острого угла обобщаются во второй части в функциях круговых от действительного аргумента, которые в свою очередь получают дальнейшее обобщение в круговых функциях от комплексного аргумента в третьей части курса. Изученная в алгебре числовая прямая обобщается теперь в понятии числовой окружности, что приводит учащихся естественно, а не искусственно к круговым функциям действительного аргумента, изменяющегося в интервале $(-\infty, +\infty)$, и раскрывает причины периодичности этих функций. Именно это обстоятельство и подсказывает целесообразность введения термина «круговые функции» вместо «тригонометрические функции» после перехода к действительному аргументу, тем более, что в высшей школе учащиеся встретятся с дальнейшими обобщениями круговых функций при изучении гиперболических и эллиптических функций.

Придавая большое значение в изложении идеи развития, авторы сочли целесообразным привести два доказа-

---

[1] В. И. Ленин, Философские тетради, Госполитиздат, М., 1947, стр. 146—147.

тельства основной теоремы о синусе и косинусе суммы двух аргументов: одно из них, основанное на теореме о проекции ломаной, более краткое, а другое, в котором совершается последовательный переход от ограниченных значений аргументов до любых значений, более доступное и более ценное для развития учащихся. Что же касается многочисленных исторических справок, вкрапленных в излагаемый материал, то они, по мнению авторов, будут оживлять преподавание тригонометрии и помогут учащимся воспринять процесс развития этого предмета.

В настоящем пособии авторы предлагают новую классификацию тригонометрических уравнений, полагая, что она внесет большую ясность в процесс решения таких уравнений и, с другой стороны, убедит учащихся в том, что нецелесообразно переносить весьма удобную классификацию алгебраических уравнений по степеням на тригонометрические уравнения.

Авторы считают, что наилучшим местом для введения в школу систематического учения о приближенных измерениях и вычислениях являются начала тригонометрии. Поэтому в самом начале курса обращено большое внимание на точность как непосредственных, так и косвенных измерений; при этом предполагается, что вычисления с приближенными данными проводятся по правилам В. М. Брадиса, известным учащимся.

Отметим, что в системе исчисления точности по Крылову—Брадису имеется один недостаток, выявляющийся при раздроблении приближенных именованных чисел. Так, 3,7 *м* = 370 *см* = 3700 *мм*, но первое число имеет два значащих знака, второе — три, третье — четыре: произошло кажущееся повышение точности. Чтобы избежать указанного недостатка, авторы в данной книге применяют такое обозначение: 3,7 *м* = 370 *см* = 3700 *мм*. подчеркивая снизу те знаки, за которые не ручаются.

IV

В каждом предмете основ наук имеются тенденции укрепления новой, более естественной терминологии взамен старой, отживающей. В данной книге авторы сочли целесообразным введение следующих новых терминов и обозначений:

1) вместо понятия «тригонометрическая функция любого угла или любой круговой дуги» говорится о понятии «круговой функции действительного числа»,

2) вместо термина «приведение тригонометрических функций» говорится о «сведéнии круговых функций любого аргумента к аргументу ограниченному»,

3) вместо термина «тригонометрические равенства» употребляется термин «тригонометрические тождества», которые записываются через три черточки ($\equiv$).

В заключение считаем долгом отметить, что при подборе некоторых материалов к третьей части нашего пособия были использованы следующие работы:

1. А. Адлер, Теория геометрических построений, Одесса, 1910.

2. М. К. Вентцель, Сферическая тригонометрия, Геодезисиздат, М., 1948.

3. Б. А. Воронцов-Вельяминов, Астрономия, Учпедгиз, М., 1955.

4. Г. Гессенберг, Сферическая тригонометрия, изд. «Наука и жизнь», 1923.

5. С. Глазенап, Тригонометрия, ч. III, ГИЗ, М.—Пг., 1923.

6. П. Кранц, Сферическая тригонометрия, изд. И. П. Лодыжникова, Берлин, 1923.

7. Р. О. Кузьмин и Д. К. Фаддеев, Алгебра и арифметика комплексных чисел, Учпедгиз, М., 1939.

8. Ж. Серре, Тригонометрия, 6-е изд., М., 1913.

9. Ж. Серре, Дополнение к теории круговых функций, изд. Пирожкова, СПб., 1906.

10. Н. Н. Степанов, Сферическая тригонометрия, Гостехиздат, М., 1948.

11. Статья Л. Р. «Об одной формуле Эйлера». Сб. «Математическое просвещение», вып. 5, 1936.

ЧАСТЬ I

ТРИГОНОМЕТРИЯ ОСТРОГО УГЛА

Выдающийся азербайджанский ученый Мухаммед Насирэддин Туси (1201—1274), написавший «Трактат о полном четырехстороннике», где на геометрических началах развивается тригонометрия.

ГЛАВА I

ПЛОСКИЕ УГЛЫ И ИХ КОСВЕННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ ЧЕРЕЗ УГЛОВЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

§ 1. О непосредственном и косвенном измерении величин

Геометрические величины (отрезки, углы, площади, объемы) сперва научились измерять непосредственно. Так, чтобы измерить отрезок, к нему прикладывают соответствующим образом измерительную ленту (как это делает, например, портной); чтобы измерить угол, на него накладывают определенным образом транспортир (как это делает чертежник); чтобы измерить площадь фигуры, на нее накладывают палетку и подсчитывают число квадратиков, заключенных внутри фигуры (так, например, поступают с фигурами на топографических картах).

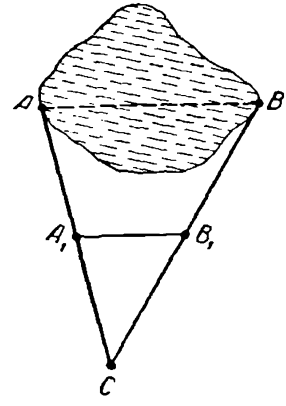


Рис. 2.

Приемы непосредственного измерения величин и простейшие измерительные инструменты были изобретены еще в глубокой древности. Так, например, градусом как единицей меры угла и транспортиром пользовались вавилонские астрономы (звездочеты) за 2 тысячи лет до нашей эры.

Техника непосредственного измерения величин весьма проста и доступна каждому. Однако в окружающей нас жизни существует много таких величин, непосредственное измерение которых связано с большими трудностями, а иногда и вовсе невозможно. Как, например, измерить высоту дерева (не срубая его), ширину непрохо-

димого болота, угол с недоступной вершиной, расстояние между планетами, диаметры планет, объем большого водохранилища, запасы ископаемых (например, руды или каменного угля) и т. п. Оказывается, такие величины можно определить косвенно, т. е. через измерение некоторых вспомогательных величин и соответствующие вычисления. Так, для определения ширины болота AB (см. рис. 2) выбирают на местности точку C так, чтобы можно было провешить и измерить: 1) отрезок AC, 2) отрезок BC, 3) отрезок A_1B_1, где A_1 — середина AC и B_1 — середина BC. Затем по известному из геометрии свойству средней линии в треугольнике находят $AB = 2A_1B_1$. Пусть $A_1B_1 = 340$ *м*, тогда $AB = 680$ *м*.

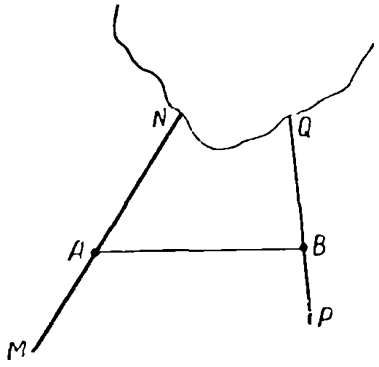


Рис. 3.

Для определения угла с недоступной вершиной, например, угла между двумя прямыми дорогами MN и PQ, пересекающимися в недоступной для нас местности[1] (см. рис. 3), провешивают прямую AB и измеряют углы NAB и QBA.

Пусть $\sphericalangle NAB = 57°$, $\sphericalangle QBA = 85°$, тогда по теореме о сумме углов треугольника находят искомый угол:

$$x = 180° - (57° + 85°) = 38°.$$

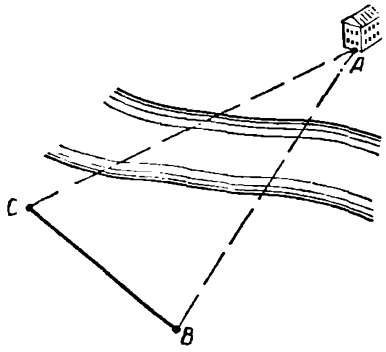


Рис. 4.

Однако изученная вами часть геометрии далеко не всегда дает средства косвенных измерений величин на основе вычислений.

Пусть требуется определить расстояния от пунктов C и B до недоступного нам предмета A, например здания, расположенного за рекой (рис. 4), при условии,

[1] Местность, в которой пересекаются дороги, может оказаться недоступной в связи с наводнением, разрушением мостов и т. п.

что данный предмет из этих пунктов виден и расстояние между C и B возможно измерить.

Измерив расстояние между пунктами B и C и углы, образуемые прямой BC и направлениями из точек B и C на предмет A, получим:

$$BC \approx 456 \text{ м}. \quad \angle B \approx 82°30', \quad \angle C \approx 65°20'.$$

Таким образом, треугольник ABC вполне определен стороной и двумя углами, однако найти в нем стороны AB и AC вычислением мы пока не можем. Геометрия дает в этом случае лишь графический метод, заключающийся в следующем:

Вычерчивают на листе бумаги треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 5), подобный треугольнику ABC. Сторону B_1C_1 можно взять произвольной, а углы B_1 и C_1 должны быть равны соответственно углам B и C. На рисунке 5 сторона $B_1C_1 \approx 2{,}28$ *см*, следовательно, коэффициент подобия

$$k = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{45600 \text{ см}}{2{,}28 \text{ см}} \approx 20000.$$

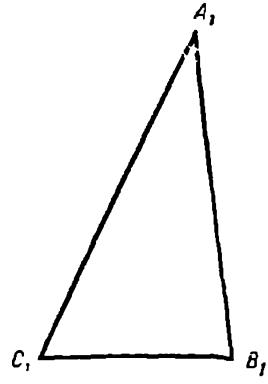


Рис. 5.

Измерив другие стороны треугольника $A_1B_1C_1$, получают: $A_1B_1 \approx 3{,}85$ *см*, $A_1C_1 \approx 4{,}25$ *см*. Умножив эти числа на коэффициент подобия, находят искомые величины:

$$AB = k \cdot A_1B_1 = 3{,}85 \text{ см} \cdot 20000 \approx 770 \text{ м},$$

$$AC = k \cdot A_1C_1 = 4{,}25 \text{ см} \cdot 20000 \approx 850 \text{ м}.$$

Данный здесь графический метод обладает рядом существенных недостатков, из которых отметим два:

1) аккуратное вычерчивание треугольника $A_1B_1C_1$ и последующее измерение его сторон связано с затратой большого времени и труда и не всегда возможно (в полевых условиях, в условиях плавания на корабле и т. п.);

2) при таком определении расстояния неизбежны значительные погрешности, зависящие не только от неточности измерительных инструментов и измерений на местности, но и от неточности чертежа и чертежных инструментов, а также от неточности измерений, производимых на самом чертеже после его выполнения.

В самом деле, всякая линейная ошибка на чертеже влечет за собой в 20 000 раз бóльшую ошибку на местности. Если, например, при вычерчивании треугольника $A_1B_1C_1$ и измерении его стороны A_1C_1 допустили ошибку только в 3 *мм*, то в результате мы получим отклонение от истинного расстояния AC, равное 3 *мм* $\cdot$ 20 000 $\approx$ 60 *м*.

А если принять во внимание возможность и других неточностей чертежа, которые к тому же нельзя учесть, то становится очевидным, что геометрическим построительным методом мы не только не найдем истинных расстояний, но и не сможем оценить допущенные нами погрешности.

Более того, в случаях, когда в условии задачи имеются весьма малые углы, построительный прием вообще не применим, так как построение треугольника с углом, меньшим 1°, уже практически невозможно. А между тем в задачах на определение диаметров планет и расстояний до небесных светил (которые дальше будут рассматриваться) мы часто имеем дело с углами в несколько минут. Например, угол видимости Луны с нашей планеты равен 0°31′.

Возникает необходимость в открытии общего вычислительного приема нахождения сторон и углов любой фигуры по заданным элементам, вполне определяющим эту фигуру (например, треугольник вполне определяется заданием трех его независимых элементов, остальные его элементы надо научиться находить вычислением).

Этот новый прием зарождается в геометрии, в учении о подобии треугольников.

Исторически он возник в связи с развитием астрономии. Первыми творцами этого приема были греческие математики Гиппарх (II в. до н. э.) и Птолемей (II в. н. э.). Их вычислительные способы решения задач были усовершенствованы индийским математиком Брамагуптой в VIII в., а затем узбекскими математиками ал-Каши и Улугбеком в XIII в.

Накопление и систематизация всех вычислительных приемов решения геометрических задач привели к выделению нового предмета математики, который назвали в конце XVI в. тригонометрией (т. е. треугольникоизмерение, понимая под этим косвенное измерение на основе свойств треугольника).

К изучению указанных приемов и началам предмета тригонометрии мы и приступим.

§ 2. О точности непосредственных и косвенных измерений

Непосредственное измерение отрезков и углов, как и других величин, возможно только приближенно с соответствующей точностью. Точность непосредственных измерений отрезков и углов колеблется от 2-х до 5—6 значащих цифр и достигает только в исключительно обставленных условиях до 7—8 значащих цифр.

Степень точности измерений зависит не только от измерительных приборов и навыка мастера, производящего измерение, но также от материала, из которого изготовлена измеряемая деталь, и от цели измерения. Приведенная таблица, составленная на конкретных примерах, дает об этом некоторое представление.

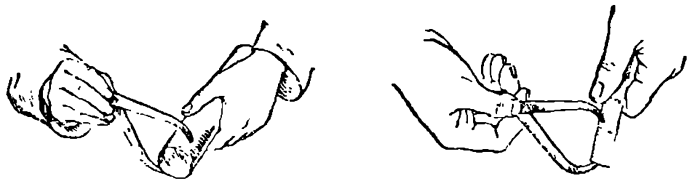


Рис. 6

№	Цели измерения	Из какого материала изготовлена деталь	Какими измерительными приборами производится измерение	Кто измеряет	Степень точности
I	Аккуратное изготовление ножек для столов	Из дерева	Кронциркулем и масштабной миллиметровой линейкой (рис. 6)	Токарь по дереву	3 значащих цифры
II	Изготовление вала для машины	Из стали	Предельным калибром или штангенциркулем (рис. 7)	Токарь по металлу 3—4 разряда	4 значащих цифры
III	Изготовление коленчатого вала для аэроплана	Из электростали высшего качества	Микрометром (рис. 8)	Токарь по металлу 8 разряда	5 значащих цифр

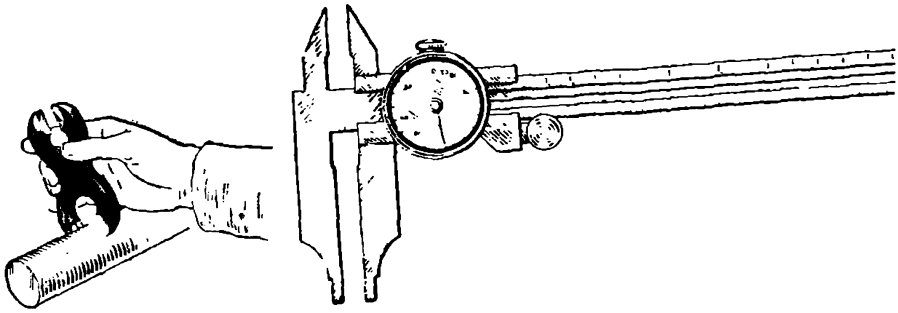
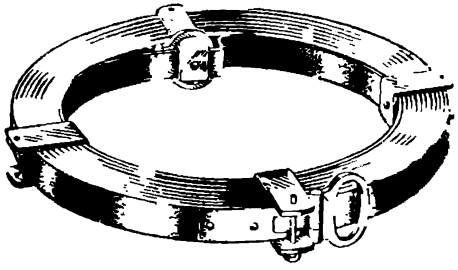


Рис. 7.

Рис. 8.

Землемер ведет измерения на местности также с различной точностью в зависимости от измерительных приборов, например:

Отрезки (расстояния)	Измерительной лентой или цепью — с 3 значащими цифрами (рис. 9)	Жезлами — повышенная точность с 4—5 значащими цифрами	Специальной проволокой с учетом ее температуры — с точностью до 6—7 значащих цифр (рис. 9а)
Углы	Астролябией — с 3—4 значащими цифрами (рис. 10)	Гониометром — с 4—5 значащими цифрами (рис. 11)	Теодолитом — с 5—6 значащими цифрами (рис. 12). Наивысшая точность — 7 значащих цифр



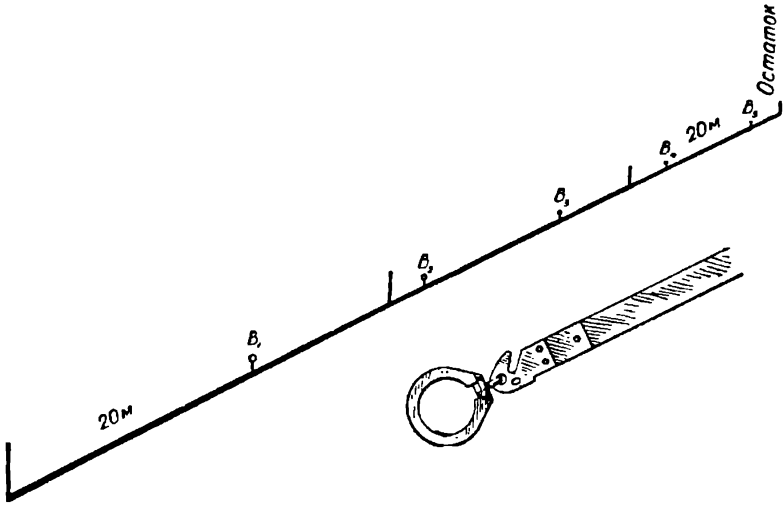


Рис. 9.

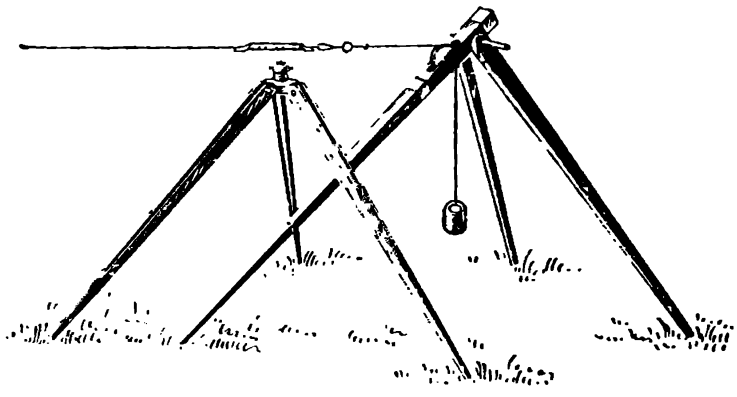


Рис. 9а.

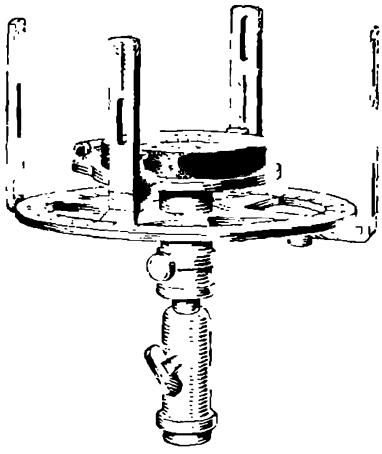


Рис. 10.

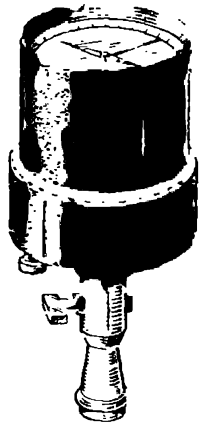


Рис. 11.

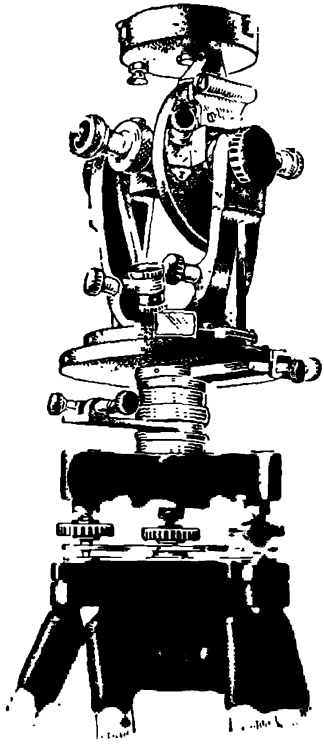


Рис. 12

Школьные измерения отрезков и углов на местности и на чертежах ведутся в основном с 2—3 значащими цифрами.

Так, например, $x \approx 5{,}6$ *м* — ширина класса, измеренная измерительной лентой; $y \approx 21{,}3$ *см* — длина отрезка на чертеже, измеренная масштабной линейкой; $z \approx 121°$ — угол, измеренный школьной астролябией, или эклиметром.

Так как процесс «косвенного измерения» недоступных величин начинается непосредственным измерением некоторых вспомогательных величин и завершается вычислениями, в которых используются результаты непосредственных измерений, то точность косвенных измерений зависит от точности выполненных измерений. Если, например, результаты непосредственных измерений длины и ширины классной комнаты выразились числами 6,4 *м* и 8,7 *м* с двумя значащими цифрами, то уже

никакими вычислениями мы не сможем найти площадь пола этой комнаты точнее, чем с двумя значащими цифрами, т. е. $S \approx 56\ м^2$.

В сборнике математических таблиц В. Брадиса имеются правила, которых следует придерживаться при вычислениях, содержащих результаты каких-либо измерений, т. е. приближенные данные.

Приведем пример, в котором используются правила Брадиса при «косвенном измерении» высоты фабричной трубы, находящейся на ровной местности (рис. 13).

I. Непосредственные измерения и подготовка формулы расчета.

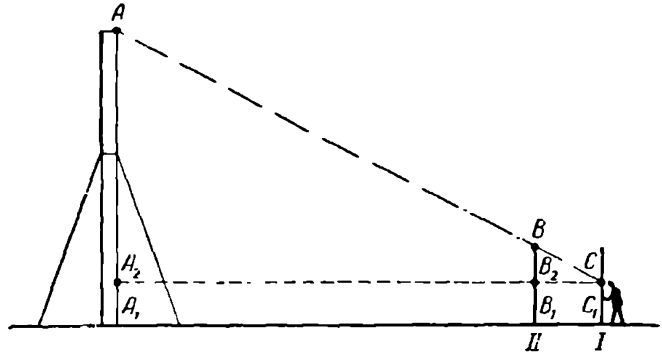


Рис. 13.

1) Берут с собой две двухметровые рейки (2,00 *м*), разделенные на сантиметры, и ставят их вертикально в любом удобном месте так, чтобы труба и обе рейки находились в одной плоскости (как указано на рисунке).

2) Наблюдатель, стоящий у первой рейки, находит на ней точку C так, чтобы C, B и A были на одной прямой, и отмечает высоту этой точки $C_1C = h_1 м$.

3) Измеряют отрезки $A_1B_1 = a м$ и $B_1C_1 = b м$.

4) Из подобия треугольников ACA_2 и BCB_2 получают:

$$\frac{AA_2}{BB_2} = \frac{A_2C}{B_2C} \text{ или } \frac{AA_1 - A_1A_2}{BB_1 - B_1B_2} = \frac{A_2B_2 + B_2C}{B_2C}.$$

Используя обозначения, записывают уравнение:

$$\frac{x - h_1}{2{,}00 - h_1} = \frac{a+b}{b},$$

из которого и получают формулу для вычисления высоты трубы:

$$x = 2{,}00 + \frac{a}{b}(2{,}00 - h_1).$$

II. Вычисление.

1) Пусть результаты измерений оказались следующими: $h_1 \approx 1{,}20$ *м*, $a \approx 40{,}0$ *м*, $b \approx 1{,}6$ *м*.

2) Находят x:

$$x \approx 2{,}00 + \frac{40{,}0}{1{,}6}(2{,}00 - 1{,}20) \approx$$

$$\approx 2{,}00 + 25{,}0 \cdot 0{,}80 \approx \quad \text{(по I, II и V правилам[1])}$$

$$\approx 2{,}00 + 20{,}0 \approx \quad \text{(по II и V правилам)}$$

$$\approx 22 \ (м) \quad \text{(примечание к V правилу)}$$

§ 3. Косвенное измерение недоступных углов

Если угол изображен на чертеже, то его легко измерить непосредственно с помощью транспортира. Для измерения доступных углов на местности употребляют более совершенные измерительные приборы, с которыми вы уже частично знакомились в предшествующем параграфе.

Однако непосредственное измерение углов на практике часто связано с большими трудностями, а в тех случаях, когда вершина угла недоступна, такое измерение вообще невозможно. Так, например, нельзя измерить угол, под которым поднимаются в гору или спускаются с горы, угол подъема лестницы, крыши, угол между двумя прямыми дорогами, пересекающимися в недоступной нам местности, угол, под которым наша планета видна с другой планеты, и т. п.

Как же находить величины таких углов?

Оказывается, уже в далеком прошлом люди нашли способ определения величины угла, при котором измеряется не сам угол, а некоторые отрезки, связанные определенным образом с таким углом. Этот способ косвенного измерения угла основан на понятии углового коэффициента, к которому мы и переходим.

---

[1] См. «Правила подсчета цифр» в сборнике математических таблиц В. Брадиса.

§ 4. Угловой коэффициент, или тангенс острого угла

Пусть дан любой острый угол $MAN = A$ (рис. 14). Возьмем на его стороне AN произвольно точки B, B_1, B_2, B_3,...,B_n... и опустим из них на другую сторону перпендикуляры BC, B_1C_1, B_2C_2, ..., B_nC_n... Получим бесконечное множество подобных прямоугольных треугольников с одним и тем же острым углом A.

Понятно, что ни один из катетов этих треугольников не может характеризовать величину угла A, так как с переходом от одного треугольника к другому катеты изменяются, а угол A остается неизменным. То же самое можно сказать и о гипотенузах треугольников.

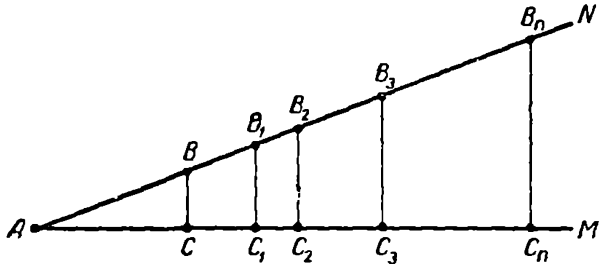


Рис. 14.

Попробуем взять отношение катетов в построенных нами треугольниках. Так как эти треугольники подобны, то будем иметь:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \ldots$$

Замечаем, что в каждом треугольнике отношение катета, противолежащего углу A, к катету, прилежащему к углу A, одно и то же. В таком же отношении будут находиться катеты в любом прямоугольном треугольнике с углом, равным A, так как такой треугольник будет подобен построенным нами треугольникам.

А что будет происходить с рассматриваемыми нами отношениями катетов, если угол A изменять, например увеличивать?

На рисунке 15 показано изменение угла MAN и отмечено три значения его:

$$\sphericalangle MAN < \sphericalangle MAN' < \sphericalangle MAN'',$$

причем построены прямоугольные треугольники ABC, $AB'C$ и $AB''C$ с общим катетом AC, прилежащим к рассматриваемым углам.

Видим, что катеты, противолежащие углу A, не равны, а именно: $BC < B'C < B''C$ (катеты увеличиваются).

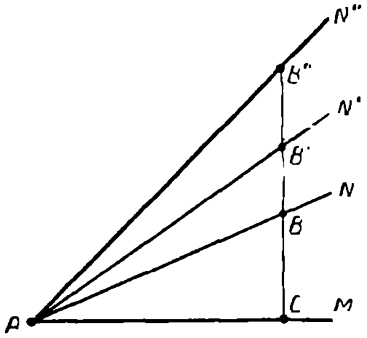


Рис. 15.

Разделим каждый член этого неравенства на AC, получим:

$$\frac{BC}{AC} < \frac{B''C}{AC} < \frac{B''C}{AC},$$

т. е. с увеличением острого угла увеличивается и отношение катета, противолежащего этому углу, к прилежащему катету; с уменьшением угла указанное отношение катетов уменьшается, причем каждому углу соответствует определенное отношение катетов.

Следовательно, величину любого острого угла можно характеризовать числом, равным отношению катетов соответствующего прямоугольного треугольника. Действительно, если дан острый угол A (рис. 14), то можно взять на его стороне произвольную точку B, опустить из нее на другую сторону перпендикуляр BC и в полученном треугольнике ABC найти отношение катетов $\frac{BC}{AC} = \frac{m}{n}$.

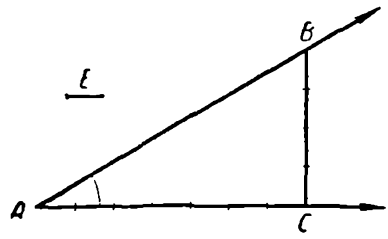


Рис. 16.

Обратно, если дано число $\frac{m}{n}$, равное отношению катета, противолежащего некоторому неизвестному нам углу, к катету прилежащему, то можно построить и сам этот угол. Пусть, например, $\frac{m}{n} = \frac{4}{7}$.

Примем за единицу измерения произвольный отрезок E (рис. 16). Построим прямой угол с вершиной C и на его сторонах отложим отрезки: $CB = 4$ единицам измерения и $CA = 7$ единицам измерения.

Проведем лучи AB и AC, получим искомый угол CAB.

Приняв за единицу измерения какой-либо другой отрезок E', мы получили бы другой прямоугольный треугольник $C'A'B'$ (рис. 17); но этот треугольник будет подобен треугольнику CAB (по второму признаку подобия), поэтому его угол $C'A'B'$ равен углу CAB. Таким

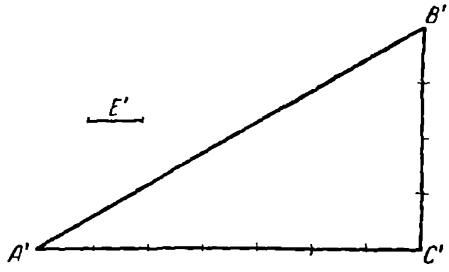


Рис. 17.

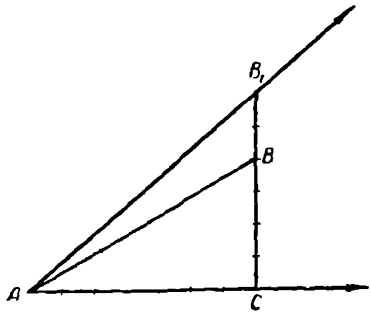


Рис. 18.

образом, данному отношению $\frac{m}{n}$ соответствует единственный угол. Но стоит лишь изменить отношение $\frac{m}{n}$, например взять $\frac{m_1}{n} > \frac{m}{n}$, и сразу же изменится определяемый угол, а именно:

$$\sphericalangle CAB_1 > \sphericalangle CAB.$$

Это показано на рисунке 18, где угол CAB соответствует отношению катетов $\frac{BC}{AC} = \frac{m}{n} = \frac{4}{7}$, а угол CAB_1 соответствует отношению катетов $\frac{B_1C}{AC} = \frac{m_1}{n} = \frac{6}{7}$.

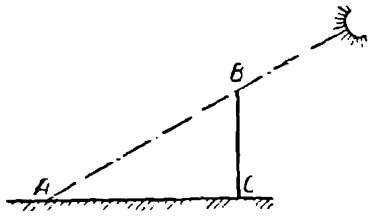


Рис. 19.

Связь угла с отношением катетов в прямоугольном треугольнике положена в основу косвенного измерения углов. Впервые такой метод был использован арабскими астрономами-математиками ал-Батани (850—929) (Багдад «Книга о звездах») и Абу-ль-Вефа (940—998) для определения угловой высоты солнца по тени от шеста (рис. 19).

Зная величину шеста $BC = m$ и длину его тени $AC = n$, они находили отношение катетов $\frac{BC}{AC} = \frac{m}{n}$ в прямоугольном треугольнике ABC, а по отношению катетов определяли величину угла A. Отношение катета, противолежащего искомому углу, к катету прилежащему они называли Umbra versa (Тень) [Абу-ль-Вефа]. Позднее в XVI в. европейцы [Финк (1561—1656) «Геометрия круга», Копенгаген, 1583] стали называть это отношение по-латыни тангенсом.

Итак, *тангенсом острого угла в прямоугольном треугольнике называют отношение катета, противолежащего этому углу, к катету прилежащему*, что сокращенно со времен Жирара (1590—1633, Нидерланды) записывают так:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}.$$

Например, если противолежащий катет $BC = 15$ *см*, а прилежащий $AC = 20$ *см*, то $\operatorname{tg} A = \frac{15}{20} = 0{,}75$.

Из всего сказанного выше можно сделать следующие выводы:

1. Любой данный острый угол вполне определяет единственное положительное число, являющееся тангенсом этого угла.

2. Двум неравным острым углам соответствуют неравные их тангенсы, причем большему углу соответствует больший тангенс.

1. Любое данное положительное число определяет единственный острый угол, причем данное число является тангенсом этого угла.

2. Двум неравным положительным числам, рассматриваемым как тангенсы углов, соответствуют неравные острые углы, причем большему числу соответствует и больший угол.

Надо заметить, что в строительной технике часто вместо величины угла дается тангенс угла.

Например, при постройке дома (рис. 20) мастеру обычно вместо величины угла ската крыши дают отношение длин двух стропил, а именно $\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{\frac{1}{2}AD}$, т. е. тангенс этого угла. На рисунке 20 $\operatorname{tg} x = \frac{BC}{AC} = \frac{4{,}0}{5{,}0} = 0{,}80$.

Угол ската крыши изменяется в зависимости от кровельного материала. Он больше для соломенных крыш, меньше для деревянных, еще меньше для железных.

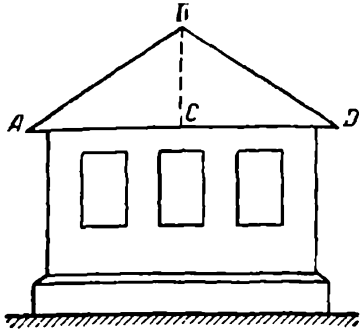


Рис. 20.

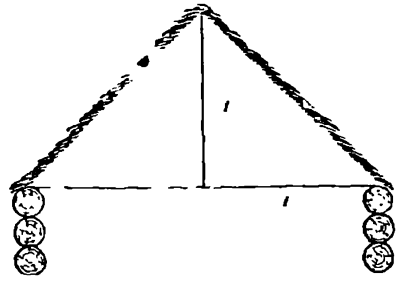


Рис. 21.

В строительном деле тангенс угла ската:

1) для соломенных крыш (рис. 21) изменяется от 1,0 до 1,6;

2) для деревянных крыш (рис. 22) изменяется от 0,50 до 1,0;

3) для железных крыш (рис. 23) изменяется от 0,14 до 0,30.

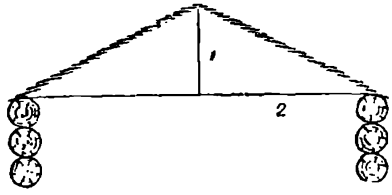


Рис. 22.

Итак, для определения величины угла нет необходимости в непосредственном его измерении, достаточно знать тангенс этого угла, т. е. отношение противолежащего ему катета к катету прилежащему. Поэтому на

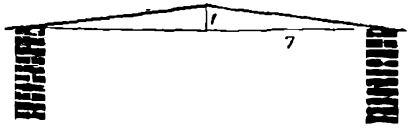


Рис. 23.

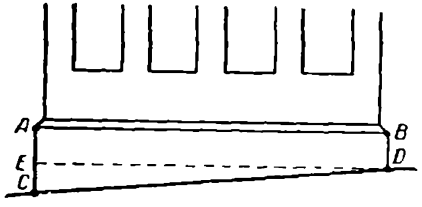


Рис. 24.

практике в случае, когда непосредственно измерить угол трудно или вовсе невозможно, находят его тангенс.

Пусть, например, требуется найти угол спуска улицы, на которой находится школа (см. рис. 24). Измеря-

ем длину фундамента школы и его высоту в начале и в конце здания, получаем

$$AB = l,\ AC = h_1,\ BD = h_2.$$

Находим тангенс искомого угла из прямоугольного треугольника CED:

$$\operatorname{tg} D = \frac{CE}{ED} = \frac{h_1 - h_2}{l} = k.$$

Зная тангенс угла D, можно построить сам угол на бумаге, а затем, если потребуется измерить его транспортиром, и выразить в градусах.

Предположим, что результаты измерения фундамента оказались следующими: $l \approx 8{,}0$ *м*, $h_1 \approx 70$ *см*, $h_2 \approx 30$ *см*; тогда $\operatorname{tg} D \approx \frac{70-30}{800} = \frac{10}{200} = 0{,}050$.

Построив прямоугольный треугольник $C'D'E'$ с катетами 1,0 и 20 единиц, получим на бумаге угол D', равный искомому (рис. 25).

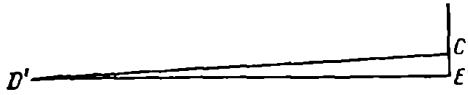


Рис. 25.

С помощью транспортира находим $D' \approx 3°$ с точностью до одной значащей цифры, а не двух, так как на обычном школьном транспортире нет десятков минут.

Разумеется, построение угла с последующим измерением транспортиром можно не делать, если мы имеем под руками таблицу, содержащую тангенсы всех углов. По такой таблице мы сразу находим угол, тангенс которого равен 0,050, причем с точностью до двух значащих цифр, если таблица тангенсов будет достаточной точности.

Это обстоятельство было учтено людьми еще в глубокой древности. Первые таблицы тангенсов были составлены вычислением в Багдаде в X в. астрономами-математиками ал-Батани и Абу-ль-Вефа. Перейдем и мы к составлению такой таблицы в следующем параграфе.

Упражнения.

1. Найти тангенсы острых углов прямоугольного треугольника ABC, у которого катет $AC = 15{,}8$ *см* и катет $BC = 7{,}2$ *см*.
2. Найти тангенсы углов, образованных:
   а) диагональю классной доски с ее краями;

б) диагональю прямоугольника с его сторонами, если одна сторона прямоугольника в $1\frac{1}{2}$ раза больше другой.

3. Построить угол A, если

а) $\operatorname{tg} A = 0,75$;
б) $\operatorname{tg} A = 4,2$;
в) $\operatorname{tg} A = 0,08$.

4. Определите угол подъема улицы, на которой вы живете.

5. Определите подъем парадной и «черной» лестницы в школе.

6. Определите угол, под которым вы увидите верхнюю точку телеграфного столба высотой H *м*, если будете стоять в одной горизонтальной плоскости с основанием столба на расстоянии l *м* от него, а ваш рост h *м*.

Рассмотрите следующие случаи: $H = 10$ *м* и $h = 1,2$ *м*; $l = 5,0$ *м*; 15 *м*; 30 *м*; 100 *м*.

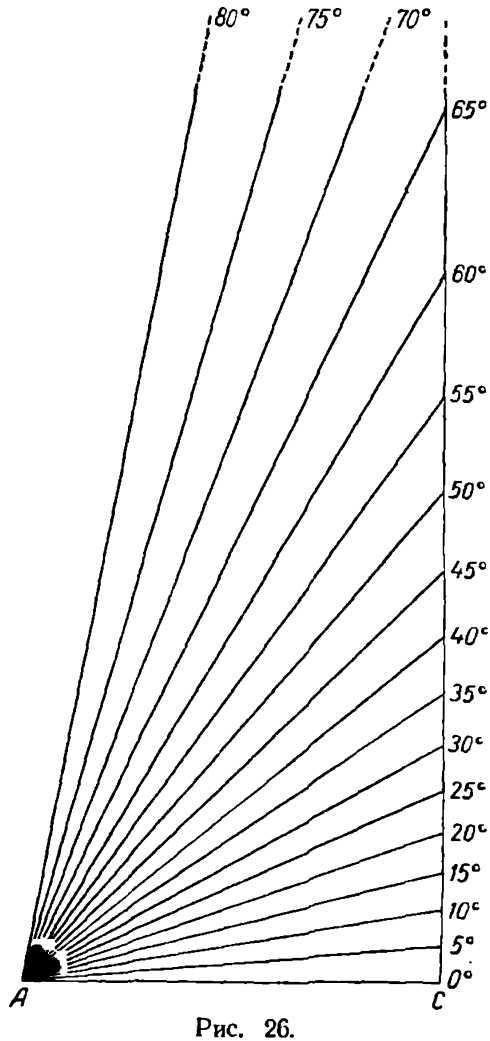


Рис. 26.

§ 5. Составление двузначной таблицы тангенсов острых углов и пользование ею

Существуют различные приемы вычислений тангенсов углов, с которыми мы познакомимся в дальнейшем. В настоящее время вы можете находить тангенсы углов экспериментально с точностью до двух значащих цифр путем построений и измерений.

Возьмите разграфленный в клетку лист бумаги (а еще лучше лист миллиметровой бумаги), отметьте на этом листе буквой C вершину какого-нибудь одного из прямых углов, образованных линиями графления (рис. 26). На горизонтальной стороне угла отложите отрезок $CA = 20$ клеткам и в точке A постройте с помощью

транспортира углы: 5°, 10°, 15°, 20°,..., 75°, 80°. Стороны этих углов пересекаются с другой стороной прямого угла C. В результате образуются прямоугольные треугольники с указанными острыми углами. Величина каждого катета у этих треугольников легко выражается в миллиметрах, так как известно, что у клеток графления сторона равна 5 *мм*. Следовательно, представляется возможным теперь вычислить с двумя значащими цифрами тангенсы углов этих треугольников (кроме tg 5°, определенного с 1 значащей цифрой).

Так, например, у треугольника с углом 20° противолежащий катет ≈ 36 *мм*, а прилежащий катет ≈ 100 *мм*, следовательно, $\operatorname{tg} 20° \approx \frac{36}{100} = 0{,}36$.

Аналогичным образом найдем тангенсы остальных углов и расположим их в следующую таблицу:

A	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
tg A	0,09	0,18	0,27	0,36	0,47	0,58	0,70	0,84
A	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°
tg A	1,0	1,2	1,4	1,7	2,1	2,7	3,7	5,7

Конечно, необходимо иметь таблицу тангенсов с большей точностью. Как это сделать?

Используя некоторые теоремы геометрии, можно найти точные значения тангенсов углов в 45°, 30° и 60°. Известно, что в прямоугольном треугольнике с углом в 45° катеты равны, следовательно, их отношение равно 1, а потому $\operatorname{tg} 45° = 1$.

Для вычисления тангенсов углов в 30° и 60° можно использовать известную из геометрии теорему Пифагора[1], выражающуюся равенством:

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (1)$$

[1] Открытие этой теоремы долгое время приписывали греческому математику Пифагору, жившему в VI в. до н. э., поэтому ее называли теоремой Пифагора. Ныне установлено, что данную теорему применяли за 1500 лет до Пифагора в древнем Вавилоне, однако название теоремы в учебниках пока сохраняется прежнее.

где a и b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC (рис. 27).

Пусть в треугольнике ABC угол $A = 30°$, тогда по известной теореме противолежащий катет равен половине гипотенузы этого треугольника, т. е. $a = \frac{1}{2} c$.

Подставив это значение катета в формулу (1), получаем:

$$\frac{1}{4} c^2 + b^2 = c^2, \text{ откуда } b = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Используя полученные результаты и определение тангенса, находим:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{c}{2} : \frac{c\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774 \ldots$$

Другой острый угол в данном треугольнике $B = 60°$, следовательно, $\operatorname{tg} 60° = \frac{c\sqrt{3}}{2} : \frac{c}{2} = \sqrt{3} = 1{,}732\ldots$

Сравнивая полученные точные значения тангенсов углов в 45°, 30° и 60° с теми значениями, которые мы нашли построением и вычислением, видим, что первые два знака у них совпадают, следовательно, составленные нами таблицы имеют двузначную точность.

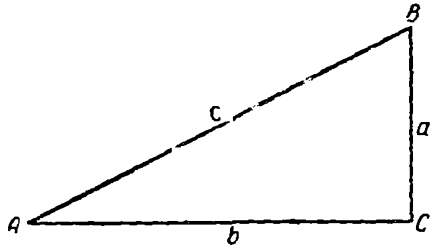


Рис. 27.

Существуют способы вычислений тангенсов любых углов с любой степенью точности, но они требуют некоторых дополнительных знаний, которые вы приобретете во второй части курса тригонометрии.

На странице 96 дается таблица тангенсов трехзначной точности, причем углы в ней изменяются через 1°. По таблице тангенсов угла можно еще раз убедиться в том, что с увеличением острого угла растет и его тангенс, и обратно, однако прямой пропорциональной зависимости между углом и его тангенсом нет.

В самом деле, возьмем тангенсы двух каких-нибудь углов, например:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3},$$

видим, что с увеличением угла в два раза (60° : 30°) его тангенс возрос в три раза $\left(\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\right)$.

Покажем, как применяется таблица тангенсов при решении задач на определение углов.

Пример 1. Какова угловая высота солнца в то время, 1) когда длина горизонтальной тени от стоящего человека равна половине его роста; 2) когда она вдвое больше его роста, причем измерения проведены измерительной лентой с 2 значащими цифрами.

Решение. Обозначим искомые углы через x_1 и x_2, а рост человека через h, тогда в первом случае длина тени равна $\frac{1}{2}h$, а во втором—$2h$.

По определению тангенса имеем:

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{h}{\frac{1}{2}h} = 2{,}0; \quad \operatorname{tg} x_2 = \frac{h}{2h} = 0{,}50.$$

По таблице находим: $x_1 \approx 63°$, $x_2 \approx 27°$.

Пример 2. Пассажирский самолет, находящийся над пунктом A на высоте $h \approx 400$ *м*, начал приземление на аэродром, расположенный в 2,5 *км* от пункта A.

Рис. 28.

Как велик будет в среднем угол приземления самолета?

Решение. Предположим, что точка приземления самолета B (рис. 28) находится на одной горизонтальной плоскости с пунктом A. Из прямоугольного треугольника ABC находим тангенс искомого угла B:

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} \approx \frac{400}{2500} = 0{,}16.$$

По таблице тангенсов находим $B \approx 9°$.

Упражнения.

1. Определите при помощи тени от шеста угловую высоту солнца вашей местности в 9, 12 и 15 часов дня.

2. Ширина каждой ступеньки каменной домовой лестницы равна 32 *см*, а высота 14 *см*. Определить угол подъема лестницы.

Составьте и решите такую же задачу, используя размеры ступенек лестницы в вашем доме.

3. Диагональ прямоугольника образует с его стороной угол в 27°. Найти отношение сторон прямоугольника.

4. Профиль канавы имеет форму равнобочной трапеции, у которой нижнее основанне равно 0,70 *м*, верхнее — 1,50 *м* и высота —1,00 *м*. Выразить в градусах крутизну стенок канавы.

5. Известно, что графиком функции $y = kx$ является прямая, проходящая через начало координат, причем число k называют угловым коэффициентом прямой.

Докажите, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс. (Взять случай, когда $k > 0$.)

§ 6. Четырехзначные таблицы тангенсов острых углов и пользование ими

Выше мы пользовались и двузначными таблицами тангенсов с шагом в 5° и трехзначными с шагом в 1°, т. е. такими таблицами, в которых даны тангенсы углов через 5° или через 1°. Существуют таблицы и с меньшим шагом. Так, в сборнике математических таблиц Брадиса имеется таблица тангенсов с шагом в 0°,06′, короче — 6′, причем значение тангенсов в ней даны вначале с четырмя десятичными знаками, а в дальнейшем с четырьмя значащими цифрами. Эта таблица позволяет решать задачи с большей точностью, чем та, с которой решались задачи в предшествующих параграфах. При чтении таблицы тангенсов различают два вида задач: прямую задачу, когда по данному углу находится его тангенс, и обратную задачу, когда по данному тангенсу угла находится сам угол.

Прямая задача. Дан угол A. Найти $\operatorname{tg} A$. Здесь возможны три случая[1].

I случай: данный угол A выражен целым числом градусов. В этом случае из всей таблицы используются только два первых столбца: в первом столбце читаем данный угол A, а во втором — его тангенс, например, для $A = 17°$, находим $\operatorname{tg} A \approx 0{,}3057$.

Такие таблицы, в которых значение угла читается в одном столбце, называют таблицами с одним входом. Следовательно, в рассматриваемом случае (как и в предшествующих параграфах) мы использовали только один вход в таблицу.

II случай: данный угол содержит целое число гра-

[1] Таблицы Брадиса.

дусов и еще целое число минут, кратное шести, например, 17°24′.

Чтобы прочесть данный угол в таблице, надо использовать уже два входа в нее: целое число градусов (17°) читаем, как и раньше в первом столбце, а число минут (24′) ищем сверху в одном из следующих десяти столбцов,содержащих 0′, 6′, 12′, 18′, 24′, 30′, 36′, 42′, 48′, 54′. Значение тангенса угла 17°24′ читаем на пересечении строки, начинающейся данным числом градусов (17°), и столбца с данным числом минут (24′),

Таким путем находим $\operatorname{tg} 17°24' \approx 0{,}3134$.

III случай: данный угол содержит целое число градусов и целое, но не кратное шести число минут, например 17°26′.

Берем ближайший к данному угол, содержащий кратное шести число минут. Для 17°26′ таким углом будет 17°24′. Как и прежде, используя два входа в таблицу, находим

$$\operatorname{tg} 17°24' \approx 0{,}3134.$$

В той же строке, где мы прочли значение тангенса «ближайшего угла», в последних трех столбцах даются поправки на 1′, 2′ и 3′. Взятый нами ближайший табличный угол отличается от данного на 2′, поэтому поправку берем в столбце с меткой 2′, она равна 6 единицам последнего табличного разряда.

Так как с возрастанием угла растет и его тангенс, то поправку следует прибавить к найденному значению $\operatorname{tg} 17°24'$, и тогда получим $\operatorname{tg} 17°26' \approx 0{,}3134 + 0{,}0006 = 0{,}3140$. Здесь к двум основным входам в таблицу добавился третий — вход поправок.

Обратная задача. Дан $\operatorname{tg} A$. Найти угол A.

Здесь можно различать также три случая:

I случай: данное значение тангенса содержится в таблице и находится в столбце с меткой сверху 0′, например, $\operatorname{tg} A = 0{,}4877$.

Число 0,4877 находим на пересечении строки с меткой 26° сверху и столбца с меткой 0′ сверху; припоминая решение прямой задачи, делаем вывод, что искомый угол $A \approx 26°0'$.

II случай: данное значение тангенса также содержится в таблице, но находится не в первом, а в каком-нибудь другом столбце. Так, например, $\operatorname{tg} A = 2{,}703$ мы на-

ходим на пересечении столбца с меткой сверху 42′ и строки с меткой слева 69°; опираясь на решение прямой задачи, заключаем, что угол $A \approx 69°42'$.

III случай: данное значение тангенса отсутствует в таблице. Например, $\operatorname{tg} A = 1{,}2017$.

Находим ближайшее табличное значение тангенса: в нашем случае такое значение выражается числом 1,2002, расположенным на пересечении строки с 50° слева и столбца с 12′ сверху, следовательно, $1{,}2002 \approx \approx \operatorname{tg} 50°12'$.

Находим разницу между данным значением тангенса и найденным ближайшим табличным. У нас она оказалась равной 15 десятитысячным. В той же строке в столбцах поправок встречаются числа: 7, 14 и 22; из них ближайшее к 15 будет 14. Так как 14 принадлежит столбцу с меткой 2′, то заключаем, что и на число 15 будет приходиться поправка около 2′, которую следует прибавить к углу 50°12′. Итак, получаем:

$$\begin{array}{r} 50°12' \\ +\quad 2' \\ \hline A \approx 50°14' \end{array}$$

Может случиться, что ближайшее табличное значение тангенса окажется больше данного значения, тогда угловую поправку следует вычитать так как с уменьшением тангенса угол убывает.

Пример: $\operatorname{tg} A = 0{,}8627$; найти A.

Ближайшее табличное значение тангенса 0,8632, т. е. на 5 десятитысячных больше данного значения. В нашей строке на 5 десятитысячных приходится поправка в 1′. Кроме того, таблица нам показала, что $0{,}8632 \approx \operatorname{tg} 40°48'$. Следовательно, найдем искомый угол:

$$\begin{array}{r} 40°48' \\ -\quad 1' \\ \hline A \approx 40°47' \end{array}$$

Примечание. Если дано значение тангенса с большим числом десятичных знаков, то его предварительно надо округлить, сохранив лишь столько знаков, сколько содержит таблица.

Упражнения.

1. Найти по таблице Брадиса тангенсы следующих углов: 63°, 74°12′, 4°45′.
2. С помощью той же таблицы найти угол A, если:
   а) $\operatorname{tg} A = 0{,}7186$,
   б) $\operatorname{tg} A = 1{,}4638$,
   в) $\operatorname{tg} A = 3{,}291753$.

3. В прямоугольной системе координат даны две точки: $A(1{,}000;\ 2{,}000)$ и $B(2{,}500;\ 5{,}750)$. Какие углы образует прямая AB с осями координат?

4. В точке O (рис. 29) приложены две взаимно-перпендикулярные силы $P \approx 8{,}90$ *кг* и $Q \approx 5{,}20$ *кг*. Определить равнодействующую этих сил R и углы α и β, которые она образует с составляющими силами.

5. На рисунке 30 изображены лампы, установленные на эскалаторах метрополитена, и подставки для ламп, имеющие в профиле форму прямоугольных треугольников. Определите угол подъема эскалатора, если вертикальный катет треугольника (высота подставки) равен

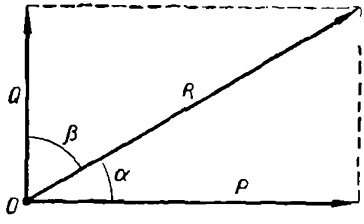


Рис. 29.

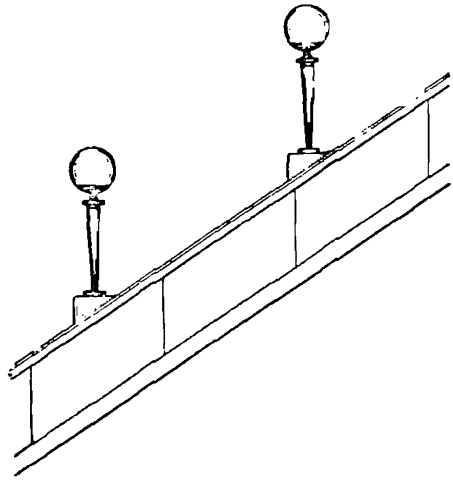


Рис. 30.

100 *мм*, а горизонтальный (длина подставки) — 173 *мм*.

6. В 800 *м* от места подъема самолета впередн расположены деревья высотой до 20 *м*. Под каким углом должен подниматься самолет, чтобы не задеть деревьев?

7. На рисунке 31 дана часть топографической карты с изображением возвышенности. Масштаб карты: в 1 *см* 100 *м*. Определить среднюю крутизну склонов возвышенности в различных ее местах и направлениях, если известно, что горизонтали проведены через 5,0 *м* по высоте. Построить профиль рельефа изображенной части поверхности от A до B.

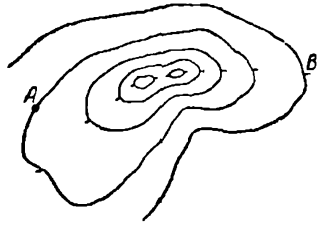


Рис. 31.

8. На железнодорожной линии допускается предельный уклон в 10 тысячных. Это значит, что на каждые 1000 *м* пути по горизонтальному расстоянию возможен подъем пути в гору не больше чем на 10 *м*. Выразить величину предельного уклона пути в градусах.

9. Два вала, расположенные под прямым углом друг к другу, соединены при помощи конических зубчатых колес (шестеренок) (рис. 32). Под каким углом наклонены зубцы шестеренок к осям валов, если одна шестеренка имеет 25 зубцов, а другая 43?

10. На токарных станках нередко производят обточку деталей «на конус» в связи с чем в технике существует особый термин «ко-

нусность», под которым понимают величину отношения $EF:AF$ (рис. 33), т. е. отношение разности радиусов оснований конуса к длине его оси. Это отношение иногда выражают в процентах.

Покажите, что величина конусности равна тангенсу угла, составленного образующей с осью конуса.

Напишите формулу для определения конусности и угла между образующей и осью конуса, у которого диаметры осно-

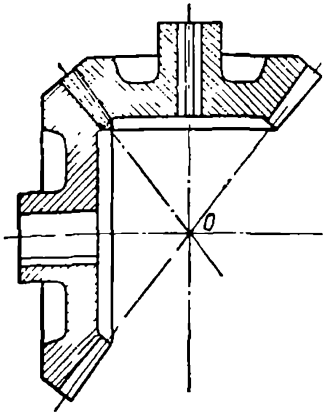


Рис. 32.

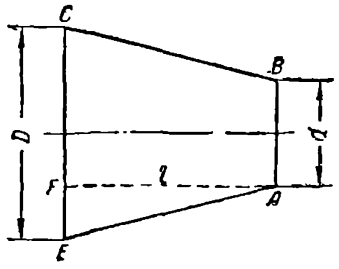


Рис. 33.

ваний D и d, а длина оси l. Примените эту формулу для конусов, размеры которых в миллиметрах заданы следующей табличкой:

D	50	75	75	30	80
d	25	25	50	20	50
l	50	75	75	80	150

11. Угол между образующими у вершины конуса равен 14°10′. Определить конусность в процентах.

12. В лесном деле вместо «конусности бревна» употребляют термин «сбег бревна». Наиболее ценным считается лес с небольшим «сбегом», так как в строительной технике в большинстве случаев приходится уничтожать конусность бревна его обработкой до цилиндрической формы.

Найти «сбег» и «угол сбега» у бревна длиной $l \approx 12$ *м* с диаметрами оснований $D \approx 45$ *см* и $d \approx 30$ *см*.

13. Возьмем круглый прямой цилиндр с диаметром d. Начертим на бумаге прямоугольный треугольник ABC так, чтобы один его катет AC равнялся длине окружности основания (поперечного сечения) ци-

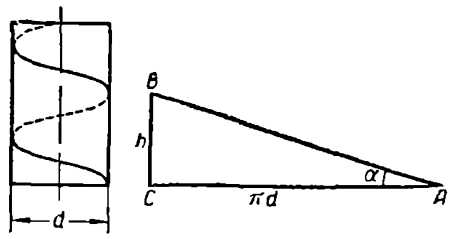


Рис. 34.

линдра, т. е. πd, а другой катет BC можно взять произвольной длины h (рис. 34). Затем вырежем треугольник ABC и обернем вокруг цилиндра так, чтобы его катет AC расположился по окружности основания цилиндра. Наконец, начертим на поверхности цилиндра ту линию, по которой расположится гипотенуза AB треугольника. Эту линию называют винтовой линией, точнее: одним оборотом винтовой линии. Перемещая соответствующим образом треугольник ABC по поверхности цилиндра и повторяя указанный процесс обертывания его вокруг цилиндра с вычерчиванием линии расположения гипотенузы, можно продолжить винтовую линию так, что она образует на поверхности цилиндра два, три и т. д. оборота.

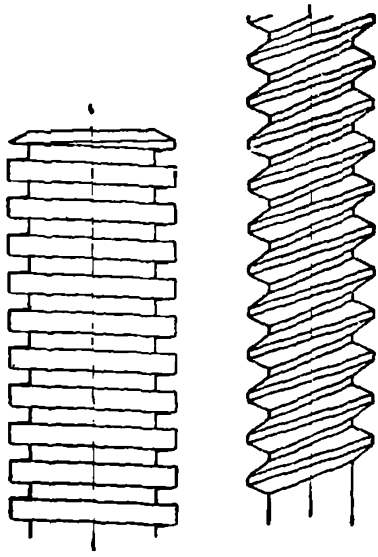


Рис. 35.

Угол α треугольника ABC, прилежащий к катету AC, называют углом подъема винтовой линии. Понятно, что за один оборот винтовая линия поднимается на высоту h, равную катету BC. Отрезок h называют шагом винтовой линии. Используя определение тангенса угла, можно выразить зависимость между диаметром цилиндра, шагом винтовой линии и углом ее подъема формулой:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\pi d}. \qquad (*)$$

В технической практике делают на цилиндре по направлению винтовой линии выемку треугольной и прямоугольной формы, получая при этом так называемый винт с треугольной или прямоугольной нарезкой (рис. 35). Мастеру-токарю, занимающемуся нарезкой винтов, часто приходится пользоваться формулой (*) для определения шага винта, внешнего и внутреннего диаметра нарезки и угла подъема нарезки. При определении угла подъема нарезки берут обычно так называемый средний диаметр винта $d = \frac{D_1 + D_2}{2}$, где D_2 и D_1 — внутренний и внешний диаметры нарезки.

Решите следующие задачи:

1) Средний диаметр винта $d \approx 24{,}6$ *мм*, шаг винта $h \approx 2{,}8$ *мм*; найти угол подъема нарезки.

2) Вся нарезка винта состоит из 12 нитей (оборотов), длина нарезанной части винта равна 36,1 *мм*, внешний диаметр нарезки $D_1 \approx 25{,}5$ *мм*, внутренний — $D_2 \approx 21{,}3$ *мм*. Определить угол подъема нарезки.

ГЛАВА II

НЕДОСТУПНЫЕ ОТРЕЗКИ И ИХ КОСВЕННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНСЫ СООТВЕТСТВУЮЩИХ УГЛОВ

§ 7 Определение расстояния между двумя пунктами, когда один из них недоступен

Измерение расстояния между точками осуществляется масштабной линейкой. С помощью рулетки или мерной цепи производят измерение расстояний на местности между любыми доступными пунктами A и B, если возможно провешивание прямой AB (рис. 36).

Но как же определить расстояние между пунктами, разделенными непреодолимым препятствием, например рекой, лесом, горой и т. п.? Как узнать расстояние до предмета, недоступного нам, например до Луны или до летящего самолета? Как найти расстояние между такими предметами, к которым вовсе невозможно подойти, как например расстояние между островами или между двумя небесными светилами? Как определить размеры летящего самолета?

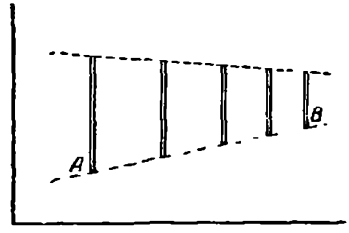


Рис. 36.

Разумеется, непосредственное измерение в этих случаях невозможно. Во всех подобных случаях прибегают к косвенному определению расстояний, основанному на использовании известного нам понятия тангенса угла.

В самом деле, вернемся еще раз к определению тангенса угла. Если в прямоугольном треугольнике ABC обозначить гипотенузу AB через c, а катеты, лежащие

против углов A и B, соответственно через a и b (рис. 37), то по определению тангенса будем иметь:

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}; \qquad (1) \qquad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a} \qquad (2)$$

Из этих равенств получаем следствия:

$$a = b \operatorname{tg} A; \qquad (3)$$

$$a = \frac{b}{\operatorname{tg} B}; \qquad (4)$$

или словами: *во всяком прямоугольном треугольнике любой катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету, или деленному на тангенс угла, прилежащего к первому катету.*

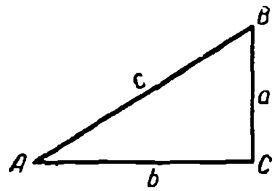


Рис. 37.

Итак, формулы (3) и (4) дают возможность определять катет прямоугольного треугольника, если известен его острый угол и другой катет. На этом и основан способ косвенного измерения недоступных расстояний.

Покажем его на конкретных примерах.

Сперва рассмотрим случаи, когда определяется расстояние между пунктами, один из которых недоступен.

Пример 1. Допустим, что требуется определить высоту фабричной цилиндрической трубы, расположенной на горизонтальной площадке так, что к основанию трубы возможно подойти (рис. 38).

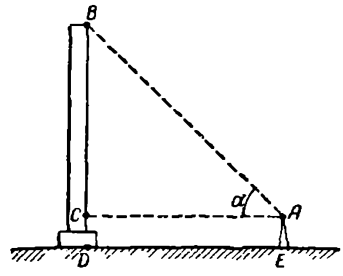


Рис. 38.

На некотором расстоянии $AC = b$ ($м$) от основания трубы установим угломер AE и определим угол α между горизонталью и направлением на верхнюю точку B трубы. Применив к прямоугольному треугольнику ABC следствие (3), находим:

$$BC = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Учтя высоту угломера $AE = h$ $м$, получаем формулу для определения высоты трубы:

$$BD = h + b \operatorname{tg} \alpha.$$

Пусть результаты измерения таковы:

$$b \approx 40\ м, \quad h \approx 1{,}5\ м \quad \text{и} \quad \alpha \approx 31°;$$

тогда

$$BD \approx 1{,}5 + 40 \cdot \operatorname{tg} 31° \approx 26\ м.$$

Пример 2. Требуется узнать, какой длины мост надо построить через реку, если крайние его устои запроектировать в точках A и B, отмеченных на берегах реки (рис. 39). Для этого на берегу реки от точки A отложили отрезок $AC \approx 40{,}0\ м$ в направлении, перпендикуляр-

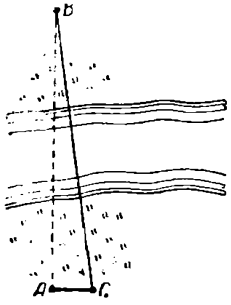


Рис. 39.

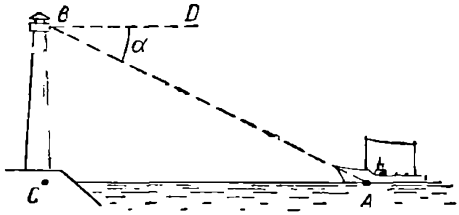


Рис. 40.

ном к AB, и в точке C с помощью угломера определили угол ACB, который оказался равным 81°30′.

Из прямоугольного треугольника ABC по формуле (3) нашли искомую длину моста

$$AB = AC \cdot \operatorname{tg} ACB \approx 40{,}0 \cdot \operatorname{tg} 81°30' \approx 268\ (м).$$

Упражнения

1. В полдень при высоте солнца в 28° фабричная труба дает горизонтальную тень длиной в 76 *м*. Определить высоту трубы.

2. Фонарь маяка (рис. 40) находится на высоте $BC \approx 68\ м$ над уровнем моря. Из него виден корабль A под углом понижения $DBA = \alpha \approx 1° 30'$. Найти расстояние от корабля до маяка.

3. Угол откоса мелкого песка равен $\alpha \approx 31°$. Какой высоты можно насыпать кучу песка, если диаметр основания равен 3,5 *м*?

4. Доказать, что произведение тангенсов острых углов во всяком прямоугольном треугольнике равно 1.

5. Написать формулу, выражающую зависимость между $\operatorname{tg} A$ и $\operatorname{tg}(90° - A)$, где A — произвольный острый угол.

Указание. Если один из острых углов прямоугольного треугольника равен A, то другой его острый угол равен $90° - A$.

§ 8. Определение расстояния между двумя пунктами, к которым невозможно подойти

Пример 1. Пусть требуется определить, на какой высоте летит самолет. Для этого заранее выводят необходимую формулу. Сделать это можно следующим образом: два наблюдателя устанавливают в горизонтальной плоскости угломерные приборы AA_1 и BB_1 так, чтобы плоскость AA_1BB_1 пересекала трассу полета самолета (рис. 41). В тот момент, когда самолет пересекает плоскость измерительных приборов AA_1BB_1, наблюдатель находящийся у прибора AA_1, дает сигнал, по которому одновременно на приборах A и B фиксируются углы α и β. Затем измеряют расстояние между угломерными приборами $AB = a$ метров и высоту приборов $AA_1 = BB_1 = h$ метров, после чего переходят к следующим расчетам.

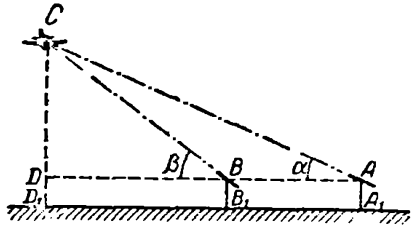


Рис. 41.

Из прямоугольных треугольников CDB и CDA по формуле (3) (стр. 44) получают:

$$CD = DB \cdot \operatorname{tg}\beta \qquad (*)$$

$$CD = DA \cdot \operatorname{tg}\alpha, \qquad (**)$$

откуда

$$DB \cdot \operatorname{tg}\beta = DA \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Но $DA = DB + BA = DB + a$, поэтому последнее равенство перепишется так:

$$DB \cdot \operatorname{tg}\beta = (DB + a)\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$DB = \frac{a \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}.$$

Подставив значение DB в равенство (*), получают

$$CD = \frac{a \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}. \qquad (***)$$

Таким образом, искомая высота полета самолета

$$CD_1 = CD + DD_1 = \frac{a \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha} + h,$$

так как

$$DD_1 = BB_1 = AA_1 = h.$$

Применим выведенную формулу для конкретного случая проведенных наблюдений и соответствующих измерений.

Пусть результаты измерения оказались следующими:

$$h \approx 1{,}50\ м, \quad a \approx 93{,}5\ м, \quad \alpha \approx 39°, \quad \beta \approx 44°,$$

тогда самолет находится на высоте

$$CD_1 \approx \frac{93{,}5 \cdot \operatorname{tg} 39° \cdot \operatorname{tg} 44°}{\operatorname{tg} 44° - \operatorname{tg} 39°} + 1{,}50 \approx 470\ (м).$$

Пример 2. С берега моря видны два предмета A и B, находящиеся на острове (рис. 42). Как определить расстояние между этими предметами, не совершая поездки на остров? Это можно сделать следующим образом: из точки C (см. рис. 42) провешим на берегу моря в перпендикулярном к AC направлении прямую CM и на ней с помощью угломера найдем точку D так, чтобы угол CDB был прямым[1].

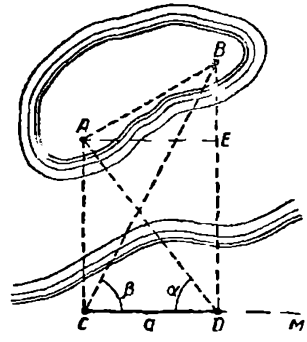


Рис. 42.

Затем измерим углы $CDA = \alpha$ и $DCB = \beta$, а также длину отрезка $CD = a\ (м)$.

Если мысленно провести $AE \parallel CD$, то образуется прямоугольный треугольник ABE, из которого по теореме Пифагора получаем:

$$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2},$$

где $AE = CD = a$ и $BE = BD - AC$.

Из прямоугольных треугольников ACD и BCD находим:

$$BD = a \operatorname{tg} \beta, \quad AC = a \operatorname{tg} \alpha,$$

следовательно, $BE = a(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)$.

Подставив значение AE и BE в равенство (*), получим формулу для определения искомого расстояния:

$$AB = a\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

---

[1] Выбор такой точки D при наличии препятствий на местности может быть затруднительным, тогда данную задачу решают другим путем, с которым мы познакомимся в § 13.

Предположим, что фактические измерения дали следующие результаты: $a \approx 270$ *м*, $\alpha \approx 58°$ и $\beta \approx 74°$, тогда

$$AB = 270\sqrt{1 + (\operatorname{tg} 74° - \operatorname{tg} 58°)^2} \approx 576\ (м) \approx 580\ (м).$$

Упражнения.

1. Из окна, находящегося на высоте $h = 12{,}5$ *м* над уровнем реки, берега реки видны под углами понижения $\alpha_1 \approx 13°30'$ и $\alpha_2 \approx$ $\approx 5°30'$ (рис. 43). Оба угла находятся в одной плоскости, перпендикулярной к направлению реки. Определить ширину реки в наблюдаемом месте.

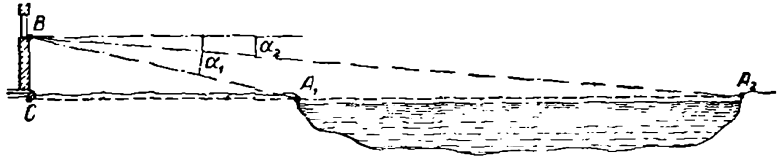


Рис. 43.

2. Из некоторого пункта, лежащего в одной горизонтальной плоскости с основанием нового здания Московского университета, самая верхняя точка этого здания видна под углом в 35°00′ к горизонту. Из другого пункта, расположенного в той же горизонтальной плоскости, но на 184 *м* ближе к зданию верхняя точка последнего видна под углом в 56°30′.

Определить высоту нового здания университета.

3. Определите высоту деревьев, растущих на школьном дворе, высоту школьного здания и различных этажей его, для чего предварительно проделайте необходимые доступные измерения с помощью школьных измерительных приборов.

4. Составьте сами задачу, в которой требуется определить высоту подъема стратостата; подберите реальные числовые данные к ней и рассчитайте ответ.

5. Опишите способ определения высоты горы при условии, что у ее подножия имеется горизонтальная площадка, на которой возможно провешивание прямой в направлении на вершину горы. Составьте формулу для решения задачи в общем виде, а затем подберите реальные числовые данные и рассчитайте ответ.

ГЛАВА III

ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА — ТАНГЕНС, СИНУС И КОСИНУС И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

§ 9. Что такое функция?

Если нам скажут, что «двое пошли, гривенник нашли, а пятеро пойдут, сколько найдут?», то надо ответить, что найденная сумма денег не зависит от числа нашедших ее людей;

если скажут «сегодняшней ночью своим пением три петуха разбудили пять человек, сколько петухов разбудят семь человек?», то надо ответить, что здесь две величины не находятся в зависимости одна от другой.

Итак, могут быть две величины, которые изменяются независимо одна от другой.

Если известно, что a *кг* товара стоят b руб., то $2a$ *кг* того же товара будут стоить вдвое больше, так как между стоимостью и количеством товара существует определенная зависимость, а именно: прямая пропорциональность.

Если известно, что a человек могут вырыть канаву в b дней, то $2a$ человек могут вырыть ту же канаву в $\frac{b}{2}$ дней, так как между числом людей и числом дней, потребных на выполнение намеченной работы, существует определенная зависимость, а именно: обратная пропорциональность.

Если установлено, что стальной кубик с ребром a *мм* весит b *г*, то кубик с ребром в $2a$ *мм*, изготовленный из той же стали, будет весить $2^3 \cdot b$ *г*, т. е. $8b$ *г*, так как между весом кубика и его ребром существует зависимость, пропорциональная кубу ребра.

Прямая пропорциональность, обратная пропорциональность, пропорциональность кубу и другие более сложные зависимости — суть частные случаи взаимозависимых величин; вместо выражения «величина, зависимая от данной величины» говорят короче «функция от данной величины».

«Функция» — слово латинское, в переводе на русский язык означающее «отправление, связь». Впервые это слово ввел в математику великий немецкий ученый-математик Г. Лейбниц (1646—1716).

Точное определение понятия функции в математике было дано в XIX в. сперва в России великим геометром Николаем Ивановичем Лобачевским (1792—1856), а затем в Германии талантливым математиком Лежен-Дирихле (1805—1859). Это определение функции можно передать так: *если имеются две величины и известно, что каждому значению первой из них соответствует определенное значение второй, то вторую из этих величин называют функцией первой*

Например:

I величина	II величина
длина ребра куба (x)	объем куба (x^3)
1 *см*	1 $см^3$
2 *см*	8 $см^3$
3 *см*	27 $см^3$

I величина	II величина
острый угол (A)	тангенс угла ($\operatorname{tg} A$)
30°	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	1
60°	$\sqrt{3}$

Таким образом, объем куба так же, как и его вес, есть функция длины ребра куба, тангенс острого угла есть функция этого угла.

§ 10. Синус острого угла

В предыдущих главах мы раскрыли зависимость между острым углом прямоугольного треугольника и отношением катетов и показали на различных примерах как эта зависимость используется при выполнении косвенных измерений углов и отрезков.

Естественно поставить теперь вопрос, не существует ли в прямоугольном треугольнике аналогичная функциональная зависимость между острым углом и отношением катета к гипотенузе.

Тригонометрия дает положительный ответ: такая зависимость существует, и она также может быть использована как эффективное средство для косвенного измерения отрезков и углов.

Чтобы выяснить это, вернемся снова к рисунку 14 (стр. 27), на котором изображено множество подобных прямоугольных треугольников ABC, AB_1C_1, AB_2C_2, ..., ..., AB_nC_n, ... с одним и тем же острым углом A.

Во всех этих треугольниках в силу их подобия отношение катета, противолежащего углу A, к гипотенузе имеет одну и ту же величину:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \ldots = \frac{B_nC_n}{AB_n} = \ldots$$

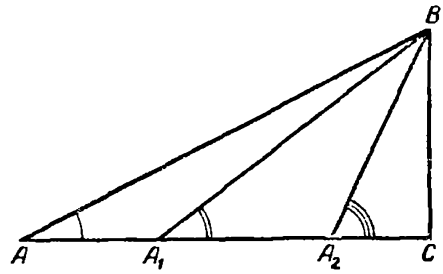


Рис 44.

Но стоит только изменить угол A, и сразу же изменится величина указанных отношений.

В самом деле, рассмотрим изображенные на рисунке 44 прямоугольные треугольники ABC, A_1BC и A_2BC с общим катетом BC, но неравными противолежащими этому катету острыми углами;

$$\sphericalangle BAC < \sphericalangle BA_1C < \sphericalangle BA_2C. \qquad (*)$$

Отметим, что:

1. $BC = BC = BC$ (совпавшие катеты трех треугольников),

2. $AB > A_1B > A_2B$ (по свойству наклонных, проведенных к одной прямой AC из одной точки B).

Разделим почленно соотношение 1 на 2, получим неравенство:

3. $\frac{BC}{AB} < \frac{BC}{A_1B} < \frac{BC}{A_2B}$

(из двух дробей с положительными членами и равными числителями больше та, у которой меньше знаменатель).

Сопоставляя это неравенство с неравенством (*), видим, что с увеличением угла в прямоугольном треугольнике увеличивается и отношение противолежащего катета к гипотенузе, и наоборот, с уменьшением этого угла рассматриваемое отношение уменьшается.

Следует заметить, что указанная связь в прямоугольном треугольнике между острым углом и отношением противолежащего ему катета к гипотенузе была открыта и практически использована еще в V в. индусским математиком Ариабхата (476 г. н. э.).

Отношению противолежащего катета к гипотенузе он дал особое название ardhajya — ардхжиа (полухорда), которое европейцы перевели в XII в. на латинский язык словом «синус».

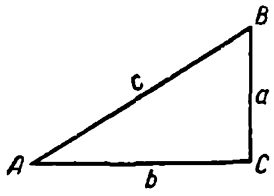


Рис. 45.

Итак, дадим определение.

Определение. *Во всяком прямоугольном треугольнике отношение катета, противолежащего данному углу, к гипотенузе называют синусом этого угла.*

Это коротко записывают так (см. рис. 45):

$$\frac{a}{c} = \sin A, \qquad (5)$$

где знак sin является сокращением слова sinus.

Пример 1. В так называемом египетском треугольнике катет $a = 3$ единицам, катет $b = 4$ единицам, гипотенуза $c = 5$ единицам.

Обозначим углы, лежащие против катетов a и b, соответственно буквами A и B. тогда по данному определению синуса будем иметь:

$$\sin A = \frac{3}{5} = 0{,}6; \qquad \sin B = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Пример 2. Выше в § 5 (стр. 35) мы установили, что в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c и острым углом $A = 30°$ противолежащий этому углу катет $a = \frac{1}{2}c$, а прилежащий $b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, следовательно, по определению синуса имеем:

$$\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Заметив, что другой острый угол в таком треугольнике $B = 60°$, находим;

$$\sin 60° = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660.$$

Из определений синуса острого угла и проведенных выше рассуждений можно сделать следующие выводы:

1) синус всякого острого угла меньше единицы, так как во всяком прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы;

2) равные острые углы имеют равные синусы; большему острому углу соответствует больший синус, т. е. с увеличением острого угла увеличивается и его синус.

Следует, однако, заметить, что прямой пропорциональной зависимости между углом и его синусом нет. Сопоставляя, например, значения синусов углов в 30° и 60°, замечаем, что $30° : 60° = 1 : 2 = 0{,}5$, а $\sin 30° : \sin 60° = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 : \sqrt{3} = 1 : 1{,}732\ldots = 0{,}57\ldots$ видим, что $0{,}5 \neq 0{,}57\ldots$;

3) величина острого угла вполне определяется его синусом; если задан синус угла, то можно построить и сам угол.

Пусть, например, дан $\sin A = \frac{3}{4}$.

Для построения угла A возьмем произвольный прямой угол MCN (рис. 46), отложим на одной из его сторон от вершины отрезок $CB = 3$ единицам (произвольного масштаба); из точки B опишем дугу радиусом $R = 4$ единицам (того же масштаба) до пересечения в точке A с другой стороной угла. Проводим прямую AB, получаем искомый угол A. Действительно, по определению синуса имеем:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}.$$

Постройте сами угол A, если дан $\sin A = 0{,}7$;

4) синус острого угла есть функция этого угла. В самом деле, острый угол A и его синус суть две величины, к которым подходит определение функции (стр. 50), так как каждому значению величины угла A соответствует определенное значение $\sin A$. Чтобы найти это значение синуса, достаточно построить прямоугольный треугольник

с углом A, и взять в нем отношение катета, лежащего против угла A, к гипотенузе.

Пусть, например, дан острый угол $MAN = A$ (рис. 47). Чтобы найти синус этого угла, возьмем на его стороне AM произвольную точку B и опустим из нее на другую сторону перпендикуляр BC, тогда отношение $\frac{BC}{AB} = \sin A$.

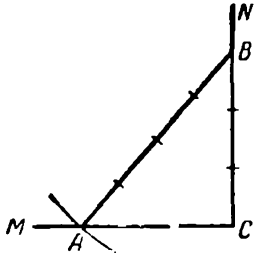


Рис. 46.

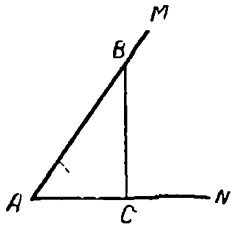


Рис. 47.

Если окажется, например, $BC = 17$ *мм*, $AB = 20$ *мм*, то будем иметь:

$$\sin A = \frac{17}{20} = 0{,}85.$$

Теперь можно было бы перейти к решению различных практических задач с помощью синуса. Однако предварительно мы рассмотрим еще одну функцию острого угла, часто употребляемую на практике.

§ 11. Косинус острого угла

В предыдущем параграфе мы установили зависимость в прямоугольном треугольнике между острым углом и отношением противолежащего ему катета к гипотенузе.

Несколько иная зависимость имеет место в прямоугольном треугольнике между острым углом и отношением прилежащего (к нему) катета к гипотенузе. Изучение этой зависимости начнем также с рассмотрения рисунка 14 (стр. 27), на котором изображены прямоугольные треугольники ABC, AB_1C_1, AB_2C_2, ..., с одним и тем же острым углом A.

Так как эти треугольники подобны, то в каждом из них отношение катета, прилежащего к углу A, к гипотенузе имеет одну и ту же величину:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \ldots = \frac{AC_n}{AB_n} = \ldots$$

Но стоит только изменить угол A, и сразу же изменится величина этих отношений.

В самом деле, рассмотрим изображенные на рисунке 15 (стр. 28) прямоугольные треугольники ACB, ACB' и ACB'' с общим катетом AC, прилежащим к неравным острым углам:

$$\sphericalangle CAB < \sphericalangle CAB' < \sphericalangle CAB''. \qquad (*)$$

Отметим, что:

1. $AC = AC = AC$ (совпавшие катеты трех треугольников).

2. $AB < AB' < AB''$ (по свойству наклонных, проведенных из одной точки A к одной прямой CB''). Разделим почленно (1) на (2), получим следующее неравенство:

3. $\frac{AC}{AB} > \frac{AC}{AB'} > \frac{AC}{AB''}$ (из двух дробей с положительными членами и равными числителями та больше, у которой знаменатель меньше).

Сопоставляя это неравенство с неравенством (*), приходим к выводу, что с увеличением угла в прямоугольном треугольнике отношение к гипотенузе катета, прилежащего к рассматриваемому углу, уменьшается, и наоборот, с уменьшением этого угла рассматриваемое отношение увеличивается.

Определение. *Во всяком прямоугольном треугольнике отношение катета, прилежащего к острому углу, к гипотенузе называют косинусом этого угла.*

Это принято записывать короче так (см. рис. 45):

$$\frac{b}{c} = \cos A, \qquad (6)$$

где знак cos является сокращением слова cosinus[1].

Пример 1. Как уже говорилось, в египетском треугольнике гипотенуза $c = 5$ единицам, катет $a = 3$ единицам и катет $b = 4$ единицам.

---

[1] Слово cosinus само представляет сокращенную запись двух слов: complementi (комплементи—дополнительный) и sinus. Причина такого названия объяснена в следующем параграфе

Если к катету a прилежит угол B, а к катету b— угол A, то будем иметь:

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0{,}8; \qquad \cos B = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Пример 2. Выше (в § 5) мы установили, что в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c и острым углом $A = 30°$, прилежащий к этому углу катет $b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, а противолежащий $a = \frac{1}{2}c$. Следовательно, применив к этому треугольнику определение косинуса, будем иметь:

$$\cos 30° = \frac{\frac{1}{2}c\sqrt{3}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660;$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Из определения косинуса острого угла и проведенных выше рассуждений можно сделать следующие выводы:

1) косинус всякого острого угла меньше единицы. так как во всяком прямоугольном треугольнике катет меньше гипотенузы;

2) равные острые углы имеют равные косинусы; большему острому углу соответствует меньший косинус, т. е. с увеличением острого угла его косинус уменьшается.

Следует также заметить, что между углом и его косинусом нет обратной пропорциональной зависимости. Например,

$$\cos 30° : \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} : 1 = 1{,}73\ldots;$$

$$30° : 60° = 1 : 2 = 0{,}5.$$

Следовательно, угол возрос в 2 раза, а косинус уменьшился только в отношении 1,73...;

3) величина острого угла вполне определяется его косинусом; если задан косинус угла, то можно построить и сам угол.

Постройте сами угол A, если, например, $\cos A = 0{,}35$;

4) косинус острого угла есть функция этого угла.

В самом деле, острый угол A и его косинус суть две величины, к которым подходит определение функции, так как каждому значению величины A соответствует опре-

деленное значение $\cos A$. Чтобы найти это значение косинуса, достаточно построить прямоугольный треугольник с углом A, как это мы делали для синуса (см. рис. 47), и взять в нем отношение прилежащего к углу A катета к гипотенузе. Тогда получим:

$$\frac{AC}{AB} = \cos A.$$

Если, например, $AC = 11$ *мм* и $AB = 20$ *мм*, то

$$\cos A = \frac{11}{20} = 0{,}55.$$

Решим следующую задачу:

Лестница длиной $l \approx 7{,}5$ *м* приставлена к стене так, что ее нижний конец удален от стены на расстояние $a \approx 2{,}5$ *м*. Какой угол образует лестница с плоскостью пола?

Р е ш е н и е. Обозначим искомый угол через A, тогда по определению косинуса будем иметь:

$$\cos A = \frac{a}{l} \approx \frac{2{,}5}{7{,}5} = \frac{1}{3}.$$

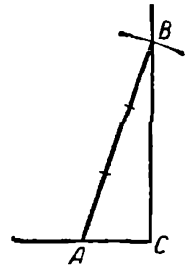


Рис. 48.

Строим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $AB = 3$ единицам произвольного масштаба и катетом $AC = 1$ того же масштаба (рис. 48). Угол A и будет искомым. Измерив его транспортиром, получаем $A \approx 71°$.

§ 12. Построение и чтение таблицы синусов и косинусов острых углов

В предыдущем параграфе было показано, как построением найти угол, если известен его синус или косинус.

Однако никаких построений производить не потребовалось бы, если бы у нас была таблица синусов или косинусов острых углов.

Первые такие таблицы были составлены еще в V в. н. э. индусским астрономом Ариабхата, а в IX в. в переработанном виде такая таблица вышла из-под пера узбекского выдающегося математика Мухаммеда бен-Мусы из Хорезма.

Таблицу синусов и косинусов двузначной точности вы можете составить сами путем аккуратного построения и измерения прямоугольных треугольников с различными острыми углами, т. е. так же, как мы составляли таблицу тангенсов (см. § 6).

С более совершенными вычислительными методами составления таких таблиц мы познакомимся в дальнейшем.

Следует заметить, однако, что между синусом и косинусом острых углов существует такая зависимость, которая избавляет нас от необходимости составления двух отдельных таблиц, так как таблица синусов может служить одновременно и таблицей косинусов.

В самом деле, по определению синуса и косинуса острых углов A и B в прямоугольном треугольнике ABC (см. стр.52, рис. 45) можно записать:

$$\cos A = \frac{b}{c}, \qquad \sin B = \frac{b}{c},$$

откуда $\cos A = \sin B$. Но $B = 90° - A$, следовательно,

$$\cos A = \sin(90° - A),$$

т. е. косинус любого острого угла равен синусу дополнительного угла, и наоборот. Например:

$$\cos 60° = \sin 30°,$$
$$\cos 27° = \sin 63°.$$

Это соотношение и послужило основанием образования слова cosinus — косинус, состоящего из двух слов: complementi — дополнение sinus (compl. sinus—cosinus—cos), т. е. дополнительный синус (синус угла, дополняющего до 90°).

На странице 95 этой книги дана трехзначная таблица синусов острых углов с шагом в 1°, которая является одновременно и таблицей косинусов острых углов.

Каждая строка этой таблицы содержит два угла, дополняющих друг друга до 90°, а между ними число, которое является синусом угла, напечатанного слева, и косинусом угла, напечатанного справа. Такое расположение возможно благодаря тому, что у дополнительных углов синус и косинус имеет одно и то же значение.

Например, в 14-й строке читаем слева 14°, в середине 0,242, а справа 76°, следовательно,

$$\sin 14° \approx 0{,}242 \approx \cos 76°.$$

Чтобы не спутать, что число 0,242 является $\sin 14°$ и $\cos 76°$, а не наоборот, пишут сверху таблицы слово «синусы», а снизу — «косинусы» и помнят, что надпись «синусы» относится только к углам левого столбца, а «косинусы»—к углам правого столбца.

Четырехзначная таблица синусов углов с шагом в 6′, являющаяся одновременно и таблицей косинусов углов, имеется в сборнике математических таблиц В. Брадиса. Эта таблица устроена и читается точно так же, как и четырехзначная таблица тангенсов, описанная в § 5, поэтому на ее объяснении мы здесь не останавливаемся.

Упражнения.

1. Не пользуясь таблицей, найти синус и косинус угла в 45°.

2. Катет прямоугольного треугольника относится к гипотенузе, как 1 к 2,4. Найти синусы и косинусы острых углов треугольника.

3. Проекция отрезка на прямую равна $\frac{1}{n}$ длины отрезка. Чему равен косинус угла, образованного отрезком с прямой?

Найти этот угол: 1) построением; 2) с помощью таблицы для $n = 2, 3, 4, 10$.

4. Найти по таблице: $\sin 12°42'$, $\sin 0°53'$, $\cos 45°18'$, $\cos 10°27'$.

5. Найти по таблице угол A, если:

1) $\sin A = 0{,}2504$; 3) $\cos A = 0{,}9033$;

2) $\sin A = 0{,}7590$; 4) $\cos A = 0{,}0042$;

5) $\sin A = 0{,}3000$.

6. Доказать, что сумма синусов (косинусов) двух острых углов всякого прямоугольного треугольника больше единицы, но меньше двух.

7. Откос насыпи полотна железной дороги 15,2 *м*, а высота насыпи 9,3 *м*. Какой угол составляет откос с горизонтальной плоскостью?

8. Катер, делающий в среднем 15 *км* в час, должен пересечь реку по перпендикулярному к берегам направлению. Какое направление надо придать корпусу катера, если скорость течения воды в реке равна 2,5 *м* в секунду?

9. Для удобства загрузки силосной башни (рис. 49) к ее верхней части на высоту 3,7 *м* устроили наклонный подъезд длиной 21 *м*. Найти угол подъема этого подъезда.

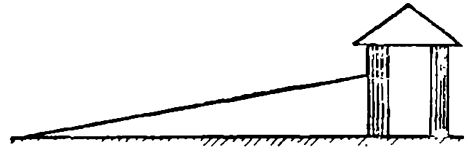


Рис. 49.

10. К стене надо приделать полку для книг на кронштейнах (подпорах). Какой длины следует взять подпору a (рис. 50), чтобы ее наклон к стене был равен 40°, если ширина полки $b \approx 17{,}5$ *см*?

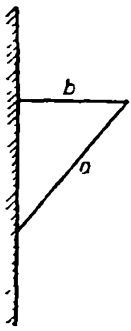


Рис. 50.

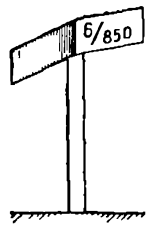


Рис. 51.

11. Телеграфный столб высотой 9,0 *м* надо закрепить железным тросом, образующим с поверхностью грунта угол в 50°. Какой длины надо взять трос, если он прикрепляется к столбу на расстоянии $\frac{2}{3}$ высоты столба, считая от поверхности земли? Поверхность грунта горизонтальна.

12. Вдоль железнодорожного полотна ставятся указатели уклона. На рисунке 51 изображен такой указатель с двумя числами 6 и 850. Первое число показывает, что угол уклона пути (угол между плоскостью полотна и горизонтальной плоскостью) имеет тангенс 0,006, а второе число дает в метрах длину участка пути с таким уклоном. Выразить данный уклон в градусах. Определить, на какую высоту поднялся поезд, прошедший 730 *м* по данному участку пути.

§ 13. Применение синуса и косинуса при косвенных измерениях иедоступных углов и расстояний

Возможность косвенных измерений углов и отрезков с помощью синуса и косинуса усматривается в самих определениях этих функций.

В самом деле, искомый острый угол A принадлежит некоторому треугольнику ABC (рис. 45), у которого можно измерить гипотенузу[1] c и один из катетов a или b, то по определению синуса и косинуса найдем:

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \text{или} \quad \cos A = \frac{b}{c}. \qquad (5;\ 6)$$

Зная синус или косинус угла A, мы можем по таблице найти и сам угол.

Если же искомыми являются катеты прямоугольного треугольника ABC, недоступные для непосредственного измерения, а гипотенузу треугольника и один из острых

[1] Читатель не должен забывать, что здесь говорится о возможности измерения сторон не того треугольника, который изображен на рисунке 45 (на рисунке передана лишь условная модель-схема треугольника, которая помогает нам выяснить условие задачи), а такого треугольника, который по условию задачи находится, например, где-то на местности так, что некоторые его стороны и углы действительно не могут быть измерены или такое измерение связано с большими затруднениями.

углов можно измерить, то на основании тех же формул (5) и (6) получим:

$$a = c \sin A \quad \text{и} \quad b = c \cos A. \qquad (7;\ 8)$$

Эти формулы так часто употребляются на практике, что их полезно запомнить. Читаются они так: *в прямоугольном треугольнике любой катет равен гипотенузе, умноженной на синус противолежащего ему угла или на косинус прилежащего угла.*

Наконец, если возможно непосредственное измерение острого угла прямоугольного треугольника и одного из катетов, то гипотенузу можно найти вычислением, используя те же формулы (7; 8), из которых получаем:

$$c = \frac{a}{\sin A} \quad \text{или} \quad c = \frac{b}{\cos A}.$$

Рассмотрим несколько примеров, где косвенные измерения недоступных углов и расстояний осуществляются с помощью синуса и косинуса.

1. На рисунке 52 изображены две прямые дороги MN и PQ, пересекающиеся где-то за лесом в недоступном для нас пункте X. Требуется определить расстояние от некоторого пункта A, расположенного на дороге MN, до пункта X, а также найти угол, под которым пересекаются дороги.

Решение данной задачи можно провести следующим образом.

Выберем на дороге PQ точку B так, чтобы возможно было измерить расстояние от A до B и определить углы BAN и ABQ.

Пусть оказалось $AB = l$ (*м*), $\sphericalangle BAN = \alpha$ и $\sphericalangle ABQ = \beta$. Искомый угол пересечения дорог обозначим через x. Применив к треугольнику ABX теорему о сумме углов, получим:

$$x = 180° - (\alpha + \beta).$$

Здесь может быть три случая:

1) $\alpha + \beta > 90°$, тогда угол x — острый (рис. 52 и 52,*а*);

2) $\alpha + \beta = 90°$, тогда угол x — прямой (рис. 52, *б*);

3) $\alpha + \beta < 90°$, тогда угол x — тупой (рис. 53 и 53, *а*).

В каждом из этих случаев в треугольнике ABX проведем мысленно высоту AC из вершины A.

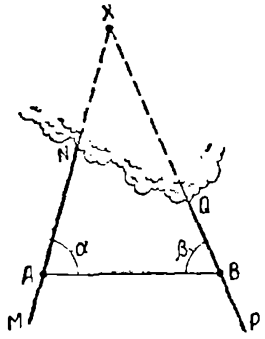


Рис. 52.

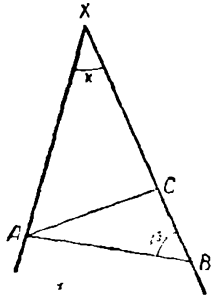


Рис. 52, *а*.

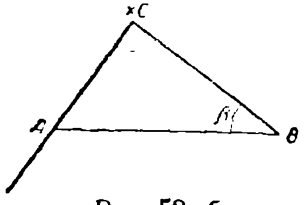


Рис. 52, *б*.

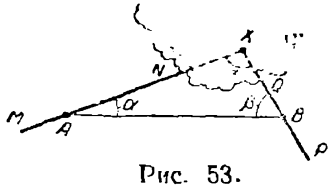


Рис. 53.

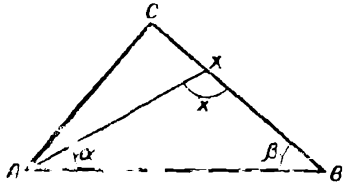


Рис. 53, *а*.

При этом в первом случае (рис. 52, *а*) выделится прямоугольный треугольник ABC, из которого по определению синуса имеем:

$$\frac{AC}{AB} = \sin B, \text{ откуда } AC = AB \cdot \sin B = l \sin \beta.$$

Из прямоугольного треугольника ACX имеем:

$\frac{AC}{AX} = \sin x$, откуда искомое расстояние

$$AX = \frac{AC}{\sin x} = \frac{l \sin \beta}{\sin[180° - (\alpha + \beta)]}.$$

Пусть, например, действительные измерения дали:

$l \approx 1{,}24$ *км*, $\alpha \approx 83°00'$ и $\beta \approx 55°30'$, тогда

$$x \approx 180° - (83°00' + 55°30') = 41°30';$$

$$AC \approx 1{,}24 \cdot \sin 55°30' \approx 1{,}022 \approx 1{,}02 \text{ (км)}.$$

$$AX \approx \frac{1{,}022}{\sin 41°30'} \approx 1{,}54 \text{ (км)}.$$

Во втором случае угол $x = 90°$, следовательно, точка C совпадает с точкой X (рис. 52,*б*), а поэтому

$$AX = AC = l \sin \beta.$$

В третьем случае, когда угол $x > 90°$ (рис. 53 и 53, *а*), в прямоугольном треугольнике ACX острый угол AXC будет равен $180° - x$, как смежный с углом AXB поэтому

$$\frac{AC}{AX} = \sin (180° - x).$$

Но $180° - x = \alpha + \beta$, следовательно, $\frac{AC}{AX} = \sin(\alpha + \beta)$.

Откуда $AX = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{l \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Так, при $l \approx 1{,}24$ *км*, $\alpha \approx 20°10'$ и $\beta \approx 61°30'$ имеем: $x \approx 180° - (20°10' + 61°30') = 98°20' > 90°$, следовательно,

$$AX \approx \frac{1{,}24 \cdot \sin 61°30'}{\sin 81°40'} \approx 1{,}10 \ (км).$$

Примечание. Может случиться, что местность между дорогами MN и PQ непроходима (например, заболочена) и, следовательно, расстояние AB нельзя изме-

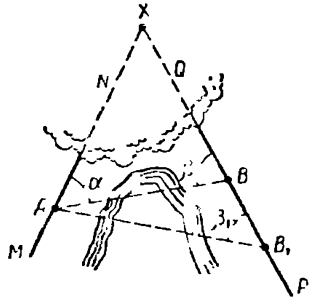


Рис. 54.

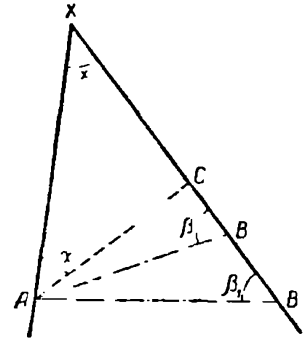


Рис. 54, *а*.

рить. Если при этом пункт A возможно видеть хотя бы из двух мест B и B_1 на дороге PQ и можно тем или иным путем пройти в пункт A для измерения угла $BAN = \alpha$, то задача может быть решена и при таких условиях. А именно: измеряют расстояние $BB_1 = a$ (рис. 54) и углы $ABQ = \beta$ и $AB_1Q = \beta_1$.

По этим данным находят высоту AC в треугольнике ABX (рис. 54, *а*) (см. формулу, полученную при решении аналогичной задачи 1 в § 8):

$$AC = \frac{a \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta_1}.$$

Далее задача решается, как в предшествующих случаях.

2. Еще в III в. до н. э. греческий математик и астроном Аристарх Самосский высказал гипотезу, что Земля имеет форму шара. Основываясь на этой гипотезе,

греческий ученый Эратосфен (276—196 гг. до н. э.) нашел радиус Земли, равный $50 \cdot 10^3$ стадиям (мера длины в древней Греции).

Радиус Земли можно найти следующим путем.

С горы AB высотой h *м* определяют угол понижения горизонта $MAK = \alpha$ (рис. 55), где MA — перпендикуляр к отвесной линии. AO и AK — линия горизонта, т. е. касательная к кругу, представляющему сечение земного шара плоскостью по отвесной линии AO. Треугольник AKO прямоугольный, так как $OK \perp AK$ как радиус круга, проведенный в точку касания. Обозначим радиус земного шара через R, тогда гипотенуза $OA = R + h$. Из треугольника AKO находим:

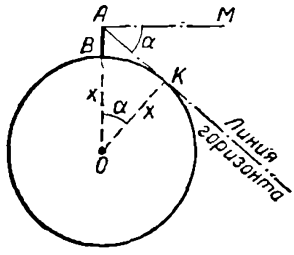


Рис. 55.

$$\frac{OK}{OA} = \cos KOA.$$

Но катет $OK = R$, $\sphericalangle KOA = \sphericalangle MAK$ как углы со взаимноперпендикулярными сторонами, следовательно, полученное равенство можно запись так:

$$\frac{R}{R+h} = \cos\alpha, \quad \text{откуда } R = \frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Так, с гор побережья Черного моря у Гагр с высоты над уровнем моря, равной 1,8 *км*, измерили угол понижения горизонта $\alpha \approx 1°24'$ и нашли:

$$R \approx \frac{1{,}8 \cdot \cos 1°24'}{1-\cos 1°24'} \approx \frac{1{,}8 \cdot 0{,}9997}{0{,}0003} \approx \frac{0{,}59998}{0{,}0001} \approx \frac{0{,}6}{0{,}0001} =$$

$$= 6000 \text{ км} = 6 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Более точные измерения показали, что радиус Земли неодинаков всюду: так, радиус экватора 6378 *км*, а наименьший радиус меридиана 6357 *км*; это показывает, что Земля не вполне шар, ее форма ближе к форме эллипсоида. При вычислениях принимают средний радиус Земли

$$R_{\text{сред}} = \frac{6378+6357}{2} \approx 6370 \text{ км}.$$

3. Зная радиус земного шара, можно определить расстояние от Земли до других планет, и в частности до спутника нашей планеты — Луны.

Для этого отмечают на земном меридиане, плоскость которого проходит через центр Луны L (рис. 56), два пункта K_1 и K_2, из которых одновременно Луна видна на горизонте, а затем определяют широту каждого из этих пунктов.

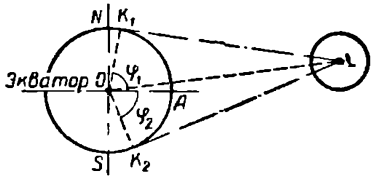


Рис. 56.

Широта пункта K (рис. 57) равна дуге меридиана AK или (что то же самое) центральному углу $AOK = \varphi°$, который стягивает эту дугу и измеряется одним и тем же с ней числом градусов. В северном полушарии этот угол оказывается равным высоте Полярной звезды над горизонтом, т. е. углу MKP, где MK — линия горизонта (касательная в точке K), а KP — направление на Полярную звезду P. В самом деле, Полярная звезда P находится почти на продолжении земной оси ON, следовательно, в силу ее чрезвычайно большой отдаленности[1] можно считать, что направления на нее из центра Земли O и из точки K параллельны между собой. Но $OP \perp OA$ и $MK \perp OK$, следовательно, $\sphericalangle AOK = \sphericalangle MKP$, как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

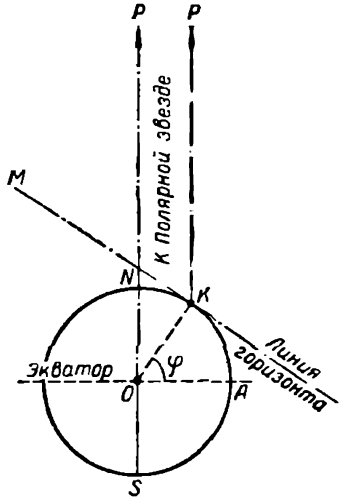


Рис. 57.

На рисунке 58 видно, как практически с помощью школьного транспортира производится определение высоты Полярной звезды, т. е. широты данного места.

Определив широты φ_1 и φ_2 тех мест K_1 и K_2, в которых наблюдали Луну на горизонте, легко найти центральный угол K_1OK_2; он измеряется суммой дуг AK_1 и AK_2, а потому равен сумме широт $\varphi_1 + \varphi_2$ (см. рис. 56).

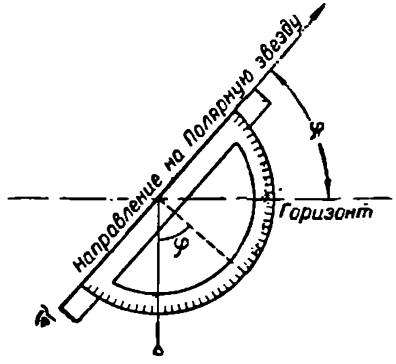


Рис. 58.

[1] Луч света от Полярной звезды доходит до нас за 4,2 года со скоростью $300 \cdot 10^3$ км в секунду.

Фактические измерения показывают, что сумма широт пунктов наблюдения K_1 и K_2 равна около 178°6 следовательно, $\measuredangle K_1OK_2 \approx 178°6'$.

Так как из пунктов K_1 и K_2 Луна видна на горизонте, то прямые K_1L и K_2L являются касательными к меридианному кругу, а потому треугольники OK_1L и OK_2L имеют при вершинах K_1 и K_2 прямые углы. Гипотенуза OL у этих треугольников общая, а катеты OK_1 и OK_2 равны между собой как радиусы земного шара, следовательно, равны и сами треугольники, а поэтому $\measuredangle K_1OL = \measuredangle K_2OL \approx 89°3'$.

Но в треугольнике OK_1L отношение $\frac{OK_1}{OL} = \cos 89°3'$. следовательно, искомое расстояние между центрами Земли и Луны

$$OL = \frac{OK_1}{\cos 89°3'} \approx \frac{6370}{\cos 89°3'} \approx \frac{6370}{0{,}0166} \approx 384 \cdot 10^3 \ (км).$$

4. Зная расстояние до какой-нибудь планеты, можно найти диаметр этой планеты. Для этого достаточно определить угол видимости данной планеты с Земли.

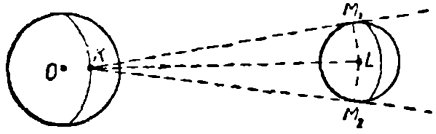


Рис. 59.

Например, измерения показывают, что Луна видна с Земли под углом $M_1KM_2 \approx 0°31'$ (рис. 59), где K — пункт, в котором производилось наблюдение; $M_1L = LM_2$ — радиусы Луны, проведенные в точки касания. Так как прямоугольные треугольники KM_2L и KM_1L равны, то

$$\measuredangle M_1KL = \measuredangle M_2KL \approx 15'30''.$$

Из треугольника KM_1L имеем:

$$\frac{M_1L}{KL} = \sin M_1KL \quad \text{или} \quad M_1L \approx KL \cdot \sin 15'30''.$$

Но расстояние $KL \approx OL \approx 384 \cdot 10^3$ (км), следовательно, радиус Луны $M_1L \approx 384 \cdot 10^3 \cdot \sin 15'30'' \approx 178 \cdot 10$ (км).

Аналогично находятся расстояния от центра Земли до центров Солнца, Марса, Юпитера и т. д., а также радиусы Солнца и планет.

Упражнения.

1. На какую высоту надо подняться над Москвой, чтобы был виден в подзорную трубу город Калинин, зная, что расстояние от Москвы до Калинина 160 *км*.

2. Найти длину параллелей земного шара для различных широт φ, например, для $\varphi = 60°$ — широта Ленинграда, для $\varphi = 56°$ — широта Москвы, для $\varphi = 66°30'$ — Полярный круг, а также длину параллели, соответствующей вашей местности.

3. Определите диаметр Солнца, видимого с Земли под углом $\alpha \approx 31'$, если известно, что расстояние от Земли до Солнца равно $149 \cdot 10^6$ *км*.

4. Для определения направления скорости ветра в верхних слоях атмосферы с аэродрома пустили шар-пилот диаметром 1,5 *м*. На каком наименьшем расстоянии от наблюдателя шар станет невидимым для невооруженного глаза, если предельный угол видимости равен $1'$?

5. Подвесная канатная горная дорога имеет в длину 3380 *м* при среднем подъеме в 29°. Определить разницу высот над уровнем моря у начала и конца дороги.

6. Поперечное сечение железнодорожной насыпи имеет форму равнобочной трапеции, у которой верхнее основание равно 2,9 *м*, боковая сторона равна 8,0 *м* и наклонена к основанию под углом в 42°. Определить высоту насыпи и ее ширину у подножия.

7. Прямоугольное здание, измерения которого равны 20 *м* и 25 *м*, требуется покрыть крышей с наклоном 40°. Определить величину поверхности этой крыши в квадратных метрах, если известно, что края крыши отступают от стен на полметра.

8. Две прямые дороги пересекаются под угом в 47°. На одной из этих дорог в $6\frac{1}{2}$ *км* от перекрестка находится пункт, из которого хотят проложить кратчайший путь до другой дороги. Какой длины будет этот путь?

9. Для изготовления крышки цилиндра паровой машины из листового железа вычерчивают на листе железа две концентрические окружности; по внешней из этих окружностей вырезывают (с помощью автогена) крышку, а на внутренней окружности делают разметку для высверливания отверстий, вычислив предварительно расстояния между центрами отверстий. Сделайте такие вычисления при условии, что диаметр внутренней окружности равен 180 *мм* и на ней надо отметить центры для 5 отверстий на одинаковых расстояниях.

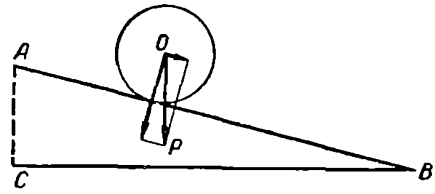


Рис. 60.

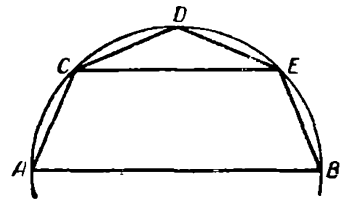


Рис. 61.

10. Из круглого (цилиндрического) железного прута диа-

метром в 2,0 дюйма желают выфрезеровать правильную восьмиугольную призму наибольшего сечения. Определить размеры поперечного сечения призмы и процент железа, уходящего в стружку.

11. Бочка с керосином весом в 140 *кг* должна быть удержана на плоскости, наклоненной к горизонтальной плоскости под углом 14°30′ (рис. 60). Какую силу надо приложить к бочке по направлению наклонной плоскости, чтобы удержать бочку? (Силу трения не учитывать.)

Указание. Силу $OP \approx 140$ *кг* надо разложить на две составляющие силы, одна из которых направлена перпендикулярно плоскости AB, а другая параллельна этой плоскости. Последняя из этих составляющих будет равна искомой силе.

12. Простейший способ проектирования мансардной кровли состоит в следующем: на отрезке AB, изображающем ширину перекрытия (рис. 61), описывают полуокружность, делят ее на четыре равные части и точки деления C, D и E соединяют прямыми линиями, как показано на рисунке. Какую длину будут иметь скаты кровли AC и CD и «затяжка» CE и каковы углы наклона кровли, если ширина перекрытия $AB \approx 11{,}5$ *м*?

ГЛАВА IV

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

§ 14. Графический и вычислительный методы решения геометрических задач и их достоинства и недостатки

В начале книги мы уже обращали внимание на недостатки графического метода решения геометрических задач и достоинства вычислительного метода. Для сравнительной оценки этих методов рассмотрим еще одну задачу, встречающуюся в заводской практике при обточке цилиндрических валов «на конус».

Пусть требуется обточить «на конус» конец цилиндрического вала диаметром $D \approx 154{,}2$ *мм* (рис. 62) так, чтобы угол уклона конуса $\alpha \approx 8°30'$, а длина обточки $H \approx 270{,}0$ *мм*.

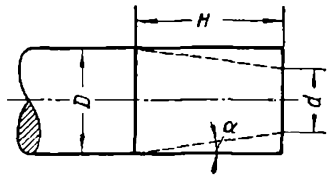


Рис. 62.

Чтобы установить вал на токарном станке для указанной обработки, надо знать, какой диаметр d будет иметь конец вала после его обточки. Найти этот диаметр можно графическим или вычислительным методом.

Графический метод

1) Выбрав подходящий масштаб, например $\frac{1}{10}$, строим на листе бумаги (лучше миллиметровой) осевое сечение обтачиваемой части вала. Это будет прямоугольник $ABCE$ (рис. 63) со сторонами:

$$AB = H' \approx 270{,}0 \cdot \frac{1}{10} = 27{,}00 \text{ (мм)},$$

$$BC = D' \approx 154{,}2 \cdot \frac{1}{10} = 15{,}42 \text{ (мм)}.$$

2) Затем с помощью транспортира строим $\sphericalangle BAB_1 = \sphericalangle CEC_1 = 8°30'$; фигура AB_1C_1E представляет изображение прежней части вала, после ее обточки отрезок B_1C_1 изображает искомый диаметр.

3) Измеряем отрезок B_1C_1, получаем: $B_1C_1 = d' \approx 7{,}5$ *мм*, следовательно, искомый диаметр $d \approx 7{,}5$ *мм* $\cdot 10 = 75$ *мм*.

Достоинством этого приема является то, что для решения задачи не потребовались никакие формулы и вычисления, причем в процессе решения схематически воспроизводилась форма искомой детали; недостатком является то, что результат решения получен с пониженной точностью, так как построение фигуры и последующее измерение искомого отрезка ведется приближенно, причем степень точности не вполне известна; кроме того, при малых углах конусности точность решения сильно понижается. В некоторых случаях графическое решение задач почти невозможно. Так, например, в рассмотренных нами ранее задачах на отыскание радиусов Земли и Луны и расстояния до Луны углы в соответствующих треугольниках столь малы, что их построение затруднительно даже с точностью одного знака.

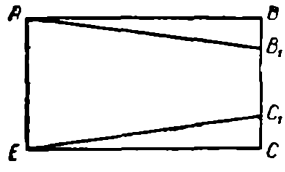


Рис. 63.

Вычислительный прием решения той же задачи

1) Используя рисунок 62, выражаем зависимость между данными и искомым:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{D-d}{2H},$$

откуда получаем формулу для определения искомого диаметра:

$$d = D - 2H \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

2) Подставив числовые данные, находим:

$$d \approx 154{,}2 - 2 \cdot 270{,}0 \cdot \operatorname{tg}8°30' \approx 154{,}2 - 540{,}0 \cdot 0{,}1495 \approx$$
$$\approx 154{,}2 - 80{,}73 \approx 73{,}5 \ (мм).$$

Достоинством этого приема является: а) общность решения задачи (выведенная формула пригодна для любых конкретных значений, входящих в нее величин D, H и α); б) известна точность результата (в рассмотренном примере она трехзначная); в) точность ответа зависит только от точности данных.

К недостаткам вычислительного приема следует отнести: а) необходимость вывода формулы, выражающей искомое через данные величины; б) необходимость выполнения вычислений по установленной формуле (причем в некоторых случаях то и другое требует много времени и усилий).

§ 15. Треугольник как элемент любой прямолинейной фигуры

В геометрии особенно большое внимание уделяется треугольнику. Подробно изучаются виды треугольников, признаки равенства и подобия, зависимость между различными элементами треугольника. Рассмотренные нами определения тригонометрических функций (тангенса, синуса и косинуса) и их приложения также связаны с треугольниками.

Чем же это объяснить? Ведь в практической жизни мы редко встречаемся с предметами, имеющими форму треугольника.

Как химик изучает в первую очередь элементы, а затем сложные вещества, как биолог сперва изучает живую клетку, а потом сложные организмы, так и математик в геометрии изучает в первую очередь простейшие элементы геометрических фигур — точки, отрезки и треугольники, из которых состоят все геометрические фигуры.

Среди простейших геометрических образов треугольник играет исключительную роль потому, что всякая сложная прямолинейная геометрическая фигура может быть разложена на треугольники, а умея находить угловые и линейные элементы треугольников, можно найти и все элементы сложной фигуры. Именно так мы поступали при изучении параллелограмма, трапеции, любого четырехугольника или многоугольника. Поэтому исторически и создалось специальное учение о треугольниках— треугольнико-измерение или по-латыни — тригонометрия.

А так как всякий треугольник может быть разбит одной из высот на два прямоугольных треугольника, элементы которых находятся в более простой зависимости, то исходным элементом при изучении прямолинейных фигур можно считать прямоугольный треугольник.

Следует отметить, что в строительной и технической практике широко используется еще одна особенность треугольника — жесткость его формы. Стержневые шарнирные четырехугольники и многоугольники легко деформируются, а треугольники такой деформации не поддаются. Вот почему при сооружении мостовых арок и перекрытий над зданиями делают многочисленные укосы, разбивающие всю конструкцию на сеть треугольников. Это особенно видно в конструкции подъемных кранов и опорных мачт электросети высоких напряжений.

§ 16. Вычислительный тригонометрический метод решения прямоугольных треугольников

«Решить треугольник» — это значит по известным элементам треугольника найти все его основные элементы, т. е. стороны и углы.

Из геометрии известно, что треугольник вполне определяется заданием трех его основных независимых элементов. Так как в прямоугольном треугольнике один элемент (прямой угол) уже известен, то для его решения достаточно знать еще два каких-нибудь независимых элемента.

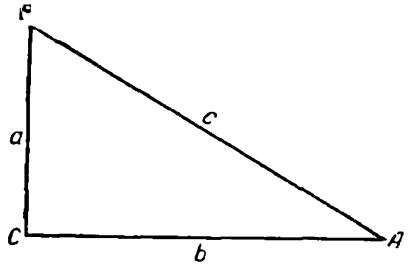


Рис. 64.

Задачи на решение прямоугольных треугольников можно разбить на следующие типы:

I. Известны сторона и острый угол:
   а) катет и острый угол;
   б) гипотенуза и острый угол.

II. Известны две стороны:
   а) два катета;
   б) катет и гипотенуза.

В каждой задаче требуется вычислить неизвестные основные элементы — стороны и углы.

При решении указанных задач будем пользоваться принятыми нами ранее (см. § 7) обозначениями a, b — катеты, A, B — противолежащие им углы, c — гипотенуза и C — прямой угол (рис. 64).

Для удобства приведем здесь сводку всех выведенных выше формул, выражающих зависимости между основными элементами в прямоугольном треугольнике:

$$a^2 + b^2 = c^2; \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a}; \tag{2}$$

$$a = b \operatorname{tg} A, \quad b = a \operatorname{tg} B; \tag{3}$$

$$a = \frac{b}{\operatorname{tg} B}, \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg} A}; \tag{4}$$

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \sin B = \frac{b}{c}; \tag{5}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c}; \tag{6}$$

$$a = c \sin A, \quad b = c \sin B; \tag{7}$$

$$a = c \cos B, \quad b = c \cos A; \tag{8}$$

$$A + B = 90^\circ. \tag{9}$$

Переходим к решению задач.

I. а) Известны: A, a; требуется найти: B, b, c.

Решение. 1) По формуле (9): $B = 90^\circ - A$;

2) по формуле (3): $b = a \cdot \operatorname{tg} B$;

3) по формуле (5): $c = \frac{a}{\sin A}$;

4) правильность расчетов можно проверить применением к результатам вычислений формулы (1).

Числовой пример. $a \approx 3{,}71$, $A \approx 19^\circ 30'$.

Решение. 1) $B \approx 90^\circ - 19^\circ 30' = \overline{70^\circ 30'}$;

2) $b \approx 3{,}71 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ 30' \approx 3{,}71 \cdot 2{,}824 \approx \overline{10{,}5}$;

3) $c \approx \frac{3{,}71}{\sin 19^\circ 30'} \approx \frac{3{,}71}{0{,}3338} \approx 11{,}1$.

Проверка. $a^2 + b^2 = 3{,}71^2 + 10{,}5^2 \approx 124{,}1$;

$c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx \sqrt{124{,}1} \approx 11{,}1$.

Следовательно, первые три цифры в результатах вычислений надежные, а большее число верных значащих цифр получить невозможно, так как данное $a = 3{,}71$ содержит лишь три значащих цифры.

I. б) Известны: A, c; требуется найти B, a, b.

Решение. 1) По формуле (9): $B = 90^\circ - A$;

2) по формулам (7) и (8): $a = c \cdot \sin A$, $b = c \cdot \cos A$.

Проверка результатов по формуле (1).

Числовой пример. $A \approx 32^\circ 20'$, $c \approx 18{,}2$.

Решение. 1) $B = 90^\circ - 32^\circ 20' = 57^\circ 40'$;

2) $a \approx 18{,}2 \cdot \sin 32^\circ 20' \approx 18{,}2 \cdot 0{,}5349 \approx 9{,}74$;

$b \approx 18{,}2 \cdot \cos 32^\circ 20' \approx 18{,}2 \cdot 0{,}8450 \approx 15{,}4$.

Проверка. $a^2 + b^2 \approx 9{,}74^2 + 15{,}4^2 \approx 332{,}1$;

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx \sqrt{332{,}1} \approx 18{,}2.$$

II. **а)** Известны: a, b; требуется найти: A, B, c.

Решение.

1) По формуле (2) находим $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$, а затем по таблице находим угол A;

2) по формуле (9) находим: $B = 90^\circ - A$;

3) по формуле (1): $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

4) для проверки возьмем формулу (8) $a = c \cdot \cos B$, так как она содержит искомые величины и при вычислениях не употреблялась в данной задаче.

Числовой пример. $a \approx 23{,}5$, $b \approx 40{,}2$.

Решение.

1) $\operatorname{tg} A \approx \frac{23{,}5}{40{,}2} \approx 0{,}5846$; по таблице находим угол $A \approx 30^\circ 18' \approx 30^\circ 20'$;

2) $B \approx 90^\circ - 30^\circ 18' \approx 59^\circ 42' \approx 59^\circ 40'$;

3) $c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx \sqrt{23{,}5^2 + 40{,}2^2} \approx 46{,}5$.

Проверка. $a \approx 46{,}5 \cdot \cos 59^\circ 42' \approx 46{,}5 \cdot 0{,}5045 \approx 23{,}5$.

II. **б)** Известны: a, c; требуется найти: A, B, b.

Решение.

1) По формуле (5): $\sin A = \frac{a}{c}$, а затем по таблице находим угол A;

2) по формуле (9): $B = 90^\circ - A$;

3) по формуле (7): $b = c \cdot \sin B$;

4) для проверки вычислений можно взять формулу (3)

$$a = b \cdot \operatorname{tg} A,$$

так как она содержит искомые величины и при вычислениях в задаче не употреблялась.

Числовой пример. $a \approx 6{,}35$, $c \approx 8{,}92$.

Решение: 1) $\sin A \approx \frac{6{,}35}{8{,}92} \approx 0{,}7119$; по таблице находим угол $A \approx 45^\circ 24' \approx 45^\circ 20'$;

2) $B \approx 90° - 45°24' = 44°36' \approx 44°40'$;

3) $b \approx 8{,}92 \cdot \sin 44°36' \approx 8{,}92 \cdot 0{,}7022 \approx 6{,}26$.

Проверка. $a \approx 6{,}26 \cdot \operatorname{tg} 45°24' \approx 6{,}26 \cdot 1{,}0141 \approx 6{,}35$.

Упражнения

1. Найти неизвестные стороны и углы в прямоугольных треугольниках, если даны:

1. $a \approx 12{,}0$, $A \approx 53°20'$.
2. $b \approx 3{,}9$, $A \approx 64°$.
3. $c \approx 25$, $A \approx 37°$
4. $c \approx 241$, $C \approx 29°50'$.
5. $a \approx 20$, $b \approx 21$.
6. $a \approx 88{,}0$, $b \approx 105$.
7. $a \approx 56$, $c \approx 65$.
8. $b \approx 2{,}85$, $c \approx 2{,}93$.

2. Основание равнобедренного треугольника равно 25 *см*, высота на боковую сторону — 21 *см*. Найти боковую сторону и угол при вершине.

3. Сторона ромба $a \approx 64{,}5$ *см*, угол $\alpha \approx 28°30'$. Определить его диагонали.

4. В круге радиуса $R \approx 225$ *м* дана хорда $l \approx 325$ *м*. Как велик соответствующий этой хорде центральный угол α?

5. Определить угол α между касательными к кругу радиуса $R \approx 15$ *см*, проведенными из точки P, удаленной от центра на расстоянии 33 *см*.

§ 17. Решение любых треугольников через сведéние к решению прямоугольных треугольников

Если в треугольнике ABC (рис. 65, *а*, *б*) провести высоту AD, то образуются два прямоугольных треугольника ABD и ACD. Оказывается, решение треуголь-

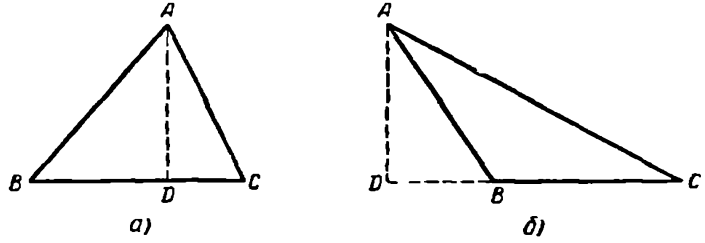


Рис. 65.

ника ABC всегда возможно свести к «совместному» решению этих двух прямоугольных треугольников. Мы покажем, как это делается на ряде примеров, охватывающих все четыре основных типа задач на решение треугольников любого вида, а именно:

I. Решение треугольника по стороне и двум углам.

II. Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

III. Решение треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из этих сторон.

IV. Решение треугольника по трем сторонам.

Чтобы сократить запись, будем в дальнейшем обозначать углы треугольника ABC буквами A, B и C, а противолежащие им стороны буквами a, b и c.

Задачи I типа

Пример. Даны: $A \approx 103°00'$, $B \approx 54°30'$, $a \approx 28{,}5$.

Найти: C, b, c.

Решение. Изобразим от руки какой-нибудь треугольник ABC с тупым углом при вершине A (рис. 66).

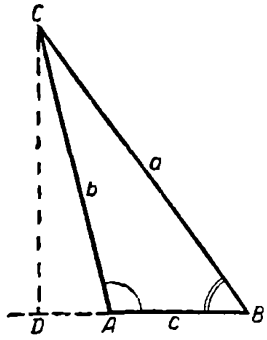


Рис. 66.

Из геометрии известно, что $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$, следовательно, $\measuredangle C = 180° - (\measuredangle A + \measuredangle B) \approx \approx 180° - (103°00' + 54°30') = 22°30'$.

Для определения сторон b и c проведем в треугольнике ABC высоту CD из вершины C; ее основание D упадет на продолжение стороны AB за вершину угла A, так как угол A тупой.

Сторона b служит гипотенузой прямоугольного треугольника ACD, следовательно, $b = AC = \dfrac{CD}{\sin CAD}$.

Но CD есть катет прямоугольного треугольника CBD, в котором известна гипотенуза a и острый угол B, поэтому $CD = a \cdot \sin B \approx 28{,}5 \cdot \sin 54°30' \approx 28{,}5 \cdot 0{,}8141 \approx \approx 23{,}20$.

Угол $CAD = 180° - A \approx 180° - 103°00' = 77°00'$, следовательно, $b = \dfrac{23{,}20}{\sin 77°00'} \approx \dfrac{23{,}20}{0{,}9744} \approx 23{,}8$.

Сторона $c = AB = DB - DA$.

Но DB — катет треугольника DBC, DA — катет треугольника CAD, следовательно,

$$DB = a \cdot \cos B, \quad DA = b \cdot \cos (180° - A);$$

$$c = a \cdot \cos B - b \cdot \cos (180° - A) \approx 28{,}5 \cdot \cos 54°30' - \\ - 23{,}8 \cdot \cos 77°00' \approx 16{,}55 - 5{,}35 \approx 11{,}2.$$

Итак, $C \approx 22°30'$, $b \approx 23{,}8$, $c \approx 11{,}2$.

Задачи II типа

Пример. Даны стороны $a \approx 510$, $b \approx 317$ и угол между ними $C \approx 76°20'$; найти углы A, B и сторону c.

Решение. Сделаем от руки набросок искомого треугольника ABC и проведем в нем высоту AD (рис. 67). Точка D будет находиться между B и C, так как угол C острый и $a > b$.

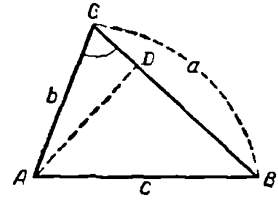


Рис. 67.

В прямоугольном треугольнике ABD имеем: $\operatorname{tg} B = \frac{AD}{BD}$.

Но $AD = b \cdot \sin C \approx 317 \cdot \sin 76°20' \approx$ $\approx 317 \cdot 0{,}9716 \approx 308{,}0$; $BD = BC -$ $- DC = a - b \cdot \cos C \approx 510 -$ $-317 \cdot \cos 76°20' \approx 510 - 74{,}9 \approx 435{,}1$,

следовательно, $\operatorname{tg} B \approx \frac{308{,}0}{435{,}1} \approx 0{,}7081$, откуда по таблицам находим угол $B \approx 35°18' \approx 35°20'$.

Угол $A = 180° - (B + C) \approx 180° - (35°20' + 76°20') \approx$ $\approx 68°20'$.

Искомая сторона c является гипотенузой треугольника ABD, поэтому

$$c = \frac{AD}{\sin B} \approx \frac{308{,}0}{\sin 35°18'} \approx$$

$$\approx \frac{308{,}0}{0{,}5779} \approx 533.$$

Итак $A \approx 68°20'$, $B \approx 35°20'$, $c \approx 533$.

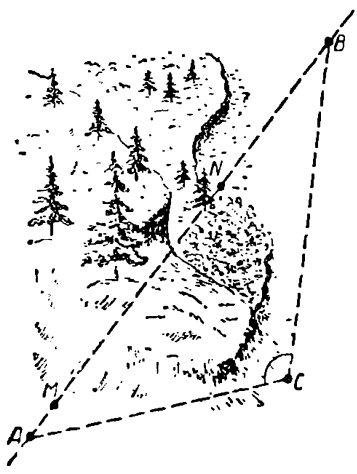


Рис. 68.

Задача. На строительстве железной дороги потребовалось проложить на участке AB (рис. 68) тоннель. Для определения длины и направления тоннеля были измерены расстояния от точек A и B до некоторой точки C (из которой видны точки A и B), а также угол ACB. Результаты измерения оказались следующими: $AC \approx$ ≈ 320 *м*, $BC \approx 400$ *м*, угол $ACB \approx 110°20'$. Найти длину и направление тоннеля.

Решение. Изобразим от руки треугольник ABC с тупым углом C (рис. 69) и будем считать, что он подобен тому треугольнику, вершины которого A, B и C расположены на местности (рис. 68), тогда по условию задачи в треугольнике ABC сторона $a \approx 400$ м, $b \approx 320$ м и угол между ними $C \approx 110°20'$.

Проведем в треугольнике ABC высоту AD из вершины A; точка D будет лежать на продолжении стороны BC, так как угол C тупой.

В прямоугольном треугольнике ADB имеем:

$$\operatorname{tg} B = \frac{AD}{DB} = \frac{AD}{DC + CB}.$$

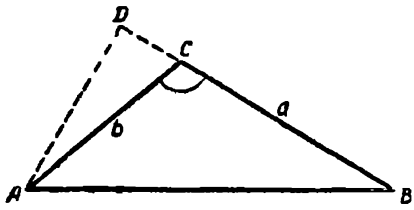


Рис. 69.

Из прямоугольного треугольника ADC находим:

$$AD = DC \cdot \sin ACD =$$
$$= b \cdot \sin (180° - C) \approx 320 \times$$
$$\times \sin 69°40' \approx 320 \cdot 0{,}9377 \approx$$
$$\approx 300{,}1 \text{ м};$$
$$DC = AC \cdot \cos ACD =$$
$$= b \cdot \cos (180° - C) \approx 320 \cdot \cos 69°40' \approx 320 \cdot 0{,}3464 \approx 110{,}8 \text{ м}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} B \approx \frac{300{,}1}{110{,}8 + 400} \approx \frac{300{,}1}{510{,}8} \approx 0{,}5875$,

откуда по таблице находим = угол $B \approx 30°27'$.

Из прямоугольного треугольника ADB имеем:

$$AB = \frac{AD}{\sin B} \approx \frac{300{,}1}{\sin 30°27'} \approx \frac{300{,}1}{0{,}5067} \approx 593.$$

Угол $A = 180° - (B + C) \approx 180° - (30°27' + 110°20') \approx 39°13'$.

Итак, после необходимых округлений имеем: $AB \approx 593$ м, $A \approx 39°10'$, $B \approx 30°30'$.

Зная углы A и B, провешили прямую из точек A и B до начала M и конца N тоннеля и измерили отрезки AM и BN; оказалось: $AM \approx 38$ м, $BN \approx 76$ м, следовательно, длина тоннеля $MN = AB - (AM + NB) \approx 593 - 114 \approx 479$ (м).

Задачи III типа

Задача. Известны две стороны треугольника и угол, лежащий против одной из них, например, a, b и A; требуется найти углы B и C и сторону c.

Решению задачи данного типа предшествует обычно небольшое исследование. Проведем его в общем виде с тем, чтобы выводы использовать в дальнейшем во всех конкретных случаях.

Как известно из геометрии, чтобы построить треугольник ABC по двум сторонам a, b и углу A, откладывают на стороне этого угла отрезок $AC = b$ (рис. 70), а затем из точки C как из центра описывают окружность радиусом a. При этом может быть четыре случая:

1) окружность не пересечет другой стороны угла A, и тогда задача не будет иметь решения;

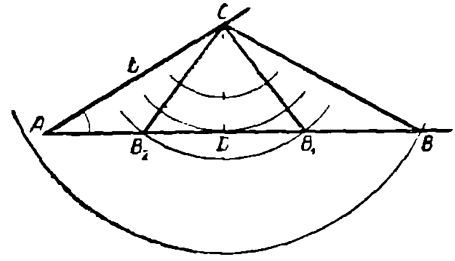


Рис. 70.

2) окружность коснется другой стороны угла A в точке D, и тогда треугольник ACD будет искомым; в нем угол D будет прямым, так как радиус CD окружности перпендикулярен касательной AD;

3) окружность пересечет другую сторону угла A в двух точках B_1 и B_2, тогда искомых треугольников окажется два: ACB_1 и ACB_2, причем угол $AB_2C = 180° - \sphericalangle AB_1C$, короче: $\sphericalangle B_2 = 180° - \sphericalangle B_1$;

4) окружность пересечет другую сторону угла A в *одной точке B, тогда искомым будет один треугольник ACB.*

Поскольку в тригонометрии решение треугольников проводится вычислительным методом, то возникает вопрос: нельзя ли только на основании числовых данных, не выполняя указанных построений, определять, с каким из этих четырех случаев приходится иметь дело?

Оказывается, это возможно и весьма просто. В самом деле, заметив, что при $A < 90°$ перпендикуляр $CD = b \cdot \sin A$, и учтя необходимые условия пересечения окружности с лучом, приходим к следующему выводу:

1) случай, если $a < CD$, т. е. $a < b \sin A$ (решений нет);

2) случай, если $a = CD$, т. е. $a = b \sin A$ (искомый треугольник прямоугольный);

3) случай, если $AC > a > CD$, т. е. $b > a > b \sin A$ (два решения);

4) случай, если $a > AC$, т. е. $a > b$ (одно решение).

Очевидно, при $A > 90°$ будет иметь место только четвертый случай, так как против тупого угла всегда лежит большая сторона.

Установив по данным задачи (до ее решения), с каким из указанных случаев приходится иметь дело, переходят к самому решению.

Пример 1. Дано: $a \approx 19{,}1$, $b \approx 28{,}2$, $A \approx 31°17'$.

Найти: B, C, c.

Решение. 1) Определяем, какому случаю соответствуют данные:

$$CD = b \sin A \approx 28{,}2 \cdot \sin 31°17' \approx 14{,}64,$$

следовательно, $b > a > b \sin A$, что соответствует второму случаю, когда задача имеет два решения: треугольник ACB_1 с острым углом B_1 и треугольник ACB_2 с тупым углом $B_2 = 180° - B_1$.

2) Находим первое решение. Из прямоугольного треугольника CDB_1 (рис. 70) имеем:

$$\sin B_1 = \frac{CD}{CB_1} = \frac{b \cdot \sin A}{a} \approx \frac{14{,}64}{19{,}1} \approx 0{,}7665,$$

откуда по таблице находим угол $B_1 \approx 50°03'$.

$$\measuredangle ACB_1 = 180° - (A + B_1) \approx 180° - (31°17' + 50°03') \approx$$
$$\approx 98°40'.$$

Сторона

$$AB_1 = AD + DB_1 = b \cos A + a \cos B_1 \approx$$
$$\approx 28{,}2 \cdot \cos 31°17' + 19{,}1 \cdot \cos 50°03' \approx 36{,}4.$$

3) Находим второе решение. Треугольник CB_1B_2 равнобедренный (рис. 70), поэтому угол $AB_2C = B_2 = 180° -$

$$- B_1 \approx 180° - 50°03' \approx 129°57'.$$

Угол $ACB_2 = 180° - (A + B_2) \approx 180° - (31°17' + 129°57') \approx$ $\approx 18°46'$.

Сторона $AB_2 = AD - DB_2 = b \cdot \cos A - a \cdot \cos B_1 \approx$

$$\approx 28{,}2 \cdot \cos 31°17' - 19{,}1 \cdot \cos 50°03' \approx 11{,}8.$$

Итак, после необходимых округлений получаем следующие ответы:

$$B_1 \approx 50^\circ 00', \; C_1 \approx 98^\circ 40', \; AB_1 \approx 36{,}4;$$

$$B_2 \approx 130^\circ, \quad C_2 \approx 18^\circ 50', \; AB_2 \approx 11{,}8.$$

Задачи IV типа

Пример. Даны стороны треугольника: $a \approx 12{,}0$ *см*, $b \approx 10{,}3$ *см* и $c \approx 15{,}0$ *см*; найти его углы A, B и C.

Решение. Сделаем от руки набросок искомого треугольника ABC и проведем в нем высоту CD из вершины C, лежащей против большей стороны (рис. 71).

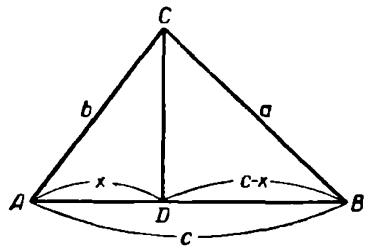


Рис. 71.

Обозначим отрезок AD через x, тогда $BD = c - x$, $\cos A = \frac{x}{b}$ и $\cos B = \frac{c-x}{a}$. (*)

Для определения x применим теорему Пифагора в прямоугольных треугольниках ACD и BCD, получим систему уравнений:

$$CD^2 = b^2 - x^2;$$

$$CD^2 = a^2 - (c - x)^2,$$

откуда $$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$

или $$2cx = b^2 + c^2 - a^2, \; x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Подставив выражение x в равенство (*) и используя числовые данные, получаем:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{10{,}3^2 + 15{,}0^2 - 12{,}0^2}{2 \cdot 10{,}3 \cdot 15{,}0} \approx \frac{187{,}1}{309{,}0} \approx 0{,}6006;$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12{,}0^2 + 15{,}0^2 - 10{,}3^2}{2 \cdot 15{,}0 \cdot 12{,}0} \approx 0{,}7300.$$

Используя таблицы косинусов, находим:

$$A \approx 53^\circ 05' \approx 53^\circ 00', \; B \approx 43^\circ 07' \approx 43^\circ 10'.$$

Наконец, $C = 180^\circ - (A + B) \approx 180^\circ - (53^\circ 05' + 43^\circ 07') \approx$

$$\approx 83^\circ 48' \approx 83^\circ 50'.$$

Задача. Технику надо было проверить точность кладки угла в доме между двумя стенами.

Убедившись с помощью отвеса и уровня, что ребро угла находится в вертикальном положении, а плоскость пола в горизонтальном, техник отметил на каждой стене у самого пола точки A и B (рис. 72) на расстоянии 1,50 *м* от ребра угла и измерил расстояние от A до B, оно оказалось равным 2,18 *м*.

Затем вычислением он нашел, что угол между стенами дома равен 93°10′. Как же решил задачу техник?

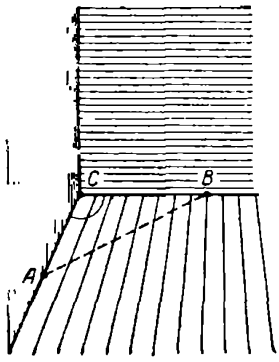


Рис. 72.

Р е ш е н и е. В треугольнике ABC известны три стороны, но этот треугольник равнобедренный, следовательно, нет необходимости повторять общий ход решения задачи III типа

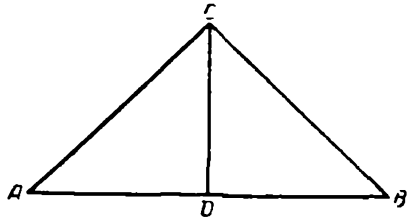


Рис. 73.

В самом деле, сделаем от руки рисунок равнобедренного треугольника ABC и проведем в нем высоту CD (рис. 73), тогда искомый угол $ACB = 2\,DCB$.

$$\text{Но } \sin DCB = \frac{DB}{CB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{CB} \approx \frac{1{,}09}{1{,}50} \approx 0{,}7267.$$

По таблице находим:

$$\sphericalangle DCB \approx 46°36'.$$

Следовательно, $\sphericalangle ACB \approx 93°12' \approx 93°10'$.

Проверьте таким же путем точность кладки угла между стенами в вашем доме.

Упражнения.

1. Найти неизвестные стороны и углы в треугольнике, если даны:

1. $a \approx 13$, $A \approx 54°$, $B \approx 67°$.

2. $b \approx 81{,}7$, $B \approx 44°10'$, $C \approx 110°40'$.

3. $a \approx 650$, $b \approx 433$, $C \approx 31°30'$.

4. $a \approx 20{,}0$, $b \approx 13{,}0$, $A \approx 67°20'$.

5. $a \approx 37{,}0$, $b \approx 13{,}0$, $c \approx 40{,}0$.

2. Для определения величины угла на местности на его сторонах от вершины отложили цепью по 10 *м*, а затем измерили расстояние между полученными точками, которое оказалось равным 16,5 *м*. Как же нашли величину угла?

3. Под каким углом виден прямолинейный край леса $AB \approx 1240$ *м* из пункта C, удаленного от A на расстояние 1600 *м* и от B на 1170 *м*?

4. Даны две стороны треугольника a, b и угол между ними C; доказать, что площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, \text{ если } C < 90°.$$

и

$$S = \frac{1}{2} ab \sin (180° - C), \text{ если } C > 90°.$$

5. Используя формулы предыдущей задачи, вычислить площадь треугольника, у которого две стороны равны 4,7 *дм* и 6,1 *дм*, а угол, заключенный между ними, равен 49°.

§ 18. Вычислительный тригонометрический метод решения многоугольников через сведение к решению треугольников

1. Определение расстояния между недоступными пунктами в общем случае

Данный нами выше (§ 8, пример 2) способ решения подобной задачи может оказаться затруднительным или вовсе неприемлемым, если на местности будут препятствия, не позволяющие провешить прямую требуемого (при этом способе решения) направления.

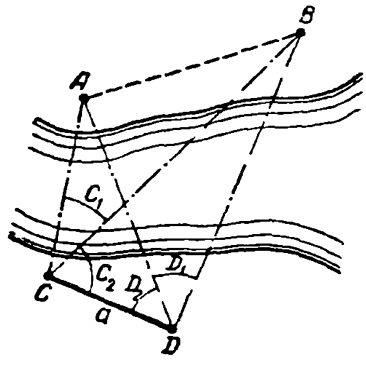


Рис. 74.

В таком случае для отыскания расстояния между недоступными вершинами A и B выбирают на местности любые две доступные точки C и D так, чтобы возможно было измерить между ними расстояние CD и чтобы из этих точек можно было видеть вершины A и B (рис. 74).

Такой отрезок CD называют базисом. С помощью угломера находят углы:

$\sphericalangle ACB = C_1$, $\sphericalangle BCD = C_2$, $\sphericalangle ADB = D_1$ и $\sphericalangle ADC = D_2$.

В треугольниках ACD и BCD известны: сторона $CD = a$ и прилежащие к ней углы[1]. Можно, следовательно, вычислить длины AC и BC (задачи I типа).

Теперь в треугольнике ABC известны две стороны и угол C_1, между ними заключенный, следовательно, можно вычислить третью сторону AB, т. е. искомое расстояние (задача типа II).

Проделайте сами необходимые вычисления, используя следующие результаты измерений:

$CD \approx 120$ м, $C_1 \approx 34°$, $C_2 \approx 71°$, $D_1 \approx 50°$, $D_2 \approx 26°$.

2. Метод триангуляции при съемке планов и определении далеких расстояний

Если два пункта A и B находятся на большом расстоянии друг от друга, то определить это расстояние указанным выше способом уже невозможно, так как на местности не найдется такого (допускающего измерение) базиса CD, из концов которого видны оба пункта A и B.

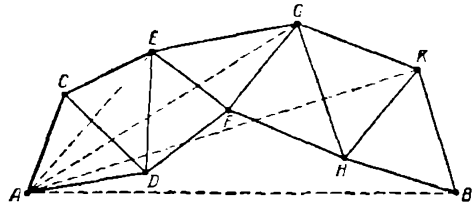


Рис. 75.

В этом случае выбирают на местности (рис. 75) некоторое число точек C, D, E, F, G, H, K так, чтобы образовалась сеть треугольников ACD, CDE, DEF, ..., HKB, удовлетворяющая следующим условиям:

1) возможно измерить с достаточной точностью хотя бы одну из сторон какого-нибудь из этих треугольников;

2) в любом треугольнике из каждой его вершины можно видеть две другие его вершины.

Пусть оказалось возможным измерить сторону CE в

[1] Мы предполагаем, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости; если же это не так, то потребуется измерение и углов ACD и BDC.

треугольнике CED. Тогда измеряют прилежащие к CE углы этого треугольника и находят его стороны CD и ED вычислением (§ 17, задачи I типа). Затем измеряют углы в треугольниках CDA и EDF, прилежащие к сторонам CD и ED, и находят вычислением стороны этих треугольников AC и EF (задачи I типа). Далее, измерив в треугольнике EFG углы, прилежащие к стороне EF, находят его стороны EG и FG. Так, переходя последовательно от одного треугольника к другому, «смежному с ним», находят вычислением все отрезки ломаной $ACEGKB$, соединяющей пункты A и B. После этого рассматривают вспомогательные треугольники ACE, AEG, AGK и AKB. В первом из этих треугольников известны две стороны AC и CE и угол между ними ACE, равный сумме известных углов ACD и ECD [1]; используя эти данные, находят вычислением третью сторону треугольника AE и его угол AEC (§ 17, задачи II типа). Затем переходят к следующему вспомогательному треугольнику AEG, в котором также известны две стороны AE и EG и угол между ними AEG, находят в нем сторону AG и угол AGE. Аналогичным образом в следующем вспомогательном треугольнике AGK находят сторону AK и угол AKG и, наконец, в последнем из этих треугольников AKB определяют сторону AB, т. е. искомое расстояние между пунктами A и B.

Измерение расстояний таким методом называется т р и а н г у л я ц и е й. Впервые триангуляция в грандиозных масштабах была проведена для определения дуги Парижского меридиана между параллелями Дюнкерка и Барселоны [2] (рис. 76).

Все необходимые измерения и вычисления были начаты в 1780 г. крупнейшими математиками Парижской академии наук и продолжались около 20 лет. Одна сорокамиллионная часть длины Парижского меридиана сначала и была названа метром и положена в основу метрической десятичной системы. Отметим, что при решении треугольников были сделаны соответствующие поправ-

---

[1] Мы решаем задачу в предположении, что выбранные нами на местности точки C, D, E, F, G, H, K расположены в одной горизонтальной плоскости. в противном случае решение задачи будет более сложным.

[2] На рисунке 76 изображена сеть этой триангуляции на участке от Дюнкерка до Парижа.

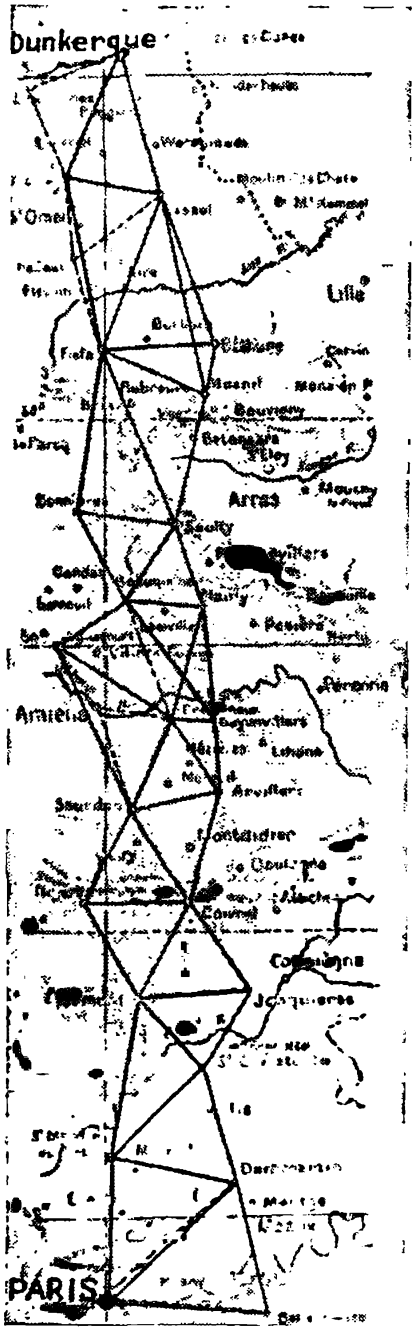


Рис. 76.

ки на кривизну поверхности Земли (сферические треугольники).

В России в еще более грандиозных размерах впервые была проведена триангуляция известным астрономом В. Я. Струве (1793—1864) в Финляндии и в Прибалтийских губерниях. Измеренная при этом дуга меридиана составила 25°20′. В триангуляционную сеть вошло 258 треугольников, для которых в разных пунктах было измерено 10 базисов (лишние базисные отрезки являлись контрольными отрезками), и также при решении треугольников были сделаны поправки на кривизну поверхности Земли.

3. Навигационные задачи

а) Капитану корабля X (рис. 77) надо определить расстояние до гавани A. С этой целью он пеленгует (определяет) с помощью особого радиоаппарата направления на гавань A и на сигнальную станцию C, относительное положение которых ему известно по карте.

Результаты пеленгования оказываются следующими:

$$\sphericalangle AXC = X_1 \approx 25°,6,$$

$$\sphericalangle CXN = X_2 \approx 148°,2,$$

где SN — направление по меридиану к северному полюсу.

Карта показывает, что $AC = l \approx 31{,}0$ *км*,

$$\sphericalangle ACN = C \approx 167°{,}8.$$

Затем для определения искомого расстояния производятся соответствующие расчеты[1], основанные на решении треугольника ACX.

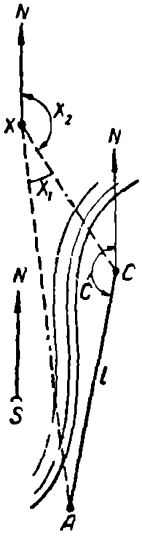


Рис. 77.

В треугольнике ACX известны сторона $AC = l$ и все углы. Действительно, $XN \parallel CN$, следовательно,

$$\sphericalangle XCA = C - (180° - X_2) \approx 136°,$$

$$A = 180° - (X_1 + 136°) \approx 18°{,}4.$$

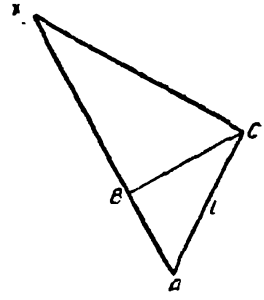


Рис. 78.

Изобразим от руки треугольник ACX (рис. 78) и проведем в нем $CB \perp AX$, тогда $AX = AB + BX$.

Но $AB = l\cos A$, $BX_1 = \frac{BC}{\operatorname{tg} X_1}$, $BC = l\sin A$, следовательно,

$$AX = l\cos A + \frac{l\sin A}{\operatorname{tg} X_1} = l\left(\cos A + \frac{\sin A}{\operatorname{tg} X_1}\right).$$

Подставив данные, получаем:

$$AX \approx 31{,}0\left(\cos 18°{,}4 + \frac{\sin 18°{,}4}{\operatorname{tg} 25°{,}6}\right) \approx 49{,}8 \ (км).$$

[1] Следует заметить, что в современных условиях техника радиолокации ушла так далеко вперед, что расстояние от корабля до гавани можно определять (с некоторой точностью) и без сигнальной станции, при этом все необходимые расчеты выполняются автоматически и почти мгновенно.

б) Для определения места нахождения, курса и скорости корабля X_1 на него определили направление с помощью радиопеленгаторов одновременно из двух пунктов A и B, затем то же самое сделали еще раз спустя $t = 30$ минут (рис. 79). Результаты первого наблюдения оказались следующими:

$$\sphericalangle BAX_1 = A_1 \approx 85°30',$$
$$\sphericalangle ABX_1 = B_1 \approx 46°12'.$$

Результаты второго наблюдения следующие:

$$\sphericalangle BAX_2 = A_2 \approx 62°0',$$
$$\sphericalangle ABX_2 = B_2 \approx 60°18'.$$

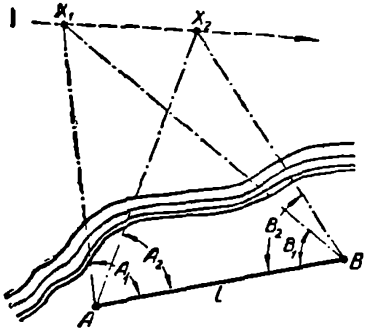


Рис. 79.

Затем произвели расчеты, учтя, что $AB = l \approx 59{,}5$ *км*.

Это можно сделать следующим образом.

Решая треугольник ABX_1 по стороне l и прилежащим к ней углам A_1 и B_1 (см. § 17, 1), найдем $AX_1 \approx 57{,}5$ *км*.

Затем решаем аналогичным путем треугольник ABX_2 по стороне l и прилежащим к ней углам A_2 и B_2, находим: $AX_2 \approx 61{,}1$ *км*.

Наконец, решаем треугольник AX_1X_2 по двум сторонам AX_1 и AX_2 и углу между ними $X_1AX_2 = A_1 - A_2 \approx 23°30'$ (см. § 17, п. II), находим:

$$X_1X_2 \approx 24{,}4 \text{ км} \text{ и } \sphericalangle AX_1X_2 \approx 70°0'.$$

В заключение определяем скорость корабля:

$$v = \frac{X_1X_2}{t} \approx \frac{24{,}4 \text{ км}}{0{,}5 \text{ час}} \approx 48{,}8 \text{ км/час} \approx 49 \text{ км/час}.$$

На практике своевременно делаются поправки на сферичность рассматриваемых треугольников.

4. Задачи из землемерной практики

а) Через данную точку C надо провешить прямую, параллельную недоступной прямой, на которой видны две точки A и B (рис. 80).

Решение. 1) Измеряем $CD = l$ (базис).

2) Измеряем углы: $\measuredangle ACD = C_1$, $\measuredangle ACB = C_2$,

$\measuredangle ADC = D_1$ и $\measuredangle BDC = D_2$.

3) Решаем треугольник ACD по стороне l и прилежащим к ней углам C_1 и D_1 (см. § 17,1), находим AC.

4) Аналогично решаем треугольник BCD, находим BC.

5) Решаем треугольник ABC по двум сторонам AC и BC и углу между ними C_2, находим $\measuredangle CAB = A$.

6) Строим угол $ACX = 180° - A$, получаем искомое направление CX, параллельное прямой AB.

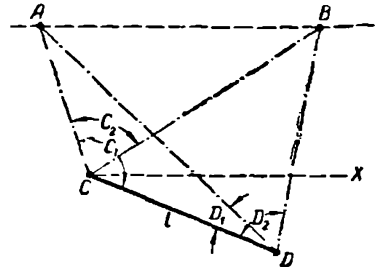


Рис. 80.

б) Через точку C надо провешить перпендикуляр к недоступной прямой, на которой видны две точки A и B (рис.81).

Решение. Первые пять шагов те же, что и в предыдущей задаче.

Затем строим $\measuredangle ACF = 90° - A$, получаем искомое направление CF, перпендикулярное прямой AB.

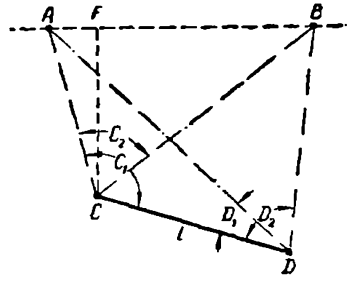


Рис. 81.

в) Измерить расстояние от точки C до недоступной прямой, на которой видны две точки A и B (рис. 81).

Решение. Повторяем шаги 1, 2, 3, 4, 5 в решении задачи а). Затем из прямоугольного треугольника ACF находим искомое расстояние: $CF = AC \cdot \sin A$.

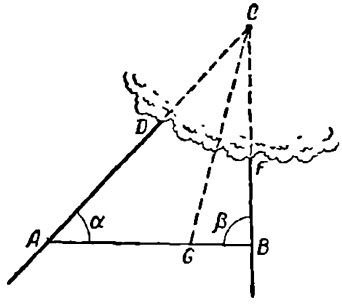


Рис. 82.

г) Через данную точку G надо провешить прямую, которая проходит через точку C пересечения двух прямых AD и BF, полагая, что из пункта G не видно точки C (рис. 82).

Р е ш е н и е. 1) Провешиваем через точку G произвольную прямую AB.

2) Измеряем $AB = l$, $\sphericalangle DAB = \alpha$ и $\sphericalangle FBA = \beta$.

3) Решаем треугольник ABC по стороне $AB = l$ и прилежащим к ней углам A и B, находим AC.

4) Измеряем $AG = p$.

5) Решаем треугольник ACG по двум сторонам AG и AC и углу между ними γ, находим угол AGC, определяющий искомое направление из G на C.

Упражнения по всем разделам книги

1. Клин B опирается щекой на клин A с углом α (рис. 83) и может двигаться в вертикальном направлении. На сколько подымется клин B кверху, если клин A подвинуть влево на a *см*?

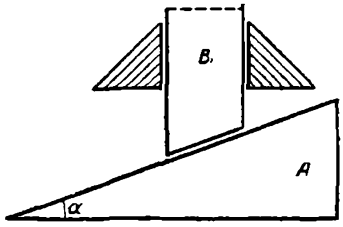


Рис. 83.

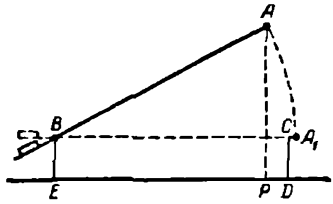


Рис. 84.

2. Железнодорожный шлагбаум $AB \approx 8{,}0$ *м* вращается вокруг оси B (рис. 84). Найти формулу, которой выражается закон изменения расстояния конца A шлагбаума от поверхности Земли при его поднятии, если высота опорных столбов BE и CD равна 1,5 *м*. Исследовать полученную формулу.

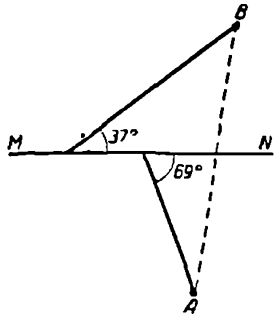


Рис. 85.

3. Шар скатывается по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha \approx 25°$ за 8 секунд.

Найти длину наклонной плоскости и скорость шара в конце спуска.

4. Шар, скатывающийся по наклонной плоскости длиной в 125 *м*, должен приобрести в конце движения скорость 42 *м/сек*.

Каким должен быть угол наклона плоскости?

5. Чтобы попасть со станции A на завод B, надо проехать 3,5 *км* проселочной прямой дорогой по шоссе MN, которое с ней встречается под углом 69°, а затем, проехав далее по шоссе 1,8 *км*, свернуть на проселочную прямую дорогу, встречающую шоссе с другой

стороны под углом в 37° (см. рис. 85), и по ней ехать еще 5,0 *км*. Какая экономия в пути будет после строительства прямой дороги от станции до завода?

6. В 8 час. из гавани вышел пароход по курсу 10°СВ; через полчаса он изменил направление на 12° восточнее и, пройдя еще $^3/_4$ часа, взял свой постоянный курс — 72°СВ.

Из той же гавани в 9 час. вышел катер и, двигаясь по прямолинейному пути, в 10 час. 30 мин. догнал пароход. Определить курс и среднюю скорость катера, если пароход шел с постоянной скоростью 30 *км/час*.

Указание к решению. Курсом корабля называют угол между меридианом и направлением движения корабля, отсчитываемый по часовой стрелке от меридиана. Курс 10° СВ означает, что корабль идет на северо-восток под углом в 10° к меридиану.

На рисунке 86 дана схема движения корабля и катера. Гавань обозначена буквой O, а направление меридиана указано стрелой SN.

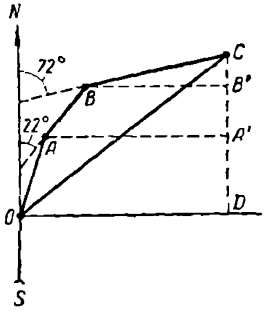


Рис. 86.

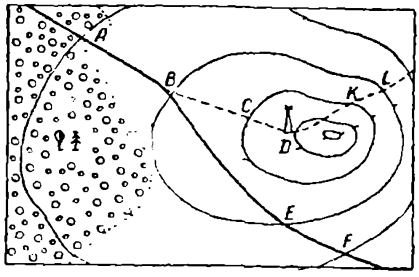


Рис. 87.

Ход решения задачи: $\operatorname{tg} x = \dfrac{OD}{DC}$, где x — курс катера;

$$OD = OA \cdot \sin 10° + AB \cdot \sin 22° + BC \cdot \sin 72°;$$

$$DC = OA \cdot \cos 10° + AB \cdot \cos 22° + BC \cdot \cos 72°.$$

Скорость катера $v = \dfrac{OC}{t}$, где $t = 1{,}5$; $OC = \dfrac{CD}{\cos x}$ и т. д.

7. На рисунке 87 изображена часть топографической карты с масштабом 1 *см* = 100 *м* и расстояниями между горизонталями в 5 *м*. Найти действительное расстояние (т. е. на местности) в метрах и крутизну склонов в градусах между пунктами: A и B, C и D, E и F, K и L. Каким отрезком изобразится на этой карте участок прямолинейного пути в 170 *м* по скату с уклоном в 23°?

8. Требуется устроить канатную передачу грузов между пунктами A и B, расположенными по разные стороны реки. Для определения расстояния AB вдоль берега отмерили базис AC длиной в 200 *м* и измерили углы BAC и BCA, которые оказались равными соответственно 74°30′ и 44°15′. Найдите длину AB.

9. Чтобы определить расстояние между двумя пунктами A и B, разделенными краем леса, выбрали вне леса точку C и измерили $AC \approx 340$ *м*, $BC \approx 460$ *м* и угол $ACB \approx 116°$. Найдите длину AB.

10. На тело действуют под углом $\alpha = 52°$ две силы $P_1 \approx 25$ *кг* и $P_2 \approx 48$ *кг*. Определить величину и направление результирующей силы.

11. Силу $P \approx 840$ *кг* надо разложить на две силы $P_1 \approx 734$ *кг* и $P_2 \approx 550$ *кг*. Под каким углом к силе P должны действовать силы P_1 и P_2?

12. В горном деле встречаются задачи следующего типа: с одной и той же стены шахты на одинаковой высоте пробиты два штрека, входы которых отделены друг от друга на 4 *м* (рис. 88). Первый штрек имеет длину 350 *м* и направлен перпендикулярно стене. Длина второго штрека равна

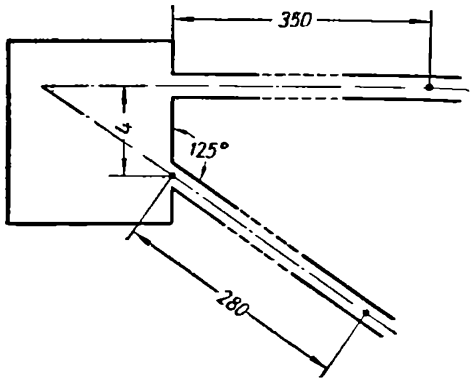


Рис. 88.

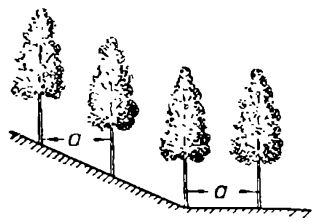


Рис. 89.

280 *м*, и он направлен под углом 125° к стене шахты. Концы этих штреков должны быть соединены третьим штреком. Требуется определить длину этого связывающего штрека.

13. Для определения расстояния между Луной и Землей астроном Лаланд наблюдал в 1752 г. Луну одновременно из двух пунктов, расположенных почти на одном меридиане, из Берлина, лежащего на 52°31′ с. ш., и Кейптауна лежащего на 33°56′ ю. ш. При этом было установлено, что в Берлине угол между направлением в зенит и направлением на определенную точку Луны равен 32°3′ а такой же угол в Кейптауне равен 55°40′ Найдите искомое расстояние, используя эти данные и величину радиуса земного шара $R \approx 6370$ *км*.

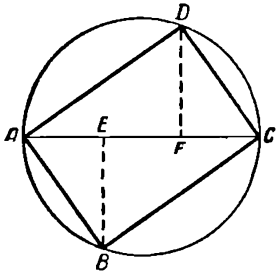


Рис. 90.

14. Если на горизонтальной поверхности Земли предполагают рассадить деревья на расстоянии $a = 4{,}5$ *м* (рис. 89) то на каком расстоянии одну от другой следует копать ямки для посадки деревьев по склону холма, имеющему наклон к горизонту $\alpha \approx 21°$?

15. Чтобы выпилить из цилиндрического (без конусности) бревна прямоугольную балку наибольшего сопротивления, производят разметку следующим образом: с помощью центроискателя проводят на торце бревна диаметр AC (рис. 90), делят его на три равные части, из точек деления E и F проводят перпендикуляры EB и FD к диаметру AC и точки пересечения перпендикуляров с окружностью сое-

линяют прямыми линиями AB, BC, CD и DA. В теории сопротивления материалов доказывается, что такая балка, поставленная на ребро AB, отличается наибольшим сопротивлением.

Определите размеры поперечного сечения $ABCD$ балки наибольшего сопротивления, которую можно выпилить из цилиндрического бревна с диаметром $D \approx 250$ *мм*. Вычислите углы, которые образуют стороны сечения с диагональю AC.

16. Чтобы определить площадь участка земли, имеющего форму пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$, выбрали на участке некоторую точку M, измерили расстояния от точки M до вершин участка и углы, образованные направлениями из точки M на вершины участка.

Результаты измерения оказались следующими:

$$A_1M \approx 340 \text{ м}, \quad A_2M \approx 420 \text{ м}, \quad A_3M \approx 280 \text{ м}, \quad A_4M \approx 310 \text{ м},$$

$$A_5M \approx 290 \text{ м}, \quad \sphericalangle A_1MA_2 \approx 60°,$$

$\sphericalangle A_2MA_3 \approx 47°$, $\sphericalangle A_3MA_4 \approx 123°$, $\sphericalangle A_4MA_5 \approx 59°$ и $\sphericalangle A_5MA_1 \approx 71°$.

Найти площадь этого участка.

Указание. При определении площадей треугольников, на которые разлагается данный многоугольник, можно воспользоваться формулами, выведенными в § 18, упражнение 4.

17. Две точки A и B, расстояние между которыми равно 15,0 *см*, удалены от плоского зеркала соответственно на 5,0 *см* и 7,0 *см*. Определить угол падения луча, идущего от A и отброшенного зеркалом в направлении к B.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучив новый вычислительный прием решения треугольников и фигур, сводимых к ним, основанный на теории тригонометрических функций острого угла, можно ли сказать, что вы знаете тригонометрию. Нет, нельзя. Вами изучена лишь начальная стадия этого предмета, в которой он находился примерно до XVI века.

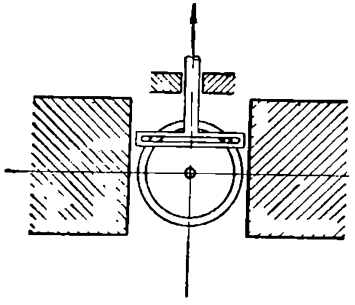


Рис. 91.

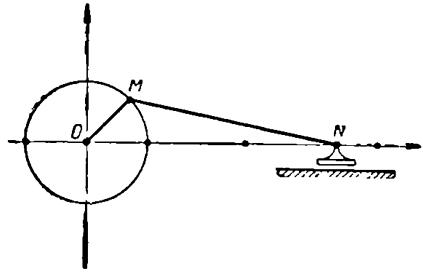


Рис. 92.

Современные инженеры и техники, создающие различные машины и механизмы, в которых происходит преобразование круговых движений в прямолинейные и обратно (на рисунках 91 и 92 изображены модели простейших механизмов, превращающих круговые движения в прямолинейные), должны знать теорию тригонометрических функций любых углов и дуг, меньших и больших 90°, 180° и 360°, положительных и отрицательных. Такая теория тригонометрических функций была развита в трудах петербургского академика Леонарда Эйлера (1707 — 1783) и изложена в доступной форме для учащихся профессором М. Е. Головиным (1756 — 1790), племянником знаменитого академика Михаила Васильевича Ломоносова. Такую теорию тригонометрических функций с различными ее приложениями найдете во второй и третьей частях данной книги. Она вооружит вас еще

более эффективными вычислительными приемами решения самых различных задач по геометрии и алгебре, физике и механике, геодезии и астрономии, технике и навигации. В частности, для многих решенных задач вы найдете более краткие и наиболее удобные решения.

Таблица трехзначных приближенных значений синусов и косинусов углов с шагом в один градус

A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B	A	$\sin A$	B
0°	0,000	90°	30°	0,500	60°	60°	0,866	30°
1°	0,017	89°	31°	0,515	59°	61°	0,875	29°
2°	0,035	88°	32°	0,530	58°	62°	0,883	28°
3°	0,052	87°	33°	0,545	57°	63°	0,891	27°
4°	0,070	86°	34°	0,559	56°	64°	0,899	26°
5°	0,087	85°	35°	0,574	55°	65°	0,906	25°
6°	0,105	84°	36°	0,588	54°	66°	0,914	24°
7°	0,122	83°	37°	0,602	53°	67°	0,921	23°
8°	0,139	82°	38°	0,616	52°	68°	0,927	22°
9°	0,156	81°	39°	0,629	51°	69°	0,934	21°
10°	0,174	80°	40°	0,643	50°	70°	0,940	20°
11°	0,191	79°	41°	0,656	49°	71°	0,946	19°
12°	0,208	78°	42°	0,669	48°	72°	0,951	18°
13°	0,225	77°	43°	0,682	47°	73°	0,956	17°
14°	0,242	76°	44°	0,695	46°	74°	0,961	16°
15°	0,259	75°	45°	0,707	45°	75°	0,966	15°
16°	0,276	74°	46°	0,719	44°	76°	0,970	14°
17°	0,292	73°	47°	0,731	43°	77°	0,974	13°
18°	0,309	72°	48°	0,743	42°	78°	0,978	12°
19°	0,326	71°	49°	0,755	41°	79°	0,982	11°
20°	0,342	70°	50°	0,766	40°	80°	0,985	10°
21°	0,358	69°	51°	0,777	39°	81°	0,988	9°
22°	0,375	68°	52°	0,788	38°	82°	0,990	8°
23°	0,391	67°	53°	0,799	37°	83°	0,993	7°
24°	0,407	66°	54°	0,809	36°	84°	0,995	6°
25°	0,423	65°	55°	0,819	35°	85°	0,996	5°
26°	0,438	64°	56°	0,829	34°	86°	0,998	4°
27°	0,454	63°	57°	0,839	33°	87°	0,999	3°
28°	0,469	62°	58°	0,848	32°	88°	0,999	2°
29°	0,485	61°	59°	0,857	31°	89°	1,000	1°
30°	0,500	60°	60°	0,866	30°	90°	1,000	0°
A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B	A	$\cos B$	B

Таблица трехзначных приближенных значений тангенсов углов с шагом в один градус

A	tg$A$	A	tg$A$	A	tg$A$	A	tg$A$	A	tg$A$
0°	0,000	20°	0,364	40°	0,839	60°	1,73	80°	5,67
1°	0,017	21°	0,384	41°	0,869	61°	1,80	81°	6,31
2°	0,035	22°	0,404	42°	0,900	62°	1,88	82°	7,12
3°	0,052	23°	0,424	43°	0,933	63°	1,96	83°	8,14
4°	0,070	24°	0,445	44°	0,966	64°	2,05	84°	9,51
5°	0,087	25°	0,466	45°	1,000	65°	2,14	85°	11,4
6°	0,105	26°	0,488	46°	1,04	66°	2,25	86°	14,3
7°	0,123	27°	0,510	47°	1,07	67°	2,36	87°	19,1
8°	0,141	28°	0,532	48°	1,11	68°	2,48	88°	28,6
9°	0,158	29°	0,554	49°	1,15	69°	2,60	89°	57,3
10°	0,176	30°	0,577	50°	1,19	70°	2,75		
11°	0,194	31°	0,601	51°	1,23	71°	2,90		
12°	0,213	32°	0,625	52°	1,28	72°	3,08		
13°	0,231	33°	0,649	53°	1,33	73°	3,27		
14°	0,249	34°	0,675	54°	1,38	74°	3,49		
15°	0,268	35°	0,700	55°	1,43	75°	3,73		
16°	0,287	36°	0,727	56°	1,48	76°	4,01		
17°	0,306	37°	0,754	57°	1,54	77°	4,33		
18°	0,325	38°	0,781	58°	1,60	78°	4,70		
19°	0,344	39°	0,810	59°	1,66	79°	5,14		

ЧАСТЬ II

ОСНОВНОЙ КУРС ТРИГОНОМЕТРИИ

Замечательный французский математик Франсуа Виет (1540—1603), написавший «Введение в искусство анализа», где излагается учение об элементарных функциях, в частности гониометрия.

ГЛАВА I

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ УГЛА И КРУГОВОЙ ДУГИ. ЧИСЛОВАЯ ОКРУЖНОСТЬ

§ 1. Необходимость обобщения понятия угла и круговой дуги при изучении вращательных движений

Понятия угла и круговой дуги, данные в геометрии, оказываются недостаточными при изучении вращательных и круговых движений. В самом деле, рассмотрим следующую практическую задачу.

Маховик дизеля делает 40 оборотов в минуту. Какой угол опишет его спица OA (рис. 1) в течение t сек.? Какую дугу опишет конец спицы A за это время? Какое положение займет спица OA через $t = \frac{1}{2}$ сек.?

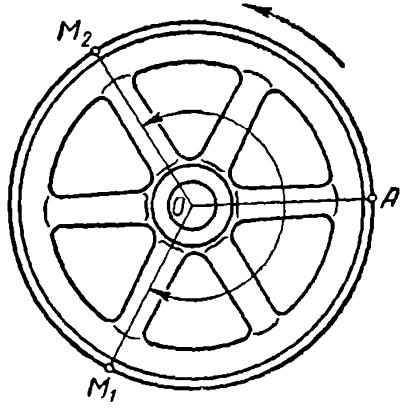


Рис. 1.

Решение. Искомый угол (дуга) $\varphi = \frac{360° \cdot 40 \cdot t}{60} = 240°t$.

Величина угла (дуги) выразилась функцией времени t:

$$\varphi = 240°t;$$

с возрастанием t увеличивается угол (дуга) φ, что показано в таблице:

t	0	$\frac{1}{2}$	1	2	5	10	60
φ	0°	120°	240°	480°	1200°	2400°	14 400°

В геометрии *углом называют фигуру, образованную двумя лучами, имеющими общее начало, круговой дугой называют часть окружности, ограниченной двумя точками.* При таких определениях величины углов и дуг могут изменяться только в пределах от 0 до 360°. Следовательно, встает необходимость обобщить определение угла и круговой дуги так, чтобы их величины не были ограничены.

Чтобы ответить на второй вопрос задачи о положении спицы OA через $t = \frac{1}{2}$ сек., надо знать направление вращения маховика.

Если направление вращения маховика совпадает с направлением вращения часовой стрелки, то спица OA опишет угол в 120° и займет положение OM_1, при противоположном вращении маховика спица OA опишет также угол в 120°, но займет положение OM_2.

Таким образом, полный ответ на второй вопрос задачи требует указания величины угла, описанного спицей, и направления движения спицы. То же самое можно сказать и о круговой дуге, описываемой концом спицы OA.

§ 2. Обобщенный угол и обобщенная круговая дуга

В соответствии с выводами предыдущего параграфа обнаруживается целесообразность в следующем определении:

Совокупность двух лучей с общим началом называют обобщенным или направленным углом, если указан порядок, в котором рассматриваются эти лучи, и задано вращение, при котором первый луч переходит во второй; общее начало лучей, вокруг которого совершается вращение, называют вершиной обобщенного угла, а сами лучи — его сторонами[1].

[1] Вращение на плоскости определяется заданием точки, вокруг которой совершается поворот, направлением поворота и величиной угла поворота.

При записи обобщенного угла на первом месте ставится буква, соответствующая первому лучу. Например, записи обобщенных углов AOM и $(h; k)$ показывают, что первыми сторонами являются соответственно лучи OA и h. Чтение изображенного обобщенного угла также начинается с его первой стороны.

Первую сторону обобщенного угла называют иногда начальной стороной, а вторую — конечной. Такие названия указывают, что обобщенный угол AOM может быть получен кинематическим вращением луча OA вокруг точки O от его начального положения OA до конечного OM.

На плоскости вращение луча вокруг его начала возможно в двух направлениях. Одно из этих направлений совпадает с направлением вращения стрелки часов, положенных на плоскость циферблатом к наблюдателю, а другое — противоположно направлению вращения часовой стрелки; ради краткости в первом случае говорят о вращении по часовой стрелке, а во втором — против часовой стрелки.

Обобщенный угол называют положительным, если переход от его первой стороны ко второй совершается вращением первого луча против часовой стрелки, и отрицательным, если такой переход совершается вращением первого луча по часовой стрелке.

Такое соглашение имеет свою историю. Как известно, механические и солнечные (теневые) часы устроены так, что их стрелки вращаются «по солнцу», т. е. в том же направлении, в каком мы видим кажущееся нам движение Солнца вокруг Земли. Но с открытием Коперником (1473—1543) истинного (положительного) движения Земли вокруг Солнца, видимое нами (т. е. кажущееся) движение Солнца вокруг Земли является фиктивным (отрицательным) и Коперник его отрицал, поэтому и считают направление вращения «по часовой стрелке» или «по солнцу» отрицательным, а противоположное направление — положительным.

Возвращаясь к задаче о вращении маховика (см. § 1, рис. 1), можем теперь сказать, что за время $t = \frac{1}{2}$ сек. спица OA опишет $\sphericalangle AOM_1 = -120°$, если маховик вращается по часовой стрелке, или $\sphericalangle AOM_2 = +120°$, если маховик вращается в противоположном направлении[1].

[1] Понятно, что для наблюдателя, находящегося по другую сторону маховика, угол AOM_1 окажется равным $+120°$, а угол AOM_2 — равным $-120°$, поэтому при исследовании данного вопроса надо выбрать определенное положение для наблюдателя.

Понятно, что за 10 сек. вращения маховика по часовой стрелке та же спица опишет угол в $-2400°$, а при противоположном направлении вращения опишет угол в $+2400°$.

Чтобы сохранилось известное в геометрии соответствие между центральными углами и стягивающими их дугами, целесообразно дать следующее определение обобщенной круговой дуги:

Обобщенной круговой дугой называется фигура, описываемая точкой, совершающей круговое движение с указанием направления движения точки, а также ее начального и конечного положения. Начальное и конечное положение точки, описывающей дугу, называют соответственно началом и концом дуги.

Дугу называют отрицательной, если переход от ее начала к концу совпадает с направлением движения часовой стрелки, и положительной, если такой переход противоположен направлению движения часовой стрелки.

Записывают обобщенную дугу двумя буквами, обозначающими ее начало и конец, причем на первом месте пишут букву, означающую начало дуги, а на втором — ее конец. Так $\smile AM$ имеет начало в точке A и конец в точке M. На рисунке 1 выделены две дуги $AM_2 = +120°$ и $AM_1 = -120°$.

Полезно заметить, что при образовании угла AOM вращением луча OA все точки этого луча описывают обобщенные круговые дуги[1], которые измеряются тем же числом градусов, что и угол AOM. Начало любой из этих дуг лежит на начальной стороне угла AOM, а конец — на второй стороне угла.

Так, например, при вращении маховика «по часовой стрелке» (см. задачу § 1, рис. 1) за 2 сек. спица OA опишет обобщенный угол в $-480°$ и займет положение OM_1, а ее точка A, совершая при этом круговое движение, опишет обобщенную дугу в $-480°$ с началом A и концом M_1.

Упражнения.

1. При замыкании дверного замка повернули ключ «по часовой стрелке» на пол-оборота. Выразить в градусах дуги описанные при этом различными точками поверхности ключа

[1] В дальнейшем будем употреблять слово «дуга» без дополнения круговая.

2. На какой угол надо повернуть минутную стрелку, чтобы перевести часы назад на 2 часа 40 минут?

3. При отвинчивании гайки гаечный ключ повернули «против часовой стрелки» на четверть оборота. Выразить в градусах величину угла, на который повернули гаечный ключ.

4. При закрытии водопроводного крана повернули вентиль «по часовой стрелке» на $3\frac{1}{4}$ оборота. Выразить угол поворота вентиля в градусах.

5. Ведро в колодце поднимается на 2 *м*, если рукоятку ворота повернуть на пять полных оборотов по часовой стрелке. На какой угол надо повернуть рукоятку ворота, чтобы ведро: 1) поднялось на 1,5 *м*? 2) опустилось на 3 *м*?

Вернемся еще раз к задаче о вращении маховика (см. § 1). На рисунке 1 изображен угол $AOM_2 = +120°$; поставим себе вопрос: нет ли других обобщенных углов с той же начальной стороной OA и той же конечной стороной OM_2?

Ответ ясен: такие углы существуют, причем их бесконечное множество и величина каждого из них отличается от величины выделенного стрелкой угла $AOM_2 = +120°$ числом кратным 360°, так как при каждом обороте маховика спица OA описывает угол в 360°, а именно, если маховик вращается против часовой стрелки, то

за $t = \frac{1}{2}$ сек. спица OA опишет угол $AOM_2 = +120°$;

за $t = 2$ сек. спица OA опишет угол $(AOM_2)_1 = +120° + 360°$;

за $t = 4{,}5$ сек. спица OA опишет угол $(AOM_2)_2 = +120° + 360° \cdot 2$;

за $t = 6$ сек. спица OA опишет угол $(AOM_2)_3 = +120° + 360° \cdot 3$ и т. д.

Если же маховик вращается по часовой стрелке, то первый раз в положение OM_2 спица OA придет через 1 сек. и опишет при этом угол $AOM_2 = -240°$. За 2,5 сек. она опишет отрицательный угол $(AOM_2)_1 = -240° - 360°$, за 4 сек. она опишет отрицательный угол $(AOM_2)_{II} = -240° - 360° \cdot 2$ и т. д.

Итак, существует бесконечное множество углов с общей начальной стороной и общей конечной стороной. Встает вопрос: нельзя ли все такие углы записывать одной формулой? Ответ дадим в общем виде.

Пусть OA — начальная сторона всех таких углов, а OM — их общая конечная сторона (рис. 2). Сначала рассмотрим углы, образованные вращением луча OA против часовой стрелки. Наименьшим из таких углов будет тот, который образуется при первом совпадении луча OA с лучом OM; обозначим его через $(AOM)_0$ и пусть он равен α°. Понятно, что вращающийся в указанном направлении луч может прийти в положение OM, описав любой из следующих углов:

$$(AOM)_1 = \alpha^\circ + 360^\circ;$$
$$(AOM)_2 = \alpha^\circ + 360^\circ \cdot 2;$$
$$(AOM)_3 = \alpha^\circ + 360^\circ \cdot 3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(AOM)_n = \alpha^\circ + 360^\circ \cdot n,$$

где n — любое натуральное число.

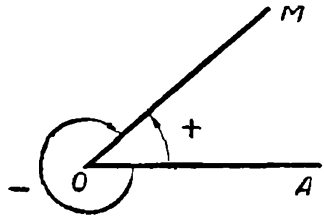


Рис. 2.

Если луч из своего исходного положения OA начнет вращение по часовой стрелке, то первый раз он придет в положение OM, описав отрицательный угол $(AOM)_I = -(360^\circ - \alpha^\circ) = \alpha^\circ - 360^\circ$; затем такое положение он будет принимать через каждый полный оборот, при этом образуются следующие отрицательные углы:

$$(AOM)_{II} = \alpha^\circ - 360^\circ \cdot 2 = \alpha^\circ + 360^\circ \ (-2);$$
$$(AOM)_{III} = \alpha^\circ - 360^\circ \cdot 3 = \alpha^\circ + 360^\circ \ (-3);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(AOM)_m = \alpha^\circ - 360^\circ \cdot m = \alpha^\circ + 360^\circ \ (-m).$$

Нетрудно видеть, что все положительные и отрицательные углы с общей начальной стороной OA и общей второй стороной OM можно записать одной формулой:

$$AOM = \alpha^\circ + 360^\circ \cdot k, \qquad (1)$$

где k — любое целое число, в частности $k = 0$.

§ 3. Арифметические операции над обобщенными дугами и углами

Определение. *Суммой двух или нескольких обобщенных углов, расположенных в одной плоскости так, что вторая сторона первого угла совпадает с начальной сторо-*

ной второго, вторая сторона второго угла совпадает с начальной стороной третьего и т. д., называют такой угол, у которого начальной стороной служит начальная сторона первого угла, а второй стороной — вторая сторона последнего угла; короче:

$$\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 + \sphericalangle A_3OA_4 + \ldots + \sphericalangle A_{n-1}OA_n = \\ = \sphericalangle A_1OA_n.$$

На рисунке 3 передан случай, когда определяется сумма трех углов:

$$\sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 + \sphericalangle A_3OA_4 = \sphericalangle A_1OA_4.$$

Для сохранения отмеченного ранее соответствия между величиной обобщенной дуги и центральным углом, стягивающимся этой дугой, целесообразно дать аналогичное определение и для суммы обобщенных дуг: *суммой двух или нескольких обобщенных дуг одной и той же окружности, расположенных так, что конец первой дуги совпадает с началом второй, конец второй совпадает с началом третьей и т. д., будем называть такую дугу, у которой началом служит начало первой дуги, а концом—конец последней дуги*; короче:

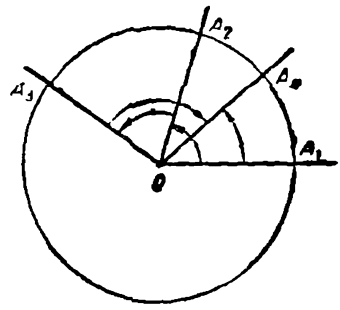


Рис. 3.

$$\smile A_1A_2 + \smile A_2A_3 + \smile A_3A_4 + \ldots + \smile A_{n-1}A_n = \smile A_1A_n.$$

На рисунке 3 имеет место случай сложения трех дуг:

$$\smile A_1A_2 + \smile A_2A_3 + \smile A_3A_4 = \smile A_1A_4.$$

Если данные обобщенные углы расположены на плоскости произвольно, то для отыскания их суммы берут какую-нибудь точку O и строят углы с вершиной в этой точке, равные данным и расположенные в такой последовательности, к которой применимо данное выше определение суммы углов. Суммой данных углов называют в этом случае сумму построенных указанным образом равных им углов.

На рисунке 4 передан случай сложения двух произвольно расположенных углов: $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle DEF$; $\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle ABC$; $\sphericalangle A_2OA_3 = \sphericalangle DEF$, следовательно,

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle DEF = \sphericalangle A_1OA_2 + \sphericalangle A_2OA_3 = \sphericalangle A_1OA_3.$$

Аналогичным образом находят сумму произвольно расположенных дуг одной окружности.

Нетрудно доказать, что сумма направленных дуг (углов) обладает переместительным и сочетательным свойством:

$$\smile AB + \smile DC = \smile CD + \smile AB.$$

$$\smile AB + (\smile CD + \smile EF) = (\smile AB + \smile CD) + \smile EF.$$

Разность обобщенных дуг и углов определяется так же, как и разность действительных чисел. Вычисление

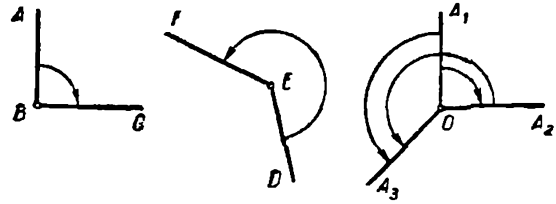


Рис. 4.

разности сводится к сложению заменой вычитаемой дуги (угла) противоположной дугой (противоположным углом):

$$\smile AB - \smile CD = \smile AB + \smile DC.$$

Действительно,

$$(\smile AB + \smile DC) + \smile CD = \smile AB + (\smile DC + \smile CD) = \smile AB,$$

так как $\smile DC + \smile CD = \smile DD = 0$.

§ 4. Различные меры углов и дуг и выделение наиболее удобной радианной меры

Существуют различные системы измерений круговых дуг и углов в зависимости от вида практики:

а) Практик-механик чаще измеряет углы, образующиеся при вращательных движениях, через число оборотов в 1 минуту или 1 секунду; так говорят, что вал рассчитан на 7000 оборотов в минуту.

б) Астроном же часто измеряет углы, образующиеся при вращении Земли вокруг оси, в часовых единицах; так как за 24 часа Земля поворачивается на 360°, то за 1^h (т. е. за 1 час) она повернется на 15°. Так говорят, что долгота г. Москвы $2^h30'28''$, что равно 37°37′.

в) Землемер всегда измеряет углы в градусных единицах, т. е. $\frac{1}{90}$ долей прямого угла.

Существует разновидность градусной меры, градовая мера, установленная одновременно с метрической системой мер во Франции (1799). Градом называется $\frac{1}{100}$ доля прямого угла.

Градусная	Градовая
$1^\circ = \frac{1}{90}d$	$1^{gr} = \frac{1}{100}d$
$1' = \frac{1}{60}\cdot 1^\circ$	$1^\backprime = 0{,}01 \cdot 1^{gr}$
$1'' = \frac{1}{60}\cdot 1'$	$1^{\backprime\backprime} = 0{,}01 \cdot 1^\backprime$.

Введение этой системы в практику значительно упростило бы все расчеты, но заменить все инструменты, связанные с измерением углов (часы, хронометры, астролябии, теодолиты и пр.), на новые единицы оказалось весьма дорогим и сложным делом, почему пока и оставлена старая вавилонская градусная система измерения дуг и углов.

г) Но наиболее удобной мерой измерения дуг и углов, связанных с вращательными движениями, оказалась мера радианная (радиусная), которая впервые в скрытом виде появилась в трудах Архимеда (287—212 г. до н. э. Сиракузы в Сицилии), медленно развивалась в трудах математиков XV—XVI вв. и оформилась в трудах гениев — Ньютона (1643—1727) и Лейбница (1646—1716), а вошла в науку через замечательные труды нашего петербургского академика Леонарда Эйлера (1707—1783).

Определение. *Радианной мерой обобщенной дуги называется отношение длины этой дуги к длине ее радиуса, взятое со знаком плюс, если дуга положительная, и со знаком минус, если дуга отрицательная.* Если длина

положительной $\smile AM = l$, а длина ее радиуса равна R, то радианная мера $\smile AM$

$$a = \frac{l}{R}. \qquad (2)$$

Так, если длина дуги $l = 17$ *см*, а радиус дуги $R = 5$ *см*, то ее радианная мера

$$a = \frac{17\ см}{5\ см} = \frac{17}{5} = 3{,}4.$$

Зная, что длина полуокружности ABC равна πR, находим ее радианную меру $a = \frac{\pi R}{R} = \pi = 3{,}1415...$

Положив в формуле (2) $l = R$, получим $a = 1$, следовательно, *единицей в радианной системе измерения дуг*

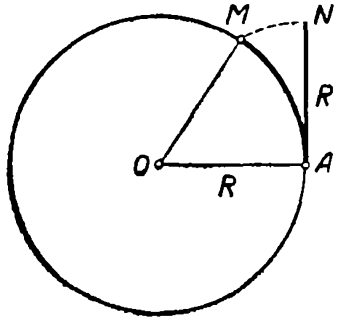


Рис. 5.

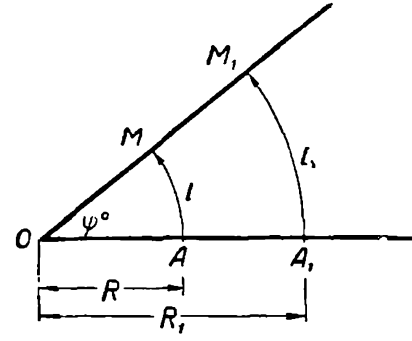


Рис. 6.

служит положительная дуга, длина которой равна ее радиусу. Такую дугу называют дуговым радианом.

Подобно тому как в градусной системе измерения дуг и углов за единицу измерения углов был принят центральный угол, опирающийся на дугу в 1°, так и *в радианной системе за единицу измерения углов естественно принять центральный угол, соответствующий дуговому радиану, т. е. опирающийся на положительную дугу, длина которой равна ее радиусу.* Такой угол называют угловым радианом. На рисунке 5 изображена дуга $AM = 1$ радиану, следовательно, опирающийся на эту дугу центральный угол AOM также равен 1 радиану. Ясно, что всякая круговая дуга и опирающийся на нее центральный угол при выбранных нами единицах измерения будут иметь одну и ту же радианную меру. Эта ме-

ра не зависит от длины радиуса; она прямо пропорциональна градусной мере дуги или угла.

В самом деле, возьмем произвольный угол AOM и опишем из его вершины различными радиусами R и R_1 дуги AM и A_1M_1 (рис. 6). Если градусная мера $\measuredangle AOM = \varphi^\circ$, то по известной теореме геометрии длины дуг AM и A_1M_1 выразятся числами:

$$l = \frac{2\pi R \cdot \varphi}{360} = \frac{\pi R}{180} \cdot \varphi \text{ и } l_1 = \frac{2\pi R_1 \cdot \varphi}{360} = \frac{\pi R_1}{180} \cdot \varphi.$$

Находим радианные меры этих дуг:

$$a = \frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi \text{ и } a_1 = \frac{l_1}{R_1} = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi.$$

Таким образом, дуги AM и A_1M_1 имеют одну и ту же радианную меру, пропорциональную градусной мере опирающегося на них центрального угла:

$$a = a_1 = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi = k\varphi,$$

где $k = \frac{\pi}{180}$ — коэффициент пропорциональности.

Полученную нами формулу

$$a = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi, \qquad (3)$$

в которой φ — градусная мера угла (дуги) и a — радианная мера угла (дуги), полезно запомнить, так как она дает возможность переходить от градусной меры к радианной и обратно.

Так, например, положив в этой формуле $\varphi = 1$, найдем радианную меру дуги (угла) в 1°:

$$a = \frac{\pi}{180} \cdot 1 = \frac{3,1415925\ldots}{180} = 0,01745329\ldots \approx 0,0175.$$

Положив в формуле (3) $a = 1$, найдем градусную меру дуги (угла) в 1 радиан:

$$1 = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi,$$

$$\text{откуда } \varphi = \frac{180}{\pi} \text{ или } \varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3.1415925\ldots} =$$

$$= 57^\circ,2958\ldots \approx 57^\circ 18'.$$

Пользуясь формулой (3), легко составить таблицу для перехода от градусной меры угла (дуги) к радианной и

обратно. Такая таблица имеется в четырехзначных математических таблицах Брадиса. Здесь мы даем таблицу только для таких углов и дуг, которые встречаются весьма часто.

φ°	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	18°	15°	10°	1°	φ°
радиан	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi\cdot\varphi}{180}$

Примечание. Для обозначения градусной меры углов и дуг как известно употребляются особые значки Так например запись

$$\smile AM = 73^\circ 48' 25''$$

означает что $\smile AM$ содержит 73 градуса, 48 минут и 25 секунд.

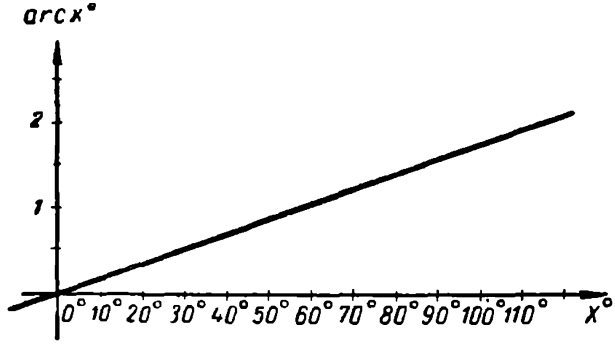


Рис. 7.

Для обозначения радианной меры никаких знаков не ввели Если дуга α содержит 3,5 радиана, то пишут: $\alpha = 3{,}5$ радиан, а иногда вовсе слово «радиан» опускают Так запись

$$\smile AB = 4$$

означает, что $\smile AB = 4$ радианам, т е. длина дуги больше длины ее радиуса в 4 раза.

Иногда записывают так: $\operatorname{arc} x^\circ = a$, где arc сокращенная передача латинского слова арка (arca) дуга.

Функция $y = \operatorname{arc} x^\circ$ может быть передана:

а) оперативно: $\operatorname{arc} x^\circ = \frac{\pi x^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi x}{180}$

б) табличио, как показано выше;

в) графически (рис. 7).

Практически перевод из одной единицы в другую хорошо осуществлять транспортиром с двумя сдвоенными шкалами — градусной и радианной, как показано на рисунке 8

Упражнения.

1. Выразить в радианах величину угла правильного n-угольника ($n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$).

2. Выразить в градусах и радианах величину угла, описанного минутной стрелкой часов в течение 7 суток (недели).

3. Точками $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{12}$, окружность разделена на 12 равных частей. Выразить в градусах и в радианах следующие суммы дуг и углов:

а) $\smile A_1A_4 + \smile A_4A_5 + \smile A_5A_7$;

б) $\smile A_5A_3 + \smile A_3A_5$;

в) $\sphericalangle A_2OA_3 + \sphericalangle A_3OA_2 + \sphericalangle A_2OA_6$;

г) $\sphericalangle A_4OA_2 + \sphericalangle A_3OA_6$;

д) $\sphericalangle A_2OA_1 + \sphericalangle A_1OA_2$;

е) $\smile A_7A_9 + \smile A_1A_2 + \smile A_2A_1$.

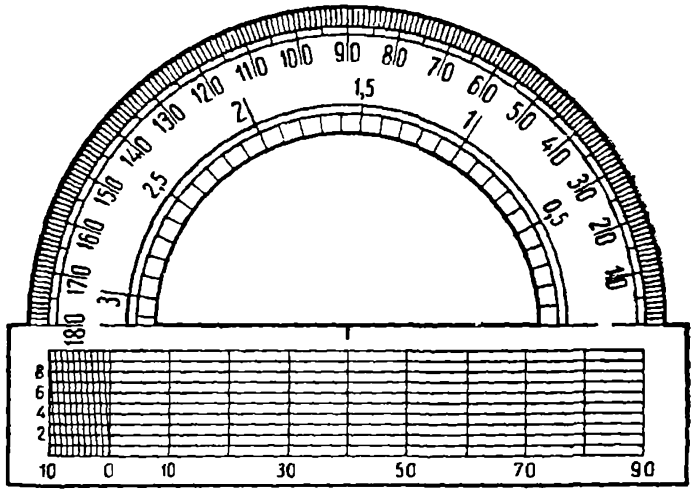


Рис. 8.

4. Маховик паровой машины имеет в диаметре 1,5 $м$ и делает 80 оборотов в минуту, вращаясь против часовой стрелки по отношению к наблюдателю:

а) выразить в радианной мере угловую скорость маховика;

б) выразить в радианах, а затем в метрах дугу, описанную за t секунд точкой, взятой на ободе маховика;

в) найти линейную скорость этой точки.

5. Изготовьте себе из плотного картона транспортир с радианной шкалой (до десятых долей).

§ 5. Числовая окружность

В алгебре часто пользуются числовой осью, т. е. прямой, на которой отмечается начальная точка O, еди-

ница масштаба OE, положительное направление (рис. 9) и каждому действительному числу z ставится в соответствие определенная точка M, служащая концом отрезка $OM = z$ единиц, причем отрезок OM откладывается от точки O в положительном направлении при $z > 0$ и в противоположном направлении при $z < 0$. Начальная точка O соответствует нулю. Число z называют координатой точки M и пишут $M(z)$. Каждая точка числовой оси имеет определенную и только одну координату.

Изучение функций, выражающих законы круговых движений, облегчается установлением соответствия между действительными числами и точками окружности. Для осуществления такого соответствия отмечают на окружности начальную точку A (рис. 10), выбирают положительное направление от точки A по окружности (противоположное направлению движения часовой стрелки) и единицу масштаба, причем за единицу масштаба всегда берут радиус окружности R. По аналогии с числовой прямой приписывают действительное число z такой точке M окружности, которая является концом дуги $AM = z$ радиан; это число называют круговой координатой точки M и пишут $M(z)$.

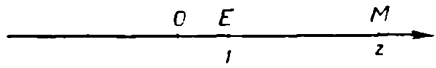


Рис. 9.

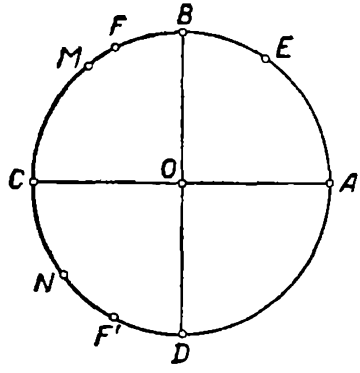


Рис. 10.

Нетрудно понять, что таким путем всякому действительному числу будет поставлена в соответствие определенная точка окружности. Так, числу 0 будет соответствовать сама начальная точка A, числу 1 будет соответствовать точка E—конец дуги $AE = 1$ радиану, числу 2 будет соответствовать точка F—конец дуги $AF = 2$ радианам, числу 7,3 будет соответствовать точка, служащая концом дуги в 7,3 радиана (при условии что началом дуги является A). Разумеется, всякому отрицательному числу будет соответствовать точка, служащая концом отрицательной дуги. Например числу $z = -2$ будет соответст-

вовать точка F' — конец отрицательной дуги $AF' = -2$ радианам.

Итак, мы нашли способ установления соответствия между числами и точками окружности. По аналогии с числовой прямой (осью) будем называть такую окружность в дальнейшем *числовой окружностью*. Однако следует заметить, что полной аналогии между числовой окружностью и числовой прямой нет. В самом деле, на числовой прямой осуществлено взаимно однозначное соответствие между числами и точками: каждому числу z соответствует одна точка M — конец отрезка OM, равного z единицам масштаба, и, обратно, каждой точке M соответствует единственное число z, равное длине отрезка OM, взятой со знаком $+$ или $-$ в зависимости от положения точки относительно начала O.

На числовой окружности также каждому числу z соответствует единственная точка M — конец дуги $AM = z$ радиан, но обратное соответствие не однозначно: каждой точке M числовой окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел, а именно — величины всех дуг, у которых началом является точка A, а концом — M. Две из этих дуг, наименьшие по длине, составляют целую окружность, причем одна дуга положительная, а другая отрицательная. Пусть положительная дуга равна a радиан, тогда отрицательная дуга, очевидно, равна $-(2\pi - a)$ или $(a - 2\pi)$ радианам. Все остальные дуги с тем же началом A и концом M будут отличаться от рассмотренных дуг целым числом окружностей, поэтому их величины выразятся числами:

1) $a + 2\pi,\quad a + 2\pi \cdot 2,\quad a + 2\pi \cdot 3, \ldots,\quad a + 2\pi \cdot n, \ldots;$

2) $a - 2\pi \cdot 2 = a + 2\pi(-2),\quad a - 2\pi \cdot 3 = a + 2\pi(-3),$

$a - 2\pi \cdot 4 = a + 2\pi(-4), \ldots,\ a - 2\pi \cdot m = a + 2\pi(-m), \ldots.$

Нетрудно видеть, что величины всех таких дуг возможно записать одной формулой:

$$z = a + 2\pi k, \quad \text{где} \quad k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (4)$$

Итак, каждой точке M на числовой окружности соответствует бесконечное множество чисел, записанных равенством (4); иначе говоря, точка M числовой окруж-

ности имеет бесконечное множество круговых координат вида

$$z = a + 2\pi k \quad (k \text{ — любое целое число}),$$

где a — наименьшая неотрицательная координата, т. е. величина наименьшей из всех неотрицательных дуг, имеющих начало в точке A и конец в точке M.

Эта особенность числовой окружности весьма наглядно иллюстрируется следующим образом.

Возьмем числовую ось с начальной точкой A и единицей масштаба AE (рис. 11), проведем окружность радиусом $R = AE = 1$, касающуюся оси в точке A. Представив себе числовую ось в виде тончайшей нерастяжимой нити будем мысленно наматывать ее положительный луч на окружность против часовой стрелки.

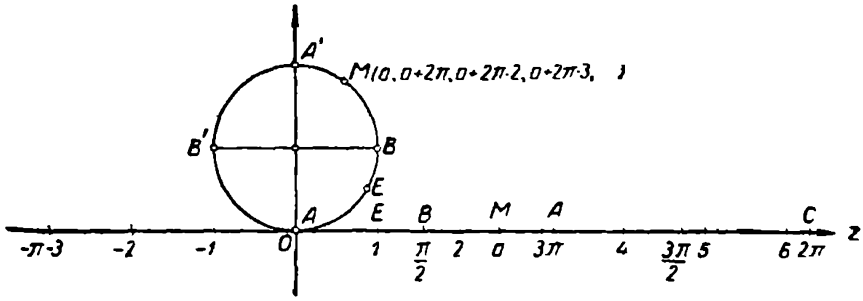


Рис. 11.

Тогда отрезок оси от 0 до 2π обовьет как раз всю окружность, так как ее длина при $R = 1$ равна 2π. Точки этого отрезка совместятся с точками окружности и таким путем каждой точке окружности поставится в соответствие по одному числу z из промежутка $0 \leqslant z < 2\pi$. Ясно, что точке M будет соответствовать такое число $z = a$, которым выражается радианная мера дуги AM.

Второй раз окружность обовьется той частью луча AE, на которой изображены числа от 2π до 4π, при этом каждой точке окружности поставится в соответствие еще по одному числу, большему на 2π приписанного при первом обороте. В частности, точке M припишется число $a + 2\pi$.

Третий раз окружность обовьется той частью луча AE, на которой изображены числа от 4π до 6π и каждой точке окружности поставится в соответствие еще одно

число, большее на 2π числа приписанного в предыдущий раз. Точке M припишется число $a + 2\pi \cdot 3$.

Продолжая мысленно процесс наматывания луча AE бесконечно, мы поставим в соответствие каждой точке M окружности бесконечное множество неотрицательных чисел вида:

$$z_1 = a + 2\pi \cdot n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где a — радианная мера наименьшей из неотрицательных дуг AM, имеющих начало в точке A и конец в точке M.

Далее проведем мысленно такой же процесс «навивания» на окружность отрицательного луча числовой оси по часовой стрелке. При этом каждой точке окружности припишется еще бесконечное множество отрицательных чисел, выражающих радианные меры отрицательных дуг с началом в точке A и концом M. Очевидно, точке M припишутся при этом числа:

$$-(2\pi - a) = a - 2\pi,\quad a - 2\pi \cdot 2,\quad a - 2\pi \cdot 3, \ldots$$

или

$$a + 2\pi(-1),\quad a + 2\pi(-2),\quad a + 2\pi(-3), \ldots,$$

которые можно записать одной формулой:

$$z_n = a + 2\pi(-m) \quad (m = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

В результате таких операций все точки числовой оси совместятся с точками окружности так, что каждой точке M этой окружности будет поставлено в соответствие бесконечное множество чисел вида

$$z = a + 2\pi k \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$

где a — радианная мера наименьшей из неотрицательных дуг с началом A и концом M. К такому же выводу мы пришли выше иным путем.

К установленному нами соответствию между точками окружности и точками числовой оси можно прийти и другим путем. А именно, представим себе мысленно, что окружность, изображенная на рисунке 11, катится по числовой оси без скольжения «вправо» и при этом на ней «отпечатываются» точки оси вместе с изображенными в них числами.

Так как длина окружности равна 2π ($R = 1$), то первый оборот окружность сделает на отрезке оси от 0 до 2π, второй оборот на отрезке от 2π до 4π, третий — на отрезке от 4π до 6π и т. д.

При первом обороте точки окружности вступят во взаимно однозначное соответствие с числами промежутка $[0;\ 2\pi)$, при втором

обороте те же точки вступят во взаимно однозначное соответствие с числами промежутка $[2\pi;\ 4\pi)$, при третьем обороте — с числами промежутка $[4\pi;\ 6\pi)$ и т. д.

Таким образом, после n оборотов окружности каждой ее точке будет поставлено в соответствие n различных действительных чисел из промежутков $[0;\ 2\pi)$, $[2\pi;\ 4\pi)$, $[4\pi;\ 6\pi)$, ..., $[2(n-1)\pi,\ 2n\pi)$, причем, если при первом обороте какая-нибудь точка M окружности вступит в соответствие с числом a, то при втором обороте ей поставится в соответствие второе число $a+2\pi$, при третьем обороте — третье число $a+2\pi\cdot 2$, при четвертом обороте — четвертое число $a+2\pi\cdot 3$ и т. д. Все эти числа можно записать одной формулой

$$a+2\pi\cdot n, \quad \text{где} \quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

Повторив мысленно такой же процесс качения окружности «влево» от точки 0, мы поставим в соответствие каждой ее точке бесконечное множество чисел вида

$$a+2\pi\cdot k,$$

где $k=0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$.

На первый взгляд может показаться весьма неудобным установленный нами вид соответствия между действительными числами и точками окружности, однако в дальнейшем вы увидите, что именно такое соответствие делает числовую окружность эффективным средством при изучении круговых функций, к которым мы теперь и переходим.

Примечание. В дальнейшем при определении и изучении круговых функций мы всегда будем иметь дело с числовой окружностью, радиус которой принят за единицу, отнесенной к осям прямоугольных координат, так что ее центр совпадает с началом координат, а начальная точка A лежит на положительном луче оси абсцисс (см. рис. 15, стр. 122). Поэтому ради краткости, говоря о числовой окружности, будем всегда иметь в виду, что она отнесена указанным здесь способом к осям координат.

Упражнения.

1. Отметить на числовой прямой и на числовой окружности точки, соответствующие числам: $-\frac{\pi}{6}$, 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, ..., образующим бесконечную арифметическую прогрессию.

Сколько таких точек будет на числовой окружности и сколько на оси?

2. Укажите на числовой оси и на числовой окружности точки, соответствующие числам:

$$z=\pi k \quad \text{и} \quad z_1=\frac{\pi}{2}(2k+1) \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Сколько таких точек на числовой окружности и сколько на оси?

3. Как расположатся на числовой окружности точки, соответствующие числам:

$$a,\ a+\frac{2\pi}{n}\quad a+\frac{2\pi}{n}\cdot 2,\ a+\frac{2\pi}{n}\cdot 3,\ \ldots,\ a+\frac{2\pi}{n}(n-1)?$$

4. Число $a=0{,}73$ является круговой координатой точки M на числовой окружности.

Написать все круговые координаты точки M.

5. Зная, что $-1{,}5$ есть одна из круговых координат точки M на числовой окружности, найти все круговые координаты этой точки.

6. На числовой оси (на числовой окружности) отмечена точка $M(z)$. Отметьте на оси (на числовой окружности) точки, соответствующие числам $z+a$ и $z-a$ $\left(a=1,\ 2,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4},\ \pi,\ 2\pi\right)$.

7. Как изменится положение точки $M(z)$ на числовой оси (на числовой окружности), если ее координату z:

а) увеличить на a;

б) уменьшить на a $\left(a=1,\ 2,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ 4\pi\right)$.

8. Найти геометрическое место точек на числовой оси (на числовой окружности), соответствующих тем числам z, которые удовлетворяют неравенству

$$-a\leqslant z\leqslant +a\quad\left(a=0,\ 1,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

9. Какую дугу числовой окружности описывает точка $M(z)$, если ее координата z изменяется непрерывно:

а) от 0 до π; б) от 0 до $-\frac{\pi}{2}$; в) от 0 до -40π; г) от $\frac{\pi}{2}$ до π;

д) от $\frac{\pi}{2}$ до 0; е) от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$?

10. Найти круговые координаты точек, в которых числовая окружность пересекается с осями координат.

11. Найти круговые координаты точек, в которых числовая окружность пересекается биссектрисами координатных углов.

Рассмотрим, какое положение относительно оси Ox занимают точки числовой окружности $M(z)$ и $M'(-z)$.

Оказывается, эти точки симметричны относительно оси Ox.

Действительно, разделим z на 2π, получим:

$$z=2\pi k+a,\quad \text{где}\quad 0\leqslant|a|<2\pi.\ (*)$$

Числа z и a изображаются, как известно, на числовой окружности одной точкой; обозначим ее через M (рис. 12).

Умножив обе части равенства (*) на -1, получим:

$$-z = -2\pi k + (-a).$$

Как видим, числа $-z$ и $-a$ также изображаются на окружности одной точкой; обозначим ее через M'. Проведем хорду MM'. Точка A делит $\smile MM'$ пополам, следовательно, диаметр AA' разделит хорду MM' пополам и будет перпендикулярен этой хорде (теорема геометрии). Но это

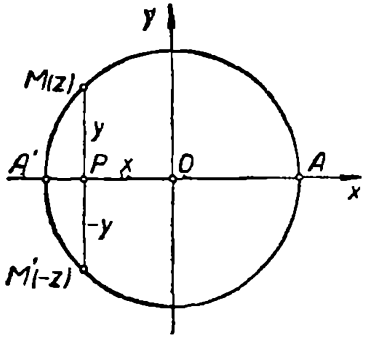


Рис. 12.

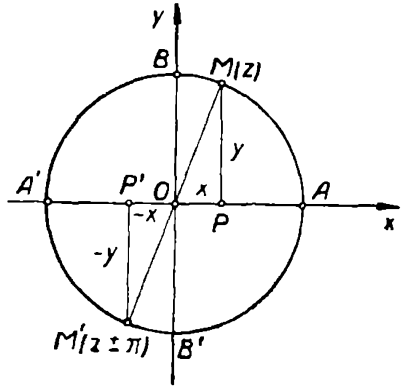


Рис. 13.

и значит, что точки M и M' симметричны относительно Ox.

Выясним, какое положение относительно осей координат занимают на числовой окружности точки $M(z)$ и $M'(\pi + z)$.

Покажем, что эти точки симметричны относительно начала координат.

Действительно, дуги $AM = z$ радиан и $AM' = z + \pi$ радиан отличаются полуокружностью, следовательно, они оканчиваются в точках диаметрально противоположных, т. е. симметричных относительно центра числовой окружности (рис. 13).

Найдем условие, которому удовлетворяют числа, соответствующие точкам первой четверти числовой окружности.

Точками первой четверти числовой окружности изображаются числа z, удовлетворяющие условию:

$$2\pi k \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (**)$$

Действительно, обозначим через a наименьшую неотрицательную координату произвольной точки первой четверти окружности, тогда будем иметь:

$$0 \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Прибавив к каждой части этого соотношения по $2\pi k$, получим:

$$2\pi k \leqslant a + 2\pi k \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Но если a — координата некоторой точки, то $z = a + 2\pi k$ (при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) выражает любую координату этой точки, следовательно, соотношение (**) есть искомое.

Найдите условия, которым удовлетворяют числа, соответствующие:

а) точкам II четверти числовой окружности;

б) точкам III четверти числовой окружности;

в) точкам IV четверти числовой окружности.

ГЛАВА II

КРУГОВЫЕ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

§ 6. Простейшие периодические процессы

Каждому приходилось наблюдать за движением различных частей всевозможных машин и станков.

Характерной особенностью часто встречающихся движений является их повторяемость через один и тот же промежуток времени. Такие движения называют периодическими[1].

Клапаны парораспределительного механизма паровой машины периодически открываются и закрываются, поршень машины, подобно маятнику часов, периодически повторяет свое прямолинейное движение от одного своего крайнего положения к другому и обратно, маховик и коленчатый вал совершают повторяющиеся круговые движения и т. д.

Но не только механические движения могут иметь периодический характер. Таким свойством обладают многие световые, звуковые и электромагнитные явления, а также целый ряд явлений, наблюдаемых нами в самой природе (движение планет, смена дня и ночи, смена времен года, приливы и отливы на морях и т. п.) и в организме человека (работа сердца и кровообращения).

Периодические процессы и явления изучаются физиками, механиками, астрономами, математиками и другими учеными. Закономерности тех или иных периодических явлений ученые записывают в виде функции, а затем, исследуя эти функции, раскрывают внутреннее содержание

[1] Более подробное и точное определение периодических процессов будет дано далее, в главе IV, § 15.

таких явлений и указывают пути практического использования их на благо человека.

Рассмотрим более подробно какой-нибудь из периодических процессов, встречающихся в технической практике. Возьмем, например, простейший механизм, в котором круговое движение преобразуется в прямолинейное. На принципе работы такого механизма устроено много машин и станков. На рисунке 14 изображена его схема.

Насаженное на ось O колесо K соединено посредством «пальца» M с рамкой N. При вращении колеса вокруг его оси палец M совершает круговое движение, увлекая за собой рамку; последняя скользит вдоль направляющих ее станин F и совершает колебательное периодическое движение. Если рамку N соединить посредством штока E с какой-нибудь деталью (например, с поршнем насоса), то последняя будет совершать такое же движение, которое делает рамка.

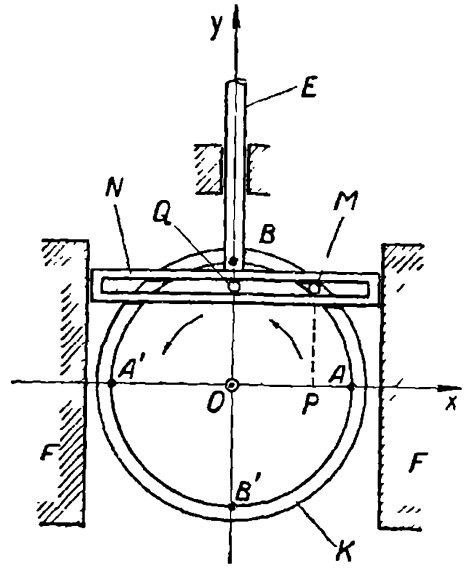


Рис. 14.

Для выяснения закона движения рамки построим оси координат, как это сделано на рисунке, причем за единицу измерения примем ради простоты радиус колеса R. Наблюдение начнем с того момента, когда палец M находится на оси абсцисс в точке A.

Пусть колесо вращается равномерно против часовой стрелки, делая в 1 сек. полный оборот, тогда угловая скорость вращения $\omega = 2\pi$ рад/сек и, следовательно, палец M опишет за t сек. дугу $AM = 2\pi t$ радиан. За первую четверть секунды палец M опишет первую четверть окружности, а рамка N «поднимется вверх» на расстояние $OB = R$. Во вторую четверть секунды палец M опишет вторую четверть окружности, а рамка возвратится в свое

прежнее положение AA'. Далее палец M описывает третью четверть окружности, а рамка N скользит «вниз» до крайнего нижнего положения B'. В следующую четверть секунды палец M опишет последнюю четверть окружности и возвратится в свое исходное положение A и рамка N также придет в свое первоначальное положение AA'. Таким образом, в течение первой секунды палец M опишет полную окружность, а рамка N совершит полное колебание, пройдя дважды расстояние между своими крайними положениями B и B'. Далее процесс движения рамки будет периодически повторяться через каждую секунду.

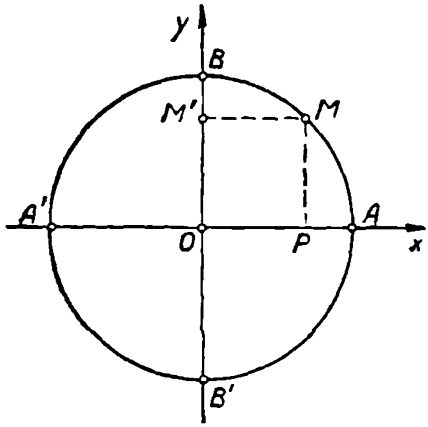


Рис. 15.

Понятно, что в каждый момент времени t расстояние рамки от оси абсцисс будет равно расстоянию пальца M от этой оси, т. е. ординате точки M. Это обстоятельство показывает, что закон движения рамки тот же, что и закон изменения ординаты точки M, совершающей равномерное движение по окружности радиуса R, при условии, что эта окружность отнесена к прямоугольным осям координат так, так показано на схеме механизма (рис. 12). Припоминая, что таким именно путем связана с осями координат числовая окружность (глава 1, § 4), можно считать, что точка M движется по числовой окружности, описывая ее в течение 1 сек. (рис. 15).

Обозначим через M' проекцию точки M на ось Oy (т. е. основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось Oy). Ясно, что при движении точки M по окружности ее проекция M' будет совершать на оси Oy точно такое же колебательное движение, какое совершает рамка N рассмотренного нами механизма. А именно, пока точка M опишет полную окружность, двигаясь из своего начального положения A против часовой стрелки, ее проекция M' на ось ординат пройдет от центра окружности до верхнего конца диаметра $B'B$, затем изменит в точке B направление движения на противоположное, пройдет до

нижнего конца диаметра $B'B$ и оттуда снова возвратится в центр окружности. Далее, точка M будет повторять свое движение по окружности, а ее проекция M' будет повторять указанное выше движение по диаметру BB'.

Всякое движение, подобное тому, которое совершает точка M', в физике называется простым гармоническим колебанием.

Изучение простых гармонических колебаний имеет исключительно важное значение, так как по законам таких колебаний совершаются движения многих деталей различных механизмов, машин и станков, а также протекают многие явления в области электричества, света и звука. Более того, в начале прошлого столетия французский математик Фурье (1768—1830) доказал, что законы всяких периодических процессов могут быть выражены через законы простых гармоических колебаний.

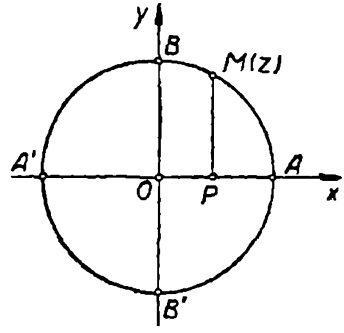


Рис. 16.

Таким образом, поставленная нами выше задача изучения одного из простейших механизмов привела нас к необходимости отыскания и изучения функций, выражающих законы простых гармонических колебаний. Такие функции называют круговыми или тригонометрическими, так как они выражают изменение координат точки M, совершающей круговое движение.

Перейдем теперь к определению и детальному изучению круговых функций.

§ 7. Определение круговых (тригонометрических) функций

Возьмем какое-нибудь произвольное действительное число z. На числовой окружности $O(R)$ (рис. 16) этому числу соответствует точка $M(z)$ так, что дуга $AM = z$ радиан. Построим прямоугольные координаты точки $M(z)$: $PM = y$ и $OP = x$ и найдем их отношения к радиусу окружности: $\frac{PM}{R} = \frac{y}{R}$ и $\frac{OP}{R} = \frac{x}{R}$. Можно сказать, что числу z соответствуют определенные отношения $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{R}$.

Представим себе теперь, что число z изменяется. Ясно, что при этом будет меняться положение точки $M(z)$ на числовой окружности, а следовательно, будут изменяться и прямоугольные координаты этой точки $y=PM$ и $x=OP$, а также их отношения к радиусу $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{R}$. Таким путем мы обнаруживаем три переменные величины z, $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{R}$, из которых последние две находятся в зависимости от первой, а именно: каждому значению величины z соответствуют вполне определенные значения величин $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{R}$. В таких случаях говорят, что отношения $\frac{y}{R}$ и $\frac{x}{R}$ являются функциями величины z и пишут:

$\frac{y}{R}$ есть функция z,	$\frac{x}{R}$ есть функция z,
короче: $\frac{y}{R}=f(z)$	короче: $\frac{x}{R}=\varphi(z)$,

где буквами f и φ обозначаются условно совокупности тех операций, которые необходимо выполнить, чтобы получить указанные отношения.

Первую из этих функций в XII веке стали называть синусом, а вторую — косинусом. В XVIII веке знаменитый петербургский академик Леонард Эйлер ввел для них следующие краткие обозначения:

$$\frac{y}{R}=\sin z \text{ и } \frac{x}{R}=\cos z.$$

Определение синуса и косинуса

Синусом действительного числа z, которому соответствует на числовой окружности точка $M(z)$, называется отношение ординаты этой точки к радиусу окружности, т. е. число $\frac{y}{R}$.

Косинусом действительного числа z, которому соответствует на числовой окружности точка $M(z)$, называется отношение абсциссы этой точки к радиусу окружности, т. е. число $\frac{x}{R}$.

Примечание. Если радиус числовой окружности $R=1$, то данные определения приводят нас к следующим соотношениям

$$\sin z=\frac{y}{1}=y, \quad \cos z=\frac{x}{1}=x,$$

т. е. численно $\sin z$ и $\cos z$ равны соответственно ординате и абсциссе точки $M(z)$.

Выясним смысл данных определений на примерах.

Пример 1. Пусть дано действительное число $z=\frac{3}{2}\pi$. Как найти синус и косинус этого числа?

Решение. Числу $\frac{3}{2}\pi$ соответствует на числовой окружности точка B' (рис. 17), у которой ордината $y=OB'=-R$ и абсцисса $x=0$, следовательно, по данному выше определению получаем:

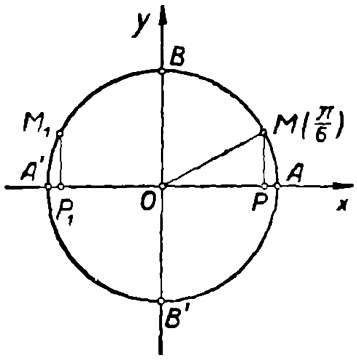


Рис. 17.

$$\sin\frac{3}{2}\pi=\frac{-R}{R}=-1,$$

$$\cos\frac{3}{2}\pi=\frac{0}{R}=0.$$

Пример 2. Найти $\sin z$ и $\cos z$, если $z=\frac{\pi}{6}$.

Решение. Отложим на числовой окружности дугу $AM=\frac{\pi}{6}$ радиан, т. е. 30°; получаем точку $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, соответствующую данному числу $\frac{\pi}{6}$ (рис. 17). Опускаем из точки M перпендикуляр MP на ось Ox, получаем прямоугольные координаты точки M:

$$y=PM \text{ и } x=OP;$$

по определению функций $\sin z$ и $\cos z$ имеем:

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{y}{R}=\frac{PM}{R}, \quad \cos\frac{\pi}{6}=\frac{x}{R}=\frac{OP}{R}.$$

Проводим радиус OM, получим прямоугольный треугольник POM с углом $POM=\frac{\pi}{6}$ радиан или 30°. По из-

вестной теореме геометрии в таком треугольнике катет PM, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы OM, т. е.

$$PM = \frac{1}{2} R,$$

следовательно, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2} R}{R} = \frac{1}{2}$.

По теореме Пифагора находим другой катет:

$$OP = \sqrt{OM^2 - PM^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

следовательно, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2} R\sqrt{3}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3. Найти $\sin z$ и $\cos z$, если $z = -3{,}7$.

Решение. С помощью транспортира с радианной шкалой строим на числовой окружности дугу $AM_1 = -3{,}7$ радиан (рис. 17), получаем точку M_1, соответствующую числу $z = -3{,}7$. Измерением находим ординату точки M_1: $y = P_1M_1 \approx 0{,}53\,R$, следовательно,

$$\sin(-3{,}7) \approx \frac{0{,}53\,R}{R} = 0{,}53.$$

Измерением находим абсциссу точки M_1: $x = OP_1 \approx -0{,}85\,R$, следовательно,

$$\cos(-3{,}7) \approx \frac{-0{,}85\,R}{R} = -0{,}85.$$

Данное выше определение синуса позволяет выразить функцией закон движения рамки механизма, рассмотренного нами в предыдущем параграфе. По условию палец M на колесе этого механизма (см. рис. 14) совершает круговое движение со скоростью ω рад/сек, следовательно, в течение t сек. он опишет дугу $AM = z = \omega t$ радиан.

По определению синуса действительного числа z будем иметь: $\sin z = \frac{PM}{R}$ откуда $PM = R \sin z = R \sin \omega t$.

В частности, когда $\omega = 1$ рад/сек и $R = 1$, получаем

$$PM = y = \sin t.$$

Очевидно, аргументом этой функции целесообразно считать время t. В каждый момент времени t отклонение рамки от ее исходного, т. е. среднего, положения AA' равно $\sin t$.

Функции $\sin z$ и $\cos z$ являются основными круговыми функциями. Кроме них, имеются и другие круговые функции: тангенс, котангенс, секанс и косеканс, которые также выражают законы некоторых периодических процессов. Дадим определение тангенса и котангенса.

Тангенсом действительного числа z, которому на числовой окружности соответствует точка $M(z)$, называют отношение ординаты точки M к ее абсциссе.

Краткая запись: $\operatorname{tg} z = \frac{y}{x}$. (6)

Котангенсом действительного числа z, которому на числовой окружности соответствует точка $M(z)$, называют отношение абсциссы точки M к ее ординате.

Краткая запись: $\operatorname{ctg} z = \frac{x}{y}$. (7)

Легко усмотреть, что функция $\operatorname{tg} z$ определена для всех действительных чисел $z \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, а функция $\operatorname{ctg} z$ — для чисел $z \neq \pi k$ (k — целое число).

В самом деле, по определению $\operatorname{tg} z = \frac{y}{x}$, а $\operatorname{ctg} z = \frac{x}{y}$, где x и y — прямоугольные координаты точки $M(z)$. Но отношение $\frac{y}{x}$ не существует при $x = 0$, а отношение $\frac{x}{y}$ не существует при $y = 0$, следовательно, $\operatorname{tg} z$ не существует для тех чисел z, которые изображаются на числовой окружности в точках B и B' (рис. 16), имеющих абсциссу $x = 0$, а $\operatorname{ctg} z$ не существует для тех чисел z, которые изображаются на числовой окружности в точках A и A', имеющих ординату $y = 0$. Заметив, что в точках B и B' изображаются числа $z = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,

а в точках A и A' — числа $z = \pi k$ (§ 5), убеждаемся в справедливости сказанного.

Покажем на примерах, как находить значения тангенса и котангенса, пользуясь их определениями.

Пример 1. Найти $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$, если $z = \frac{\pi}{6}$.

Решение. В примере 2 (стр. 125) мы уже нашли на числовой окружности точку $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (рис. 17), соответствующую числу $z = \frac{\pi}{6}$, и определили прямоугольные координаты этой точки:

$$x = OP = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \text{ и } y = PM = \frac{1}{2} R.$$

По определению тангенса и котангенса получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2} R}{\frac{1}{2} R\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2} R\sqrt{3}}{\frac{1}{2} R} = \sqrt{3}.$$

Пример 2. Найти $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ для $z = -3{,}7$.

Решение. В примере 3 (стр. 126) мы уже отметили на числовой окружности точку M_1 $(-3{,}7)$, соответствующую числу $z = -3{,}7$, и нашли прямоугольные координаты этой точки: $x \approx -0{,}85\,R$ и $y \approx 0{,}53\,R$. Используя эти данные и определение тангенса и котангенса, получаем:

$$\operatorname{tg}(-3{,}7) = \frac{y}{x} \approx \frac{0{,}53\,R}{-0{,}85\,R} \approx -0{,}62; \quad \operatorname{ctg}(-3{,}7) = \frac{x}{y} \approx$$

$$\approx \frac{-0{,}85\,R}{0{,}53\,R} \approx -1{,}6.$$

Пример 3. Найти $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ при $z = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Числу $z = \frac{\pi}{2}$ на числовой окружности соответствует точка B (рис. 16), у которой абсцисса

$x = 0$, а ордината $y = R$. По определению $\operatorname{tg} z = \frac{y}{x}$ и $\operatorname{ctg} z \frac{x}{y}$. Но в данном случае отношение $\frac{y}{x}$ не существует, поэтому не существует и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ (что вполне соответствует области определения тангенса); отношение $\frac{x}{y} = \frac{0}{R} = 0$, следовательно,

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0.$$

Пример 4. Найти $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ при $z = 3\pi$.

Решение. Числу $z = 3\pi$ на числовой окружности соответствует точка A' (рис. 16), у которой абсцисса $x = -R$, а ордината $y = 0$. Видим, что в данном случае отношение $\frac{y}{x} = \frac{0}{-R} = 0$, следовательно, $\operatorname{tg} 3\pi = 0$; отношение $\frac{x}{y}$ не существует, поэтому не существует и $\operatorname{ctg} 3\pi$, что соответствует установленной выше области определения котангенса.

Дадим определенне секанса и косеканса.

Секансом (косекансом) действительного числа z, которому на числовой окружности соответствует точка $M(z)$, называется отношение радиуса этой окружности к абсциссе (ординате) точки $M(z)$.

Краткая запись:

$$\left.\begin{aligned} \sec z &= \frac{R}{x} \\ \operatorname{cosec} z &= \frac{R}{y} \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Легко усмотреть, что функция $\sec z$ определена для всех действительных чисел $z \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, а функция $\operatorname{cosec} z$ — для чисел $z \neq \pi k$ (k — целое число), т. е. аналогично соответственно функциям $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$.

Покажем на примерах, как находить значение секанса и косеканса, пользуясь их определеннями.

Пример 1. Найти $\sec z$ и $\operatorname{cosec} z$, если $z = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Из прямоугольного равнобедренного треугольника получаем:

$x^2 + y^2 = R^2$; так как $x = y$, то $2x^2 = R^2$, $x = y = \frac{R}{\sqrt{2}}$

Откуда $\sec \frac{\pi}{4} = \frac{R}{x} = R : \frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} = \frac{R}{y} = R : \frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Найти $\sec z$ и $\operatorname{cosec} z$, если $z = \frac{7}{6}\pi$.

Решение. Отметим, что точка $z = \frac{7}{6}\pi$ находится в III четверти окружности, где x и y имеют отрицательные значения. Из соответствующего прямоугольного треугольника находим $|x| = \frac{1}{2} R\sqrt{3}$ и $|y| = \frac{1}{2} R$, а потому

$$\sec \frac{7}{6}\pi = \frac{R}{x} = \frac{R}{-\frac{1}{2} R\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{cosec} \frac{7}{6}\pi = \frac{R}{y} = \frac{R}{-\frac{1}{2} R} = -2.$$

Отметим, что из трех чисел x, y, R, связанных с точкой $M(z)$ на окружности, можно образовать шесть размещений, по два, а именно: 1) (y, R); 2) (x, R); 3) (y, x); 4) (x, y); 5) (R, x); 6) (R, y), поэтому и круговых функций получается только шесть, а именно: 1) $\sin z = \frac{y}{R}$, 2) $\cos z = \frac{x}{R}$, 3) $\operatorname{tg} z = \frac{y}{x}$, 4) $\operatorname{ctg} z = \frac{x}{y}$, 5) $\sec z = \frac{R}{x}$ и 6) $\operatorname{cosec} z = \frac{R}{y}$.

Выдающийся арабский астроном аль-Батани (850—929) обнаружил, что четыре последние из этих функций выражаются через первые две. В самом деле,

$$\operatorname{tg} z = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{R}}{\frac{x}{R}} = \frac{\sin z}{\cos z};$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{R}}{\frac{y}{R}} = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\sec z = \frac{R}{x} = \frac{1}{\frac{x}{R}} = \frac{1}{\cos z};$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{R}{y} = \frac{1}{\frac{y}{R}} = \frac{1}{\sin z}.$$

Короче:

$$\operatorname{tg} z \equiv \frac{\sin z}{\cos z} \quad \left(z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right); \tag{9}$$

$$\operatorname{ctg} z \equiv \frac{\cos z}{\sin z} \quad (z \neq \pi k); \tag{9, a}$$

$$\sec z \equiv \frac{1}{\cos z} \quad \left(z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right); \tag{9, b}$$

$$\operatorname{cosec} z \equiv \frac{1}{\sin z} \quad (z \neq \pi k), \tag{9, c}$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Эти формулы позволяют вычислить значения тангенса, котангенса, секанса и косеканса, если уже известны соответствующие значения синуса и косинуса.

Так, например, выше мы нашли, используя теоремы геометрии, что $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, а $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно, по формулам (9, a, b, c) получаем:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3};$$

$$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Упражнения.

1. Начертите на миллиметровой или на обычной бумаге, разграфленной в клетку, окружность радиусом 5 или 10 *см*, проведите оси координат так, чтобы эта окружность стала числовой, и с помощью последней заполните следующую таблицу:

z	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	2	3	π	4	$\frac{3\pi}{2}$	5	6	2π	7	8	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	-1	$-2{,}5$
$\sin z$																				
$\cos z$																				
$\operatorname{tg} z$																				
$\operatorname{ctg} z$																				

2. Найти значения $\sin z$ и $\cos z$ при: а) $z = \pi(2k+1)$; б) $z = 2\pi k$; в) $z = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ (k — произвольное целое число).

3. Найти значения $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ при $z = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ (k — целое).

4. При каких значениях аргумента z функция $\sin z = 1$?
5. При каких значениях аргумента z функция $\cos z = 0$?
6. При каких значениях аргумента z функция $\operatorname{tg} z = 0$?
7. При каких значениях аргумента z функция $\operatorname{ctg} z = 0$?
8. Доказать неравенство:

$$\sin z + \cos z > 1, \text{ если } 0 < z < \frac{\pi}{2}.$$

9. Определить знак: 1) $\sin 4$; 2) $\cos 5$; 3) $\operatorname{tg} 5$; 4) $\operatorname{ctg} 8$; 5) $\sin(-3)$; 6) $\sin 1 \cdot \cos(-1)$; 7) $\sin 2 \cdot \cos 2$.

10. Найти приближенно (построением):
1) $\sin 1$, 2) $\cos(-3{,}4)$.

§ 8. Круговые функции любого действительного числа как обобщение тригонометрических функций острого угла

В определениях круговых функций, данных в предыдущем параграфе, аргументом является число z, выражающее меру дуги AM, а следовательно, и меру угла AOM, опирающегося на эту дугу (рис. 18). Это обстоятельство позволяет истолковывать аргумент z у круговых функций как дугу или угол в z радиан, что бывает необходимо при решении различных практических задач.

Так, например, выражая закон гармонического движения рамки функцией $y = \sin z$, мы исходили из того,

что числом $z = \omega t$ радиан определялась мера дуги AM, описанной пальцем M за t секунд, или мера угла AOM, на который повернулось колесо механизма за t секунд.

Итак, будем в дальнейшем в случае надобности читать функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ так: синус дуги или угла в z радиан, косинус дуги или угла в z радиан и т. д.

Однако при этом возникает законный вопрос: не вступим ли мы в противоречие с теми определениями синуса, косинуса, тангенса и котангенса, которые были даны в первой части этой книги.

Оказывается, таких противоречий не будет, так как изученные нами функции острых углов представляют частные случаи круговых функций, когда аргумент последних изменяется в интервале от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

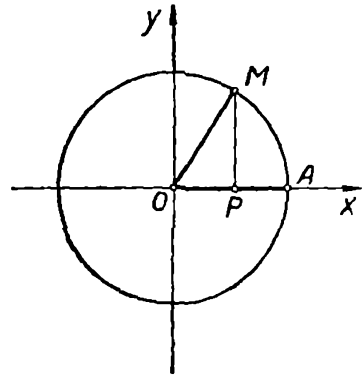


Рис. 18.

В самом деле, пусть нам дан острый угол в z радиан. Построим на числовой окружности равный ему угол AOM и проведем MP перпендикулярно OA (рис. 18), получим прямоугольный треугольник POM с гипотенузой $OM = R$ и катетами PM и OP. По определению тригонометрических функций острого угла находим:

$$\left.\begin{aligned} \sin AOM &= \frac{PM}{R}, & \cos AOM &= \frac{OP}{R} \\ \operatorname{tg} AOM &= \frac{PM}{OP}, & \operatorname{ctg} AOM &= \frac{OP}{PM} \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Но если угол $AOM = z$ радиан, то и стягивающая его дуга $AM = z$ радиан. Отсюда следует, что точке M соответствует на числовой окружности число z. По определению круговых функций имеем:

$$\sin z = \frac{PM}{R}; \quad \cos z = \frac{OP}{R}; \quad \operatorname{tg} z = \frac{y}{x} = \frac{PM}{OP};$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{x}{y} = \frac{OP}{PM}. \quad (**)$$

Сопоставляя равенства (*) и (**), получаем:

$$\sin AOM = \sin z; \qquad \cos AOM = \cos z;$$

$$\operatorname{tg} AOM = \operatorname{tg} z; \qquad \operatorname{ctg} AOM = \operatorname{ctg} z;$$

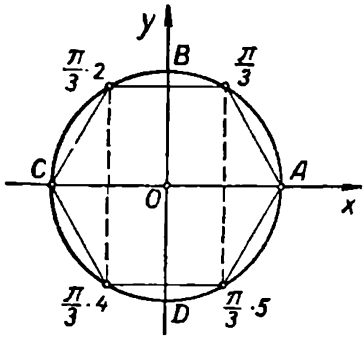


Рис. 19.

следовательно, круговые функции действительного числа являются обобщениями тригонометрических функций острого угла.

Упражнения.

1. Найти значения круговых функций $\sin z$ и $\cos z$ для дуг $z = \frac{\pi n}{3}$ (n — произвольное целое число).

Указание. Разделим n на 6, получим $n = 6k + r$, где $r = 0; 1; 2; 3; 4; 5$. Решение целесообразно расположить так (рис. 19):

n	z	Точки на числовой окружности	$\sin z$	$\cos z$
$6k+0$	$0+2\pi k$	A	0	1
$6k+1$	$\frac{\pi}{3}+2\pi k$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$6k+2$	$\frac{\pi}{3}\cdot 2+2\pi k$	$\frac{\pi}{3}\cdot 2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$6k+3$	$\frac{\pi}{3}\cdot 3+2\pi k$	C	0	-1
$6k+4$	$\frac{\pi}{3}\cdot 4+2\pi k$	$\frac{\pi}{3}\cdot 4$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$6k+5$	$\frac{\pi}{3}\cdot 5+2\pi k$	$\frac{\pi}{3}\cdot 5$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. Дан угол ABC с начальной стороной BA и второй стороной BC (рис. 20, *а*, *б*). Найти синус и косинус этого угла.

Указание. 1-й способ: на числовой окружности построить $\sphericalangle AOM = \sphericalangle ABC$ (рис. 20, *а*) и провести $MP \perp Ox$, тогда $\sin \sphericalangle ABC = \frac{PM}{OM}$, $\cos \sphericalangle ABC = \frac{OP}{OM}$.

2-й способ: из вершины B данного угла описать окружность радиусом $R = 1$ и сделать ее числовой, приняв начальную сторону

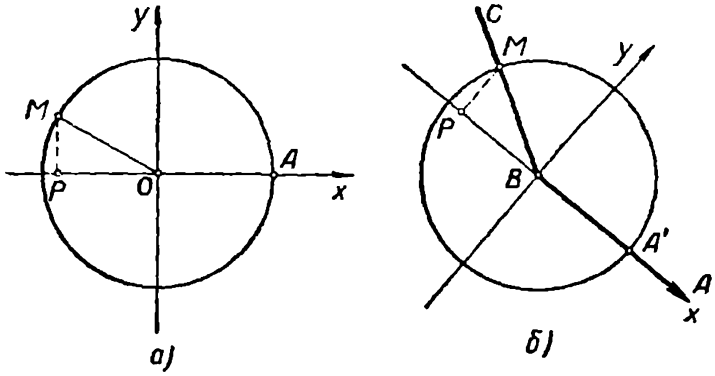


Рис. 20.

угла BA за положительный луч оси абсцисс (рис. 20, *б*), отметить точку M, в которой сторона BC пересекает окружность, и провести $MP \perp AB$, тогда

$$\sin \sphericalangle ABC = \frac{PM}{MB}, \quad \cos \sphericalangle ABC = \frac{BP}{MB}.$$

3. Маховик двигателя внутреннего сгорания вращается равномерно, совершая n оборотов в секунду. Выразить функцией переменное расстояние точки M, взятой на ободе маховика, от плоскости пола машинного отделения при условии, что эта плоскость параллельна оси вращения и отстоит от нее на расстоянии a метров.

Указание. Рассмотрим сечение маховика плоскостью, перпендикулярной оси вращения и проходящей через точку M. В этом сечении маховик изобразится схематически окружностью O (R), а плоскость пола — прямой LL' (рис. 21). Через точку O проводим оси координат так, чтобы ось абсцисс была параллельна прямой LL'. Отсчет времени начнем с момента, когда точка M находится на положительном луче оси абсцисс.

Предположим, что по отношению к нам маховик вращается про-

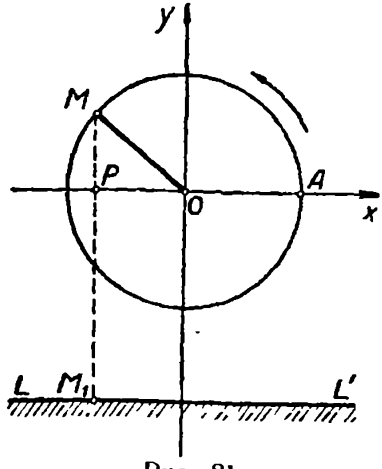


Рис. 21.

тив часовой стрелки. За t секунд радиус OM опишет угол $AOM = z = 2\pi nt$ радиан. Искомое расстояние $S = M_1M = M_1P + PM$. По условию $M_1P = a$. По определению синуса имеем:

$$\sin \measuredangle AOM = \frac{PM}{R} \quad \text{откуда} \quad PM = R \sin \measuredangle AOM = R \sin 2\pi nt.$$

Следовательно, искомая функция $S = a + R \sin 2\pi nt$.

Если ось вращения лежит в плоскости пола, то $a = 0$ и $S = R \sin 2\pi nt$.

§ 9. Независимость круговых функций от длины радиуса числовой окружности

При определении круговых функций мы не накладывали никаких ограничений на величину радиуса числовой окружности. Естественно возникает вопрос, зави-

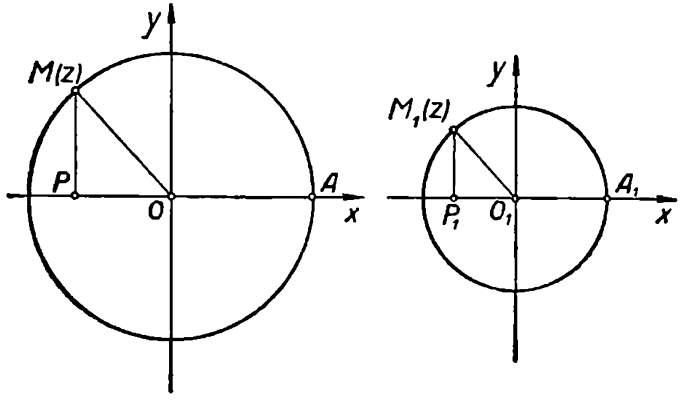


Рис. 22.

сят ли значения круговых функций от величины радиуса окружности, на которой определены эти функции? Ответ дает следующая теорема:

Значения круговых функций не зависят от длины радиуса числовой окружности.

Доказательство. Возьмем две числовые окружности $O(R)$ и $O_1(r)$ с различными радиусами R и r (рис. 22) и найдем с их помощью круговые функции произвольного действительного числа z:

$$\sin z = \frac{PM}{R}, \quad \cos z = \frac{OP}{R}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{PM}{OP},$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{OP}{PM} \text{ (на первой окружности);}$$

$$(\sin z)_1 = \frac{P_1M_1}{r},\ (\cos z)_1 = \frac{O_1P_1}{r},$$

$$(\operatorname{tg} z)_1 = \frac{P_1M_1}{O_1P_1},\ (\operatorname{ctg} z)_1 = \frac{O_1P_1}{P_1M_1}$$ (на второй окружности).

Центральные углы AOM и $A_1O_1M_1$ равны, так как они стягиваются дугами AM и A_1M_1, имеющими одну и ту же радианную меру, равную z радиан, следовательно, прямоугольные треугольники OMP и $O_1M_1P_1$ подобны. Из подобия этих треугольников следует:

$$\frac{|PM|}{R} = \frac{|P_1M_1|}{r},\ \frac{|OP|}{R} = \frac{|O_1P_1|}{r},\ \frac{|PM|}{|OP|} = \frac{|P_1M_1|}{|O_1P_1|},\ \frac{|OP|}{|PM|} = \frac{|O_1P_1|}{|P_1M_1|}.$$

Но из равенства углов AOM и $A_1O_1M_1$ следует, что точки M и M_1 находятся в одноименных четвертях окружностей, а поэтому отрезки PM и P_1M_1, а также OP и O_1P_1 имеют соответственно одинаковые знаки; это обстоятельство дает возможность перейти от абсолютных значений к самим значениям (опустить в предыдущих равенствах знаки абсолютных величин) и получить равенства:

$$\frac{PM}{R} = \frac{P_1M_1}{r},\ \frac{OP}{R} = \frac{O_1P_1}{r},\ \frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{O_1P_1},\ \frac{OP}{PM} = \frac{O_1P_1}{P_1M_1},$$

показывающие, что $\sin z = (\sin z)_1$, $\cos z = (\cos z)_1$, $\operatorname{tg} z = (\operatorname{tg} z)_1$, $\operatorname{ctg} z = (\operatorname{ctg} z)_1$.

Что и требовалось доказать.

§ 10. Непрерывность круговых функций

1. Понятие о непрерывности функции

Рассмотрим следующие две функции:

Первая функция выражает число кружков m одинакового диаметра d, которые можно вырезать из квадрат-

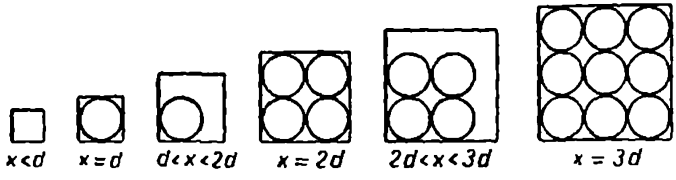


Рис. 23.

ного листа жести при условии, что сторона квадрата x — величина переменная (на рис. 23 изображены квадраты при некоторых значениях x).

Вторая функция выражает площадь квадрата S с переменной стороной x, т. е. $S = x^2$.

Составим таблицы этих функций:

I.

x	m
$x < d$	0
$x = d$	1
$d < x < 2d$	1
$x = 2d$	4
$2d < x < 3d$	4
$x = 3d$	9
. . .	. . .

II.

x	S
0	0
. . .	. . .
0,1	0,01
. . .	. . .
0,9	0,81
1	1
. . .	. . .
1,1	1,21
. . .	. . .
2	4
. . .	. . .

Построим графики данных функций, положив $d = 1$.

Видим, что график первой функции (рис. 24) имеет разрывы в точках $x = 1, 2, 3, \ldots$, а во всех остальных точках, удовлетворяющих условию $0 < x < 1$, или $1 < x < 2$, или $2 < x < 3$ и т. д., разрывов нет.

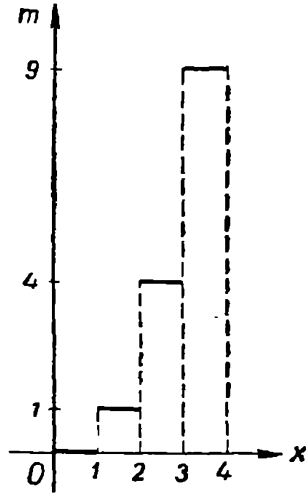


Рис. 24.

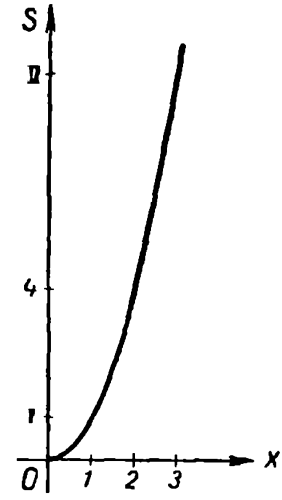


Рис. 25.

Графиком второй функции (рис. 25) является линия непрерывная, без разрывов.

Можно сказать, что вторая функция непрерывна в каждой точке, а первая непрерывна только внутри про-

межутков $0 < x < 1$, $1 < x < 2$, $2 < x < 3$ и т. д., а в концах этих промежутков, т. е. в точках $x = 1, 2, 3$ и т. д., она имеет разрывы непрерывности.

Более аккуратно понятие непрерывности функции определяется так:

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_1$, если выполняются два условия:

1) при $x = x_1$ функция определена, т. е. имеет действительное значение $y = f(x_1)$ (смотри график функции на рис. 26);

2) при достаточно малом по абсолютному значению изменении аргумента от x_1 до x_2 функция изменяется на величину, меньшую по абсолютному значению любого заданного положительного числа ε.

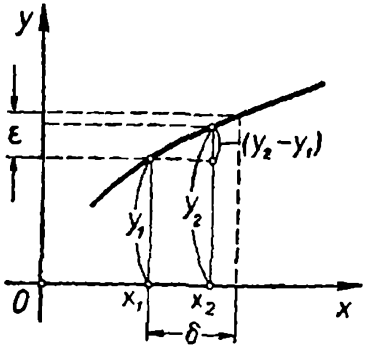


Рис. 26.

Принимая во внимание, что изменение аргумента от x_1 до x_2 по абсолютному значению равно $|x_2 - x_1|$ (см. рис. 26), а соответствующее изменение функции по абсолютному значению равно $|y_2 - y_1|$, или $|f(x_2) - f(x_1)|$, второе условие непрерывности можно записать и так:

для любого заданного положительного числа ε можно подобрать такое достаточно малое положительное число δ, что при всяком значении аргумента x_2, удовлетворяющем условию

$$|x_2 - x_1| < \delta,$$

будет выполняться соотношение

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Если в некоторой точке для функции не выполняется хотя бы одно из указанных двух условий непрерывности, то говорят, что в этой точке функция терпит разрыв непрерывности.

Покажем, например, что первая из заданных выше функций непрерывна в точке $x_1 = 1\frac{1}{2}$, а в точке $x = 2$ она терпит разрыв.

Действительно, в точке $x_1 = 1\frac{1}{2}$ эта функция имеет числовое значение $m_1 = 1$, следовательно, выполнено первое условие непрерывности; второе условие непрерывности выполняется при $\delta = \frac{1}{2}$, так как при изменении аргумента x по абсолютному значению меньше, чем на $\frac{1}{2}$, функция сохраняет свое значение, равное 1, и, следовательно, ее изменение равно $m_1 - m = 1 - 1 = 0$, а нуль меньше любого положительного числа ε.

В точке $x = 2$ эта же функция терпит разрыв, так как не выполняется второе условие непрерывности. Действительно, на какую бы малую величину мы не увеличили аргумент в точке $x = 2$, функция сразу возрастает на 4 единицы (не меньше!); нельзя, например, сделать так, чтобы изменение функции справа от точки $x = 2$ было меньше $\varepsilon = 0{,}1$.

Вторая из данных выше функций $S = x^2$ непрерывна в любой точке и, в частности, в точке $x_1 = 2$. В самом деле, при $x_1 = 2$ она имеет числовое значение $S_1 = x^2_1 = 4$, следовательно, выполнено первое условие непрерывности. Пусть теперь задано какое-нибудь (сколь угодно малое) положительное число ε. Покажем, что при всяком изменении аргумента от $x_1 = 2$ до x_2, не превышающем по абсолютному значению $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, изменение функции S будет по абсолютному значению меньше ε, т. е. выполнится и второе условие непрерывности.

Действительно,

$$|S_2 - S_1| = |x^2_2 - 4| = |(2 \pm \delta)^2 - 4| = |\pm 4\delta + \delta^2| \leqslant 4\delta + \delta^2.$$

Но если взять $\delta < 1$ и меньше $\frac{\varepsilon}{5}$, то $4\delta + \delta^2 < 4\delta + \delta \cdot 1 = 5\delta = 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$ и, следовательно, $|S_2 - S_1| < \varepsilon$.

Короче: при всяком x_2, удовлетворяющем условию $|x_2 - 2| < \frac{\varepsilon}{5}$, выполняется неравенство $|x^2_2 - 4| < \varepsilon$.

Перейдем теперь к выяснению вопроса о непрерывности круговых функций.

11. Непрерывность синуса и косинуса

Функция $y = \sin z$ непрерывна в каждой точке. В самом деле, при всяком действительном значении аргумента $z = z_1$ она имеет определенное числовое значение y_1, равное ординате точки $M_1(z_1)$ (рис. 27), следовательно, первое условие непрерывности выполнено. Если аргумент z изменяется от z_1 до некоторого нового значения z_2, то $\sin z$ изменяется от $y_1 = P_1M_1$ до $y_2 = P_2M_2$. Но $|y_2 - y_1| = |P_2M_2 - P_1M_1| = |NM_2| <$ $<$ хорды M_1M_2, а хорда M_1M_2 меньше длины дуги $M_1M_2 = |z_2 - z_1|$, откуда по транзитивности $|y_2 - y_1| < |z_2 - z_1|$ и, следовательно, для любого заданного положительного числа ε будет справедливо неравенство $|y_2 - y_1| < \varepsilon$, если $|z_2 - z_1| < \delta = \varepsilon$, а это значит, что выполняется и второе условие непрерывности.

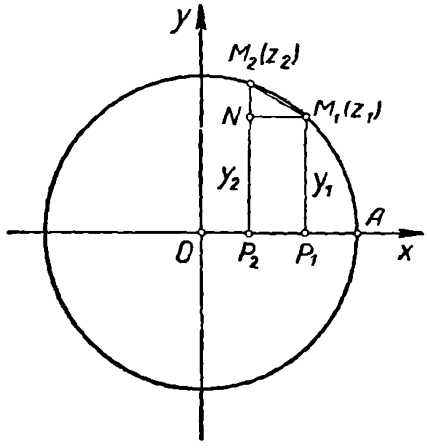


Рис. 27.

Аналогичным образом доказывается непрерывность функции $x = \cos z$ при всяком значении аргумента z.

Из непрерывности синуса и косинуса следует непрерывность и их графиков, которые будут построены далее.

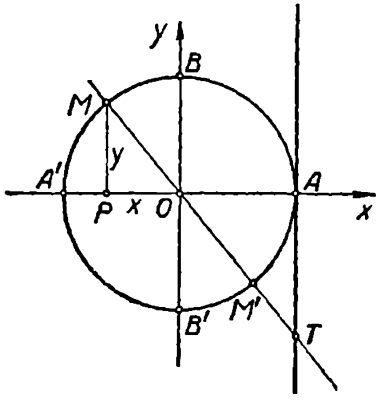


Рис. 28.

III. Интервалы непрерывности тангенса и котангенса

Предварительно покажем, что значения тангенса можно выражать отрезками касательной к числовой окружности, проведенной в точке A (рис. 28), а именно: если числу $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) соответствует на

числовой окружности точка $M(z)$, то прямая OM отсекает на касательной, проведенной к окружности в точке A, отрезок $AT = \operatorname{tg} z$[1].

Для доказательства этого утверждения рассмотрим прямоугольные треугольники OPM и OAT. Из подобия этих треугольников получаем равенство

$$\frac{PM}{OP} = \frac{AT}{OA}, \qquad (*)$$

справедливое и в том случае, когда входящие в него отрезки берутся с соответствующими знаками. Так, на нашем рисунке $PM = y$ — положительная ордината точки M, $OP = x$ — отрицательная асбцисса точки M, $OA = R$ — радиус числовой окружности, AT — ордината точки T — отрицательна. Следовательно, обе части равенства (*) отрицательные.

Рекомендуется самим учащимся убедиться в том, что указанное совпадение знаков будет иметь место и в других четвертях числовой окружности.

Итак, имеем:

$$\frac{y}{x} = \frac{AT}{R}, \text{ т. е.}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{AT}{R} \qquad (10)$$

или $\operatorname{tg} z = AT$ при $R = 1$.

Отметим, что данное доказательство не имеет силы для чисел z, изображающихся в точках A и A', так как рассматриваемые при доказательстве треугольники в этих точках не существуют Но для таких чисел справедливость теоремы обнаруживается непосредственно. Так, например, если z изображается в точке A', то по определению тангенса имеем: $\operatorname{tg} z = \frac{0}{OA'} = 0$, но и ордината точки A', в которой пересекает касательную прямая OA, также равна 0.

Аналогичным путем можно доказать, что значения котангенса можно выражать отрезками касательной к

---

[1] Само слово тангенс в переводе с латинского означает касательная.

числовой окружности, проведенной в точке B (рис. 29), а именно:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{x}{y} = \frac{OP}{PM} = \frac{BK}{R}, \text{ откуда при } R = 1 \quad \operatorname{ctg} z = BK.$$

Перейдем к вопросу о непрерывности функции $\operatorname{tg} z$.

Так как функция $\operatorname{tg} z$ не определена (и, следовательно, не имеет числовых значений) при $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, т. е. в точках B и B' числовой окружности (рис. 30), то можно утверждать, что в этих точках тангенс имеет разрыв непрерывности (не выполнено первое условие непрерывности функции).

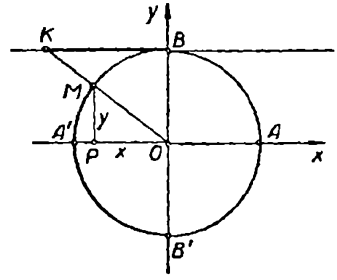


Рис. 29.

Во всех остальных точках функция $\operatorname{tg} z$ непрерывна.

Действительно, всякому числу $z_1 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 2, \ldots)$ на числовой окружности соответствует точка $M_1(z_1)$ (рис. 30) и на касательной к окружности соответствует отрезок $AT_1 = \operatorname{tg} z_1$, т. е. существует определенное числовое значение $\operatorname{tg} z_1$, следовательно, первое условие непрерывности выполнено.

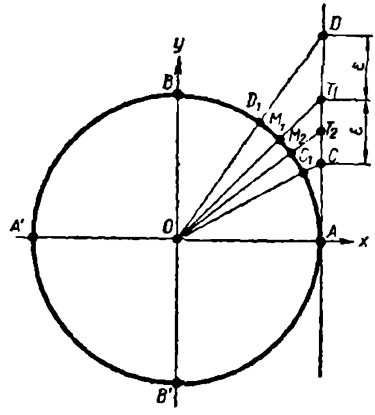


Рис. 30.

Пусть задано сколь угодно малое положительное число ε. Отложим на касательной AT_1 отрезки T_1C и T_1D, равные ε. Затем проведем прямые OC и OD и отметим точки их пересечения C_1 и D_1 с той полуокружностью, на которой расположена точка $M_1(z_1)$. Обозначив через δ наименьшую из дуг C_1M_1 и M_1D_1, замечаем, что всякое число z_2, удовлетворяющее условию

$$|z_2 - z_1| < \delta,$$

изобразится на окружности точкой $M_2(z_2)$ внутри дуги $C_1M_1D_1$, а прямая OM_2 пересечет касательную в точке

T_2 между точками C и D и поэтому выполнится неравенство:

$$|AT_2 - AT_1| < \varepsilon,$$

т. е.

$$|\operatorname{tg} z_2 - \operatorname{tg} z_1| < \varepsilon.$$

А это значит, что выполнено условие непрерывности тангенса. Аналогично доказывается, что функция $\operatorname{ctg} z$ терпит разрыв непрерывности в точках $z = \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), где она не определена; во всех остальных точках эта функция непрерывна.

ГЛАВА III

ЗАКОНОМЕРНОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ КРУГОВЫХ ФУНКЦИЙ С ИЗМЕНЕНИЕМ ИХ АРГУМЕНТОВ

§ 11. Характеристика изменения синуса

Изменение всякой функции наиболее наглядно передается на ее графике. Чтобы построить график функции $y = \sin z$, выполним следующие операции:

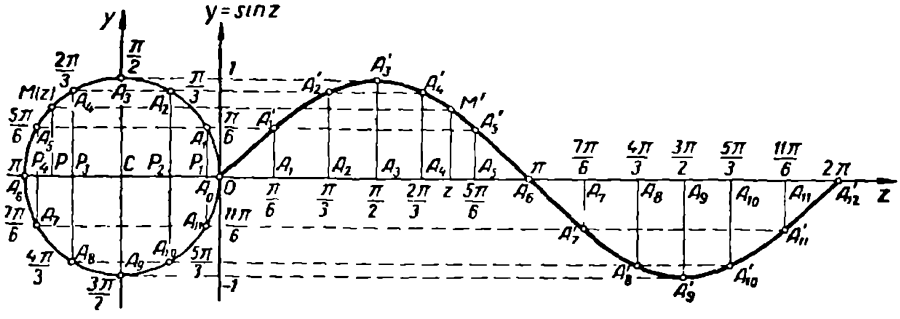


Рис. 31.

1. Проведем оси координат Oz и Oy, а затем построим числовую окружность радиусом $R = 1$ с центром C на оси Oz так, как это сделано на рис. 31, а именно, чтобы ось абсцисс числовой окружности лежала на оси Oz, ось ординат Cy была параллельна оси Oy, а начальная точка окружности A_0 совпала с точкой O.

2. Окружность разделим на n равных частей, например на 12, и построим ординаты точек деления, которыми выражаются, как известно, синусы соответствующих чисел; будем иметь:

а) точки деления	A_0	A_1	A_2	A_3	. . .	A_{10}	A_{11}	A_{12}
б) их круговые координаты z	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	. . .	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
в) ординаты точек деления, выражающие значения $\sin z$	0	P_1A_1	P_2A_2	CA_3	. . .	P_2A_{10}	P_1A_{11}	0
	$\sin 0$	$\sin\frac{\pi}{6}$	$\sin\frac{\pi}{3}$	$\sin\frac{\pi}{2}$	. .	$\sin\frac{5\pi}{3}$	$\sin\frac{11\pi}{6}$	$\sin 2\pi$

3. На оси Oz отметим:

а) точки с координатами z[1]	0	A_1	A_2	A_3	. . .	A_{10}	A_{11}	A_{12}
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	. . .	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
б) отрезки перпендикуляров, выражающие значения $\sin z$	0	A_1A_1'	A_2A'	A_3A_3'	. . .	$A_{10}A_{10}'$	$A_{11}A_{11}'$	0
в) концы этих отрезков дают точки искомого графика	$0\equiv A_0'$	A_1'	A_2'	A_3'	.	A_{10}'	A_{11}'	A_{12}'

4. Соединим эти точки последовательно плавной линией от руки или с помощью лекал, получим кривую, которая будет служить с некоторой точностью искомым графиком.

[1] Такие точки с абсциссами z целесообразно построить так: сначала отложить на оси Oz отрезок длиной $2\pi \approx 6{,}28$ единиц, а затем разделить его на 12 равных частей

Если указанные операции осуществить для всех точек окружности и соответствующего отрезка $0 \leqslant z \leqslant 2\pi$ оси Oz, то получится непрерывная кривая — геометрическое место концов ординат $y = \sin z$ — график синуса в промежутке $[0; 2\pi]$.

Что же мы видим на графике и на числовой окружности?

На числовой окружности:	На графике:
1. Пока z возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, точка $M(z)$ описывает первую четверть числовой окружности, а ее ордината $y = \sin z$ возрастает от 0 до 1.	1. Пока z возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, график $\sin z$ плавно поднимается вверх от оси Oz до прямой, параллельной оси Oz и отстоящей от нее на расстоянии $R = 1$, следовательно, $\sin z$ в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает от 0 до 1.
2. Дальше z возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до π, точка $M(z)$ описывает вторую четверть числовой окружности, а ее ордината $y = \sin z$ убывает от 1 до 0.	2. Дальше z возрастает от $\frac{\pi}{2}$ до π, а график опускается опять до оси Oz, следовательно, $\sin z$ в промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ убывает от 1 до 0.
3. С возрастанием z от π до $\frac{3}{2}\pi$ точка $M(z)$ описывает третью четверть числовой окружности, а ее ордината $y = \sin z$ убывает от 0 до -1.	3. С возрастанием z от π до $\frac{3}{2}\pi$ график $\sin z$ продолжает опускаться ниже оси Oz до параллели к этой оси, отстоящей от нее на расстоянии -1, следовательно, $\sin z$ в промежутке $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$ убывает от 0 до -1.
4. Пока z возрастает от $\frac{3}{2}\pi$ до 2π, точка $M(z)$	4. Пока z возрастает от $\frac{3}{2}\pi$ до 2π, график $\sin z$

описывает последнюю четверть числовой окружности и возвращается снова в свое исходное положение, а ее ордината $y = \sin z$ возрастает от -1 до 0.

снова поднимается вверх до оси Oz и, следовательно, $\sin z$ в промежутке $\left[\frac{3}{2}\pi;\ 2\pi\right]$ возрастает от -1 до 0.

Подведем итоги наших наблюдений в следующей таблице:

	I четверть	II четверть	III четверть	IV четверть
z возрастает	от 0 до $\frac{\pi}{2}$	от $\frac{\pi}{2}$ до π	от π до $\frac{3}{2}\pi$	от $\frac{3}{2}\pi$ до 2π
$\sin z$	возрастает от 0 до 1	убывает от 1 до 0	убывает от 0 до -1	возрастает от -1 до 0

Итак, пока аргумент z изменяется от 0 до 2π, функция $\sin z$ изменяется сначала от 0 до 1, затем от 1 до -1 и, наконец, от -1 снова до 0 и проходит дважды через каждое из чисел отрезка от -1 до $+1$.

При дальнейшем изменении z от 2π до 4π точка $M(z)$ опишет еще раз числовую окружность, а ее ордината $y = \sin z$ еще раз повторит в прежнем порядке весь цикл

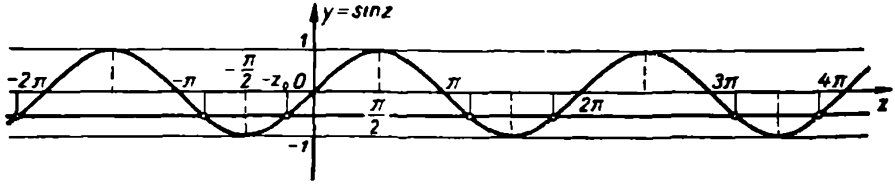


Рис. 32.

своего изменения от 0 до 1, затем от 1 до -1 и, наконец, от -1 до 0. Ясно, что текущая точка M' графика $\sin z$ опишет при этом в промежутке оси Oz от 2π до 4π точно такую же кривую, как в промежутке от 0 до 2π. То же самое будет иметь место с изменением графика данной функции в промежутках изменения аргумента z от 4π до 6π, от 6π до 8π и т. д.

Отсюда вытекает возможность построения всего графика функции $\sin z$ путем параллельного переноса уже

построенной его части вдоль оси абсцисс на отрезки, кратные 2π. Таким переносом на рисунке 32 распространен график синуса с промежутка $[0; 2\pi]$ вправо на промежутки $[2\pi; 4\pi]$ и $[4\pi; 6\pi]$ и влево на промежутки $[-2\pi; 0]$ и $[-4\pi; -2\pi]$. Указанный способ «распространения» графика с промежутка $[0; 2\pi]$ на всю область изменения аргумента практически лучше всего осуществлять с помощью готового шаблона кривой. Набор таких шаблонов, а также лекало с контурами частей различных графиков даны на стр. 479—480.

Итак, графиком функции $\sin z$ оказалась бесконечная непрерывная[1] периодически волнообразная кривая, расположенная между двумя прямыми, параллельными оси абсцисс и отстоящими от нее на расстоянии равном 1; эту кривую называют с и н у с о и д о й.

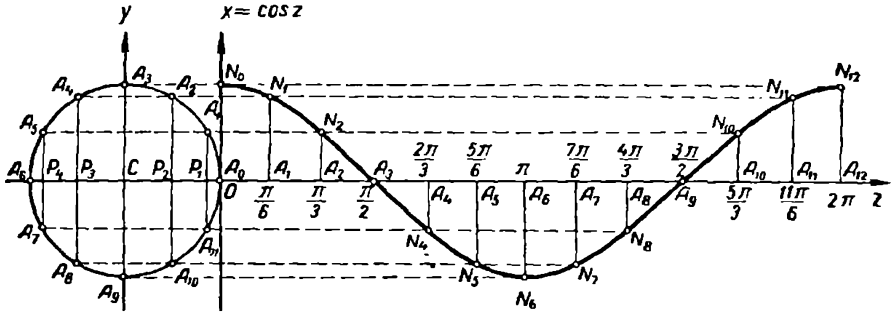


Рис. 33.

Синусоида дает наглядное представление о характере изменения функции $\sin z$ при изменении аргумента z.

Упражнения

1. Определить знаки разностей: 1) $\sin 137° - \sin 154°$; 2) $\sin 1{,}2\pi - \sin 1{,}43\pi$; 3) $\sin 5 - \sin 6$.

2. При каких значениях z на отрезке от 0 до 2π выражение $\sqrt{\frac{1}{2} + \sin z}$ имеет действительное значение?

§ 12. Характеристика изменения косинуса

График функции $x = \cos z$ строится так же, как и график синуса, причем для ускорения построения можно

[1] Непрерывность кривой графика следует из непрерывности синуса, установленной в § 10.

использовать и прежний чертеж; у нас он повторен заново на рисунке 33 с той лишь разницей, что ось ординат обозначена через Ox.

1. На числовой окружности отмечаем:

а) точки и их круговые координаты	A_0	A_1	A_2	A_3	...	A_{10}	A_{11}	A_{12}
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
б) абсциссы точек, выражающие значение $\cos z$	$CO \equiv 1$	CP_1	CP_2	0	...	CP_2	CP_1	$CO = 1$
	$\cos 0$	$\cos\frac{\pi}{6}$	$\cos\frac{\pi}{3}$	$\cos\frac{\pi}{2}$	...	$\cos\frac{5\pi}{3}$	$\cos\frac{11\pi}{6}$	$\cos 2\pi$

2. На оси Oz отмечаем:

а) точки с координатами z[1]	0	A_1	A_2	A_3		A_{10}	A_{11}	A_{12}
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
б) в этих точках восставим перпендикуляры к оси Oz и на них отложим отрезки, выражающие значения $\cos z$	A_0N_0	A_1N_1	A_2N_2	0	...	$A_{10}N_{10}$	$A_{11}N_{11}$	$A_{12}N_{12}$
в) концы этих отрезков дают точки искомого графика	N_0	N_1	N_2	A_3	...	N_{10}	N_{11}	N_{12}

3. Эти точки соединим последовательно плавной линией от руки или по лекалу, получим кривую, которая будет служить с некоторой точностью искомым графиком. Если бы указанные построения

[1] Смотрите примечание на стр. 146.

осуществить для всех точек окружности и соответствующего отрезка $0 \leqslant z \leqslant 2\pi$ оси Oz, то получилась бы непрерывная линия[1] — геометрическое место концов ординат $x = \cos z$ — график косинуса в промежутке $[0; 2\pi]$.

Что же мы видим на числовой окружности и на графике.

На числовой окружности:

1. Пока z возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, точка $M(z)$ описывает первую четверть числовой окружности, а ее абсцисса $x = \cos z$ убывает от 1 до 0.

2. С возрастанием z от $\frac{\pi}{2}$ до π точка $M(z)$ описывает вторую четверть числовой окружности, а ее абсцисса $x = \cos z$ убывает от 0 до -1.

3. С возрастанием z от π до $\frac{3}{2}\pi$ точка $M(z)$ описывает третью четверть числовой окружности, а ее абсцисса $x = \cos z$ возрастает от -1 до 0.

На графике:

1. Пока аргумент z пробегает значение от 0 до $\frac{\pi}{2}$ график функции $\cos z$ плавно опускается до оси абсцисс от своего верхнего положения в точке N_0, отстоящей от оси абсцисс на расстоянии 1; следовательно, $\cos z$ в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ убывает от 1 до 0.

2. С изменением аргумента z от $\frac{\pi}{2}$ до π график опускается ниже оси Oz до прямой, параллельной этой оси и отстоящей от нее на расстоянии -1; $\cos z$ в промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ убывает от 0 до -1.

3. С изменением аргумента z от π до $\frac{3}{2}\pi$ график поднимается вверх от своего крайнего нижнего положения до оси абсцисс, следовательно, функция $\cos z$ в промежутке $\left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right]$ возрастает от -1 до 0.

[1] Непрерывность линии является следствием непрерывности косинуса, устаиовленной в § 10.

4. С возрастанием z от $\frac{3}{2}\pi$ до 2π точка $M(z)$ описывает четвертую четверть числовой окружности и приходит в первоначальное свое положение A_0, а абсцисса этой точки $x = \cos z$ возрастает от 0 до 1.

4. С изменением аргумента z от $\frac{3}{2}\pi$ до 2π график поднимается вверх от оси абсцисс и снова достигает своего верхнего крайнего положения; функция $\cos z$ в промежутке $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ возрастает от 0 до 1.

Подведем итоги наших наблюдений в следующей таблице:

	I четверть	II четверть	III четверть	IV четверть
z возрастает	от 0... до $\frac{\pi}{2}$	от $\frac{\pi}{2}$ ... до π	от π... до $\frac{3}{2}\pi$	от $\frac{3}{2}\pi$...до 2π
$\cos z$	убывает от 1 до 0	убывает от 0 до —1	возрастает от —1 до 0	возрастает от 0 до 1

При дальнейшем возрастании z от 2π до 4π, а затем от 4π до 6π и т. д. точка $M(z)$ будет снова и снова описывать числовую окружность, а ее абсцисса $x = \cos z$ будет периодически повторять весь прежний цикл своего изменения от 1 до —1 и, обратно, от —1 до 1.

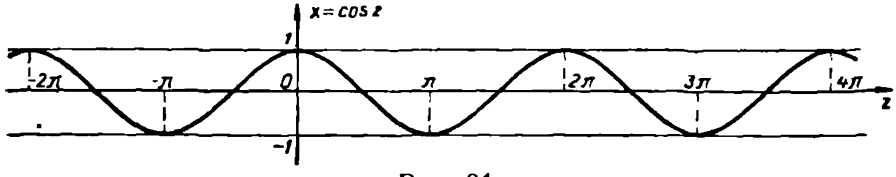


Рис. 34.

На графике это обстоятельство отразится в том, что кривая $\cos z$ в промежутках от 2π до 4π, от 4π до 6π и т. д. будет иметь точно такую же форму, как и в промежутке от 0 до 2π. Отсюда следует вывод о возможности построения всего графика функции $\cos z$ путем параллельного сдвига (с помощью шаблона) вдоль оси абсцисс на отрезки, кратные 2π, уже построенной нами части графика в промежутке от 0 до 2π (рис. 34).

Поскольку аргумент косинуса может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, то весь график функции $\cos z$ представит

бесконечную волнообразную непрерывную кривую, простирающуюся вдоль оси абсцисс между прямыми, параллельными этой оси и отстоящими от нее на расстоянии равном 1. Эту кривую называют **косинусоидой**; она дает наглядное представление об изменении $\cos z$ при изменении аргумента z.

Упражнения.

1. Определить знаки разностей: 1) $\cos\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{10}$; 2) $\cos 2 - \cos 3$.

2. При каких значениях z на отрезке от 0 до 2π разность $1 - 2\cos z$: 1) положительна? 2) отрицательна? 3) равна 0?

3. $f(z) = \sin z - \cos z$; доказать, что $f(1) > 0$.

§ 13. Характеристика изменения тангенса

Построим график функции $y = \operatorname{tg} z$.

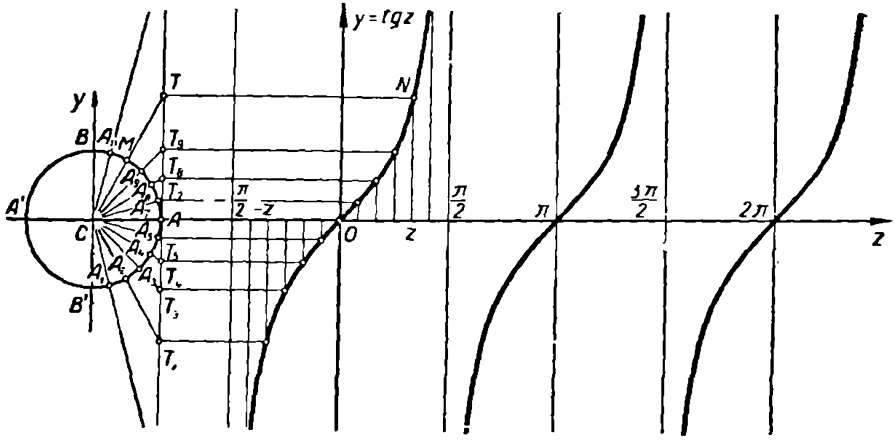


Рис. 35.

Построение начнем с интервала $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$. Числа этого интервала изображаются на числовой окружности справа от оси Cy, а на оси Oz — внутри отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 35). (Продолжение текста см. на стр. 155.)

1) На числовой окружности отмечаем:

а) точки	A_1	A_2	A_3	...	A_{10}	A_{11}	$A_{12} \equiv B$
б) их круговые координаты z	$-\frac{5}{12}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	...	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
в) тангенсы этих чисел выражаются длиной отрезков на касательной	$\operatorname{tg}\left(-\frac{5}{12}\pi\right) = AT_1$	$\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{3}\pi\right) = AT_2$	$\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = AT_3$	. .	$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = AT_{10}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{5}{12}\pi\right) = AT_{11}$	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} \to \infty$

2) На оси Oz построим:

а) абсциссы точек z	$-\frac{5}{12}\pi$	$-\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{1}{4}\pi$	...	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
б) в этих точках восставим перпендикуляры к оси и параллельным переносом на них отложим отрезки $y = \operatorname{tg} z$	AT_1	AT_2	AT_3	...	AT_{10}	AT_{11}	∞

Проводим касательную к окружности в точке A, затем делим полуокружность $B'AB$ на произвольное число равных частей и через точки деления проводим лучи из центра окружности до пересечения с касательной. Если радиус окружности $R = 1$, то полученные при этом отрезки касательной выразят значения тангенса для чисел, соответствующих точкам деления. На рисунке полуокружность $B'AB$ разделена на 12 равных частей. (См. таблицу на стр. 154, которая продолжает текст.)

Если бы сделать такой параллельный перенос для каждой текущей точки M окружности, то получили бы кривую — геометрическое место точек концов ординат $y = \operatorname{tg} z$; в нашем же построении получится 12 точек, лежащих на ней. Эти точки последовательно соединим от руки (или по лекалу); полученная кривая и будет служить с некоторой точностью одной из ветвей графика тангенса в промежутке $-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}$.

Что же мы видим на числовой окружности и на графике тангенса?

На числовой окружности:

1. Пока z возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, текущая точка $M(z)$ описывает IV четверть числовой окружности от B' до A, а точка T пересечения прямой CM с касательной описывает отрицательный луч на этой касательной, перемещаясь из отрицательной бесконечности вверх до точки A; следовательно, ордината этой точки $AT = \operatorname{tg} z$ изменяется от отрицательной бесконечности, проходя через все отрицательные числовые значения, и достигает нуля в точке A.

На графике тангенса:

1. Пока аргумент z пробегает значения от $-\frac{\pi}{2}$ до 0, график $\operatorname{tg} z$ поднимается вверх из отрицательной бесконечности к нулю, т. е. $\operatorname{tg} z$ возрастает от отрицательной бесконечности до нуля.

2. Пока z возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$ точка $M(z)$ описывает I четверть окружности, а точка T, в которой пересекается прямая CM с касательной, описывает положительный луч на этой касательной, двигаясь от точки A вверх неограниченно, следовательно, ордината этой точки $AT = \operatorname{tg} z$ возрастает при этом от нуля, уходя в бесконечность.

3. Итак, пока аргумент z пробежит все значения в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, возрастая от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, точка $M(z)$ опишет правую полуокружность $B'AB$, а точка T (пересечение прямой CM с касательной) опишет всю касательную, перемещаясь снизу вверх, следовательно, ордината этой точки $AT = \operatorname{tg} z$ будет принимать при этом всевозможные действительные значения, переходя из отрицательной бесконечности в положительную бесконечность через все отрицательные числа, нуль и все положительные числа.

2. Пока аргумент z пробегает свои значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$, кривая-график $\operatorname{tg} z$ поднимается вверх от оси Oz неограниченно и приближается как угодно близко к прямой, перпендикулярной оси Oz и проходящей через точку $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, в промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} z$ неограниченно возрастает от нуля, уходя в бесконечность.

3. Пока аргумент z пробегает все значения в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, текущая точка N графика $\operatorname{tg} z$ опишет бесконечную кривую, поднимающуюся снизу вверх, проходящую через начало координат и как угодно близко приближающуюся к перпендикулярам на ось Oz в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} z$ возрастает, пробегая всевозможные значения от отрицательной бесконечности до положительной бесконечности.

Легко заметить, что при изменении z в интервале от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3}{2}\pi$ точка $M(z)$ опишет левую половину числовой окружности $BA'B'$ (без ее концов B и B'), и при этом

точка T, в которой прямая CM пересекает касательную, еще раз опишет касательную снизу вверх, а потому ордината этой точки $AT = \operatorname{tg} z$ опять пробежит все возможные действительные значения от отрицательной бесконечности до положительной бесконечности. Отсюда следует, что график тангенса в интервале $\frac{\pi}{2} < z < \frac{3}{2}\pi$ будет повторением той бесконечной кривой, которая построена нами в интервале

$$-\frac{\pi}{2} < z < \frac{\pi}{2}.$$

Итак, пока точка $M(z)$ описывает полную числовую окружность, двигаясь против часовой стрелки, функция $\operatorname{tg} z$ дважды повторяет полный цикл своего изменения от отрицательной бесконечности, уходя в положительную бесконечность. В моменты, когда $M(z)$ занимает положения B и B', прямая CM не пересекает касательной, следовательно, $\operatorname{tg} z$ не существует для чисел $z = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, соответствующих точкам B и B'. При переходе $M(z)$ через точки B и B' тангенс резко меняет свое значение от положительной бесконечности к отрицательной бесконечности, что наглядно представлено на графике (рис. 35) в точках $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3}{2}\pi$.

Полный график функции $\operatorname{tg} z$ называют тангенсоидой; он состоит из бесконечного множества одинаковых ветвей. На рисунке 35 изображена часть тангенсоиды, состоящая из трех таких ветвей.

Подведем итоги наших наблюдений в следующей таблице:

	I четверть	II четверть	III четверть	IV четверть
z возрастает	от 0 до $\frac{\pi}{2}$	от $\frac{\pi}{2}$ до π	от π до $\frac{3}{2}\pi$	от $\frac{3}{2}\pi$ до 2π
$\operatorname{tg} z$ возрастает	от 0 в положительную бесконечность (+)	из отрицательной бесконечности до 0 (−)	от 0 в положительную бесконечность (+)	из отрицательной бесконечности до 0 (−)

Кстати, отметим, что на графике видно, как быстро изменяется тангенс, когда аргумент приближается к $\frac{\pi}{2}$; вот почему в таблицах тангенсов, начиная с 73° до 81°, пришлось внести расчленение строк, а далее от 81° до 89°59′ построить таблицы через ступень в 1′ без готовых поправок.

Упражнения.

1. Определить знак разностей: 1) $\operatorname{tg} 150° - \operatorname{tg} 123°$; 2) $\operatorname{tg} 3{,}5 - \operatorname{tg} 3{,}6$, 3) $\operatorname{tg} 5 - \operatorname{tg} 6$.

2. При каких значениях z в промежутке от 0 до 2π выражение $\sqrt{1 - \operatorname{tg} z}$ принимает действительные значения?

§ 14. Характеристика изменения котангенса

Построим график $\operatorname{ctg} z$. Построение начнем с интервала $0 < z < \pi$, не содержащего таких чисел, для которых данная функция не определена.

Проводим касательную к числовой окружности радиуса $R = 1$ в точке B (рис. 36), затем делим верхнюю половину окружности на 12 равных частей и через точки деления проводим лучи из центра окружности до пересечения с касательной; в результате получаем на касательной отрезки, выражающие значения функции $\operatorname{ctg} z$ для чисел, изображенных в точках деления. Эти отрезки откладываем на перпендикулярах к оси Oz, проведенных в точках, делящих отрезок оси от 0 до π на 12 равных частей; концы отрезков соединяем плавной линией, получаем с некоторой степенью точности график функции $\operatorname{ctg} z$ в интервале $(0; \pi)$.

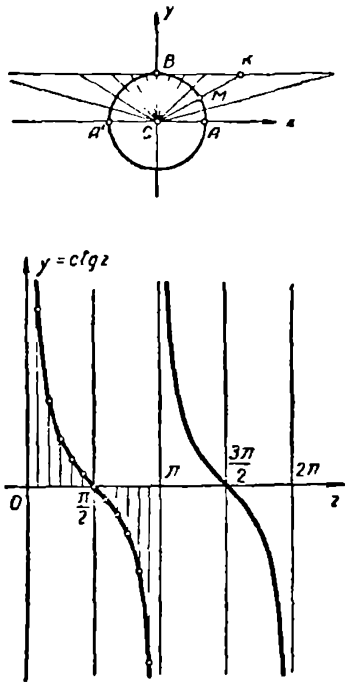


Рис. 36.

Проведем наблюдение за изменением котангенса на числовой окружности и на графике.

Пока z пробегает все значения в интервале $(0; \pi)$, возрастая от 0 до π, точка $M(z)$ описывает верхнюю половину

числовой окружности (без ее концов A и A'), а точка K, в которой луч CM пересекает касательную, пробегает по всей касательной справа налево, следовательно, абсцисса этой точки BK, равная $\operatorname{ctg} z$, убывает при этом, пробегая все множество действительных чисел от $+\infty$ до $-\infty$.

То же самое мы видим на графике котангенса. Пока аргумент z пробегает все значения в интервале $(0; \pi)$, текущая точка графика этой функции описывает бесконечную кривую, опускающуюся сверху вниз и как угодно близко приближающуюся слева к оси Oy, справа — к прямой, параллельной этой оси и проходящей через точку π.

При изменении z от π до 2π точка $M(z)$ опишет нижнюю половину числовой окружности, а точка K, в которой прямая CM пересекает касательную, пробежит снова всю эту касательную справа налево, поэтому абсцисса этой точки $BK = \operatorname{ctg} z$ еще раз пройдет через все возможные действительные значения от положительной бесконечности до отрицательной бесконечности. Понятно, что графиком котангенса в интервале $\pi < z < 2\pi$ будет такая же кривая, как и в интервале $0 < z < \pi$.

Итак, пока $M(z)$ описывает полную числовую окружность, двигаясь против часовой стрелки, $\operatorname{ctg} z$ дважды повторит полный цикл своего изменения от $+\infty$ до $-\infty$, поэтому график этой функции в промежутке от 0 до 2π состоит из двух одинаковых бесконечных ветвей. Полный график котангенса состоит из бесконечного множества отдельных ветвей и называется к о т а н г е н с о и д о й.

Отметим, что закономерность изменения круговых функций действительного аргумента впервые была установлена петербургским академиком Леонардом Эйлером в его замечательной работе «Введение в анализ бесконечно малых».

Упражнения.

1. Определить знаки разностей: а) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}$; б) $\operatorname{ctg} 100^\circ - \operatorname{ctg} 115^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 5 - \operatorname{ctg} 6$

2. При каких значениях z на отрезке от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $\operatorname{ctg} z > \operatorname{tg} z$?

3. Выделить на числовой окружности и на графиках круговых функций промежутки, в которых выполняются соотношения:

а) $|\sin z| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $|\cos z| \leqslant \frac{1}{2}$; в) $|\operatorname{ctg} z| \leqslant \sqrt{3}$;

г) $\sin z \leqslant \frac{1}{2}$; д) $\cos z \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\operatorname{tg} z \geqslant 1$;

ж) $\sin z > \cos z$; з) $\operatorname{tg} z > \operatorname{ctg} z$; и) $\sin z > \operatorname{tg} z$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций:

а) $1 + 2 \sin z$; б) $1 - 3 \cos z$; в) $4 \sin (z - 1) - 9$.

ГЛАВА IV

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА КРУГОВЫХ ФУНКЦИЙ, ВЫРАЖАЕМЫЕ В СООТВЕТСТВУЮЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТОЖДЕСТВАХ

§ 15. Периодические функции и их графики

Если некоторое явление или процесс повторяется регулярно через один и тот же промежуток времени, то его называют периодическим. Функции, выражающие законы периодических процессов, обладают особыми только

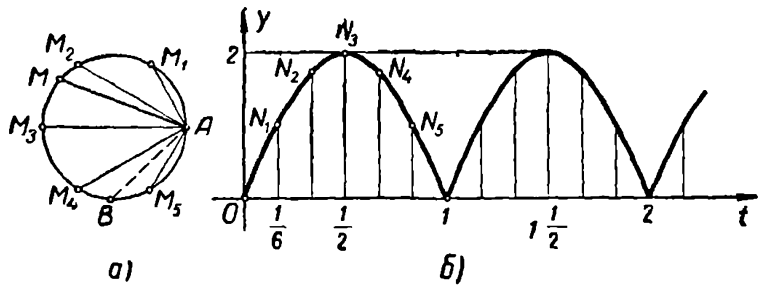


Рис. 37.

им присущими свойствами: они повторяют свои значения через один и тот же промежуток изменения аргумента.

Рассмотрим, например, процесс изменения длины хорды AM, соединяющей неподвижную точку окружности A с подвижной точкой M (рис. 37, *а*) при условии, что точка M совершает равномерное движение по окружности, пробегая ее в течение 1 сек.

Понятно, что периодическое круговое движение точки M будет сопровождаться периодическим изменением

длины хорды AM. Предположим, что в начале движения точка M занимает положение A. Тогда в течение одной секунды она опишет полную окружность и вернется в свое исходное положение A, а хорда AM совершит полный ход своего изменения, сначала возрастая от 0 до 2 единиц (радиус $R = 1$), а затем убывая от 2 единиц до 0. Такой процесс движения точки M и изменения длины хорды AM будет повторяться каждую следующую секунду.

Обозначим через t время, протекшее от начала движения точки M, а через y — длину хорды AM. Ясно, что с изменением времени t будет изменяться положение точки M на окружности и длина хорды $AM = y$, поэтому можно сказать, что переменная величина y является функцией времени t, что коротко записывают так: $y = f(t)$.

Нетрудно понять, что данная функция повторяет свои значения при увеличении аргумента t на 1, 2, 3 и т. д., т. е. $f(t) = f(t+1) = f(t+2) = f(t+3) = \ldots$ и т. д., при любом значении t.

Действительно, если спустя t_1 сек. от начала движения точка M оказалась в положении B (рис. 37, *а*), то $f(t_1) = AB$. Ясно, что дальше точка M будет продолжать свое движение по окружности и ровно через одну секунду опять окажется в положении B (так как в течение секунды она описывает полную окружность), а потому $f(t_1 + 1) = AB$. Спустя еще одну секунду точка M снова придет в положение B и функция еще раз повторит свое значение: $f(t_1 + 2) = AB$ и т. д. Таким образом, получается, что

$$f(t_1) = f(t_1 + 1) = f(t_1 + 2) = \ldots = AB.$$

Подобным свойством обладают только такие функции, которые выражают законы периодических явлений, поэтому таким функциям дали особое название — п е р и о д и ч е с к и е ф у н к ц и и.

Уточним это о п р е д е л е н и е.

Функция $f(z)$ называется периодической, если она не изменяет своего значения от прибавления к ее аргументу некоторого числа a, отличного от нуля, т. е. при всех значениях аргумента z выполняется равенство:

$$f(z) = f(z + a), \text{ где } a \neq 0. \qquad (11)$$

Следует заметить, что число a для данного периодического явления и периодической функции определяется неоднозначно. Так, для рассмотренной выше периодической функции $f(t)$ число $a = 1, 2, 3$ и т. д. Но при изучении всякого периодического явления бывает важно установить наименьшее положительное значение a, при котором выполняется равенство (11); такое значение a называют периодом функции.

Итак, *периодом периодической функции называется наименьшее положительное число, от прибавления которого к аргументу значение функции не изменяется.*

Очевидно, периодом функции $f(t)$ является число $a = 1$.

Существуют периодические явления с различными периодами. Так, например, наша Земля при обращении вокруг Солнца периодически возвращается в каждое свое положение через год, два года, три года и т. д., поэтому говорят, что период обращения Земли равен 1 году. Комета Галлея, совершающая периодическое движение по своей орбите, появляется у нас через каждые 76 лет, поэтому ее период обращения $a = 76$.

Повторяемость значений периодической функции через промежутки, равные периоду, весьма наглядно передается на графике функции.

На рисунке 37, *б* изображен график рассмотренной нами периодической функции $y = f(t)$ с периодом $a = 1$ сек. Для построения этого графика отметили на оси Ot точки, соответствующие значениям аргумента $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1, 1\frac{1}{6}, 1\frac{2}{6}$ и т. д., и на перпендикулярах к оси Ot, проведенных в этих точках, отложили отрезки, равные хордам AM_0, AM_1, AM_2, AM_3 и т. д., длины которых равны соответствующим значениям функции $y = f(t)$, а именно: $AM_0 = f(0)$, $AM_1 = f\left(\frac{1}{6}\right)$, $AM_2 = f\left(\frac{2}{6}\right)$ и т. д. Полученные таким путем точки N_0, N_1, N_2 и т. д. соединили плавной линией, которая и служит с некоторой точностью искомым графиком. На рисунке 37, *б* изображена часть графика функции $y = f(t)$, соответствующая промежутку времени

$$0 \leqslant t \leqslant 2\frac{1}{6} \text{(сек.)}.$$

На отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$, равном периоду функции $f(t)$, мы видим кривую, характеризующую полный ход изменения хорды AM.

На отрезке $1 \leqslant t \leqslant 2$ график функции представлен точно такой же кривой, как и на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$. Это и понятно, поскольку функция здесь повторяет свои значения:

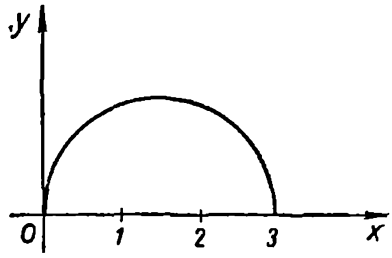


Рис. 38.

$f(t) \equiv f(t+1)$ при всяком t.

Ясно, что график функции в промежутке $1 \leqslant t \leqslant 2$ можно было бы получить параллельным смещением вдоль оси Ot той части графика, которая соответствует изменению функции в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Таким параллельным смещением части графика, соответствующей одному периоду функции, можно распространять график периодической функции как угодно далеко вдоль оси Ot.

Упражнения.

1. На рисунке 38 изображена часть графика периодической функции $y = F(x)$ с периодом $a = 3$. Построить график этой функции в промежутке $[-3; 9]$.

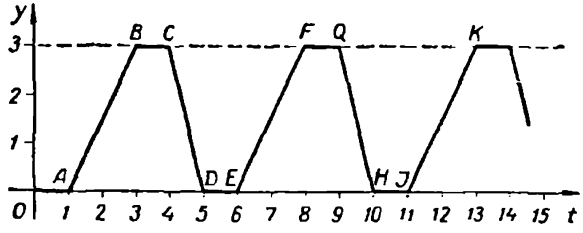


Рис. 39.

2. На рисунке 39 изображена часть графика функции $y = g(t)$, выражающей закон движения некоторой точки на прямой линии (на оси Oy). Как изобразится весь график этой функции в предположении, что она периодическая с периодом $a < 8$? Каков период функции? Какова скорость движения точки в различные промежутки времени t? Найти, пользуясь графиком, значение функции $y = g(t)$ при $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 245, 584$. При каких значениях t функция $g(t) = 0, 1, 2, 3$?

§ 16. Периодичность и периоды круговых функций. Приводимость аргументов круговых функций к аргументам промежутков $[0;\ 2\pi]$ и $[0;\ \pi]$

Известно, что функции $\sin z$ и $\cos z$ выражают изменение прямоугольных координат точки $M(z)$, совершающей периодическое движение по числовой окружности, поэтому естественно ожидать, что эти функции будут периодическими. Перемещаясь по числовой окружности, точка $M(z)$ возвращается в любое свое прежнее положение при увеличении или уменьшении ее круговой координаты z на число, кратное 2π, следовательно, любая круговая функция будет повторять свои значения при увеличении или уменьшении ее аргумента z на числа, кратные 2π; короче: при всяком z будут выполняться равенства:

$$\left.\begin{array}{c}\sin z \equiv \sin(z+2\pi k);\\ \cos z \equiv \cos(z+2\pi k),\\ \operatorname{tg} z \equiv \operatorname{tg}(z+2\pi k),\\ \operatorname{ctg} z \equiv \operatorname{ctg}(z+2\pi k),\end{array}\right\} \qquad (12)$$

где k — произвольное целое число.

Справедливость этих тождественных равенств следует также из того, что числа z и $z+2\pi k$ (т. е. $z \pm 2\pi$, $z \pm 2\pi \cdot 2$, $z \pm 2\pi \cdot 3$...) изображаются на числовой окружности одной и той же точкой M (рис. 16), а потому по определению круговых функций при $R = 1$ имеем:

$$OP = x = \cos z \equiv \cos(z \pm 2\pi) \equiv \cos(z \pm 2\pi \cdot 2) \equiv$$
$$\equiv \cos(z \pm 2\pi \cdot 3) \equiv \ldots$$

$$PM = y = \sin z \equiv \sin(z \pm 2\pi) \equiv \sin(z \pm 2\pi \cdot 2) \equiv$$
$$\equiv \sin(z \pm 2\pi \cdot 3) = \ldots$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} z \equiv \operatorname{tg}(z \pm 2\pi) \equiv \operatorname{tg}(z \pm 2\pi \cdot 2) \equiv \operatorname{tg}(z \pm 2\pi \cdot 3) \equiv \ldots$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{ctg} z \equiv \operatorname{ctg}(z \pm 2\pi) \equiv \operatorname{ctg}(z \pm 2\pi \cdot 2) \equiv \operatorname{ctg}(z \pm 2\pi \cdot 3) \equiv \ldots$$

Установленные нами соотношения (12) можно выразить короче одним соотношением:

$$T(z) \equiv T(z+2\pi k),$$

где T — знак любой из круговых функций, а k — произвольное целое число.

Итак, мы убедились в том, что круговые функции являются периодическими. Выясним теперь, какой же период имеет каждая из этих функций.

Теорема. *Функции* $\sin z$ *и* $\cos z$ *имеют период, равный* 2π, *а функции* $\operatorname{tg} z$ *и* $\operatorname{ctg} z$ *имеют период, равный* π.

Докажем справедливость теоремы для синуса и тангенса, так как доказательство ее для двух других функций будет аналогичным, и мы рекомендуем провести его самому читателю.

По определению периодом функции $f(z)$ является наименьшее положительное число a, удовлетворяющее равенству $f(z+a)=f(z)$ при всех значениях аргумента z.

Для функции $\sin z$ это запишется так:

$$\sin(z+a)=\sin z.$$

Выше мы убедились, что при $a=2\pi$ это равенство справедливо. Остается показать, что не существует положительного числа, меньшего 2π, при котором это равенство верно для всех значений z.

Убедимся в этом от противного.

Допустим, что нашлось положительное число a', меньшее 2π, при котором $\sin(z+a')=\sin z$ при всех значениях z. Положим, $z=\frac{\pi}{2}$, получим: $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a'\right)=$ $=\sin\frac{\pi}{2}$, или $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a'\right)=1$, так как $\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Но синус может принять значение, равное 1, только в точке B (рис. 16), изображающей на числовой окружности числа $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ (k — целое число), следовательно, $\frac{\pi}{2}+a'=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, откуда $a'=2\pi k$.

Но по допущению $0<a'<2\pi$, следовательно, $0<$ $<2\pi k<2\pi$, откуда после деления на 2π получаем неравенство:

$$0<k<1.$$

Однако этого быть не может, так как между 0 и 1 нет целых чисел, значит, сделанное вначале допущение надо отбросить, и тогда остается признать, что период $\sin z$ равен 2π. Также можно показать, что $\cos z$, $\sec z$ и $\operatorname{cosec} z$ имеют период 2π.

Переходим к доказательству того, что период $\operatorname{tg} z$ равен π.

Нетрудно убедиться в том, что равенство $\operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg} z$ выполняется при всяком допустимом значении z.

Действительно, числам z и $z+\pi$ соответствуют на числовой окружности точки $M(z)$ и $M(z+\pi)$, служащие концами одного и того же диаметра MM' (рис. 40). Продолжаем этот диаметр до пересечения с соответствующей касательной, получаем точку T. По теореме о геометрическом изображении тангенса (§ 10) имеем:

$$\operatorname{tg} z = AT \text{ и } \operatorname{tg}(z+\pi) = AT,$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg} z.$$

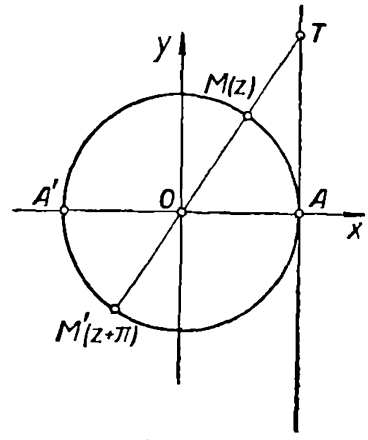


Рис. 40.

Остается убедиться в том, что не существует положительного числа, меньшего π, при котором выполняется условие периодичности тангенса.

Покажем это методом от противного.

Допустим, что нашлось положительное число a', меньшее π, при котором равенство $\operatorname{tg}(z+a') = \operatorname{tg} z$ справедливо при всех значениях аргумента z.

Положим, $z = 0$, получим $\operatorname{tg}(0+a') = \operatorname{tg} 0$, или $\operatorname{tg} a' = 0$, так как $\operatorname{tg} 0 = 0$.

Но значение, равное 0, тангенс принимает только в двух точках числовой окружности: A и A', а так как в этих точках изображаются числа вида πk (k — целое), то $a' = \pi k$. По допущению $0 < a' < \pi$, следовательно, $0 < \pi k < \pi$, или, после деления на π, $0 < k < 1$.

Опять получили противоречивое неравенство, следовательно, сделанное нами вначале допущение отбрасываем. Остается, таким образом, признать, что период $\operatorname{tg} z$ равен π.

Периодичность круговых функций наглядно обнаруживается на их графиках (см. рисунки 32, 34, 35 и 36).

Через промежутки длиной 2π происходят периодические повторения одной и той же части синусоиды и косинусоиды. На любом отрезке оси Oz, равном 2π, укладывается полная волна каждой из этих кривых.

Графики тангенса и котангенса состоят из бесконечного множества одинаковых ветвей, повторяющихся через промежутки длиной π. Каждая такая ветвь графика соответствует одному периоду, равному π[1].

Периодичность круговых функций дает возможность преобразовывать их аргументы так, чтобы они не превосходили число, равное периоду. Покажем это на примерах.

Пример 1. Заменить аргумент функции $\sin 123{,}7\,\pi$ числом, не превосходящим период синуса.

Решение. Период синуса равен 2π. Разделим число $123{,}7\,\pi$ на 2π, получим: $123{,}7\pi = 2\pi \cdot 61 + 1{,}7\pi$, следовательно,

$$\sin 123{,}7\pi = \sin (2\pi \cdot 61 + 1{,}7\pi) = \sin 1{,}7\pi.$$

Пример 2. Привести $\cos(-5423^\circ)$ к косинусу аргумента в промежутке $[0;\ 360^\circ]$.

Решение. Разделим число 5423° на 360°, получим: $5423^\circ = 360^\circ \cdot 15 + 23^\circ$. Следовательно, по свойству периодичности косинуса будем иметь: $\cos(-5423^\circ) = \cos[360^\circ\ (-15) - 23^\circ] = \cos(-23^\circ) = \cos[(-23^\circ) + 360^\circ] = \cos 337^\circ$.

Пример 3. Преобразовать аргумент функции $\operatorname{tg}(-7{,}6\pi)$ к положительному числу, не превосходящему π.

Решение. Увеличим аргумент функции $\operatorname{tg}(-7{,}6\pi)$ на число 8π, кратное периоду, получим:

$$\operatorname{tg}(-7{,}6\pi) = \operatorname{tg}(-7{,}6\pi + 8\pi) = \operatorname{tg} 0{,}4\pi.$$

Пример 4. Привести аргумент функции $\operatorname{ctg} 956^\circ$ к промежутку $[0;\ 180^\circ]$.

Решение. Разделим аргумент 956° на число 180°, равное периоду котангенса, получим: $956^\circ = 180^\circ \cdot 5 + 56^\circ$. Следовательно,

$$\operatorname{ctg} 956^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ \cdot 5 + 56^\circ) = \operatorname{ctg} 56^\circ.$$

Данные примеры показывают, что при исследовании круговых функций, а также при составлении их таблиц можно ограничиться промежутками, равными периодам этих функций, так как к таким промежуткам легко приводятся любые аргументы круговых функций.

---

[1] Следует отметить, что периодичность круговых функций была установлена только со времен Леонарда Эйлера.

§ 17. Четные и нечетные функции и приводимость аргументов круговых функций к положительному аргументу

Некоторые функции при перемене знака у их аргументов изменяют только свой знак. Таким свойством обладают, например, функции

$$f(x) = x^3;\ \varphi(x) = 2x^5 + x;\ g(x) = \sqrt[3]{4x}.$$

Действительно, подставив в эти функции $-x$ вместо x, получим:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x);$$

$$\varphi(-x) = 2(-x)^5 + (-x) = -2x^5 - x = -(2x^5 + x) = -\varphi(x);$$

$$g(-x) = \sqrt[3]{4(-x)} = -\sqrt[3]{4x} = -g(x).$$

Такие функции называют нечетными.

Определение. *Функцию $F(x)$ называют нечетной, если при изменении знака у аргумента x эта функция изменяет лишь свой знак, т. е.*

$$F(-x) \equiv -F(x).$$

Встречаются и такие функции, которые вообще не изменяют своих значений при изменении знака у их аргументов. Таким свойством обладают, например, функции:

$$f(x) = x^2;\quad \varphi(x) = x^4 - 3x^2;\quad g(x) = \frac{1}{x^2-1}.$$

Действительно,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

$$\varphi(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = \varphi(x),$$

$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^2-1} = \frac{1}{x^2-1} = g(x).$$

Функции с такой особенностью называются четными.

Определение. *Функцию $F(x)$ называют четной, если она не изменяет своих значений при изменении знака у аргумента, т. е.*

$$F(-x) \equiv F(x).$$

Четность или нечетность функции легко обнаруживается на графике функции: *если график функции сим-*

метричен относительно оси ординат, то функция четная, а если график симметричен относительно начала координат, то функция нечетная.

В самом деле, пусть графиком функции $y = F(x)$ служит кривая, симметричная относительно оси Oy (рис. 41). Тогда для каждой точки $M(x, y)$ этой кривой найдется симметричная относительно оси Oy точка $M'(-x, y)$ на этой же кривой, а по свойству симметрии абсциссы этих точек отличаются только знаком, а

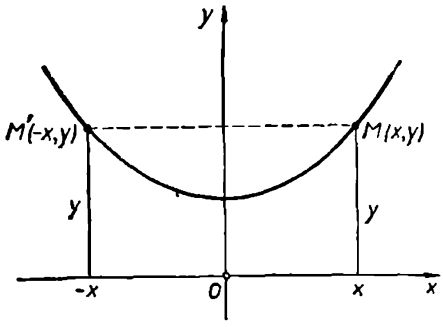


Рис. 41.

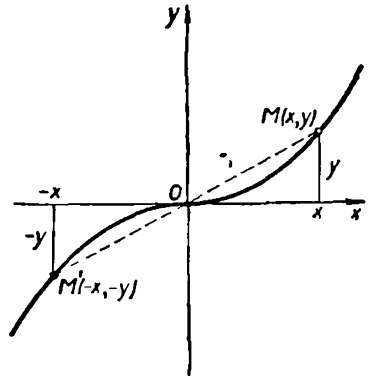


Рис. 42.

ординаты равны. А так как ординаты точек кривой выражают значения функции $y = F(x)$, то приходим к заключению, что

$$F(-x) = F(x).$$

Допустим теперь, что график функции $y = F(x)$ симметричен относительно начала координат (рис. 42)[1]. Возьмем на нем какую-либо точку $M(x, y)$. По условию для нее найдется на том же графике симметричная относительно начала координат точка M', и по свойству симметрии абсцисса этой точки будет равна $-x$, а ордината $-y$.

---

[1] Понятно, что изображенные на рисунках 41 и 42 кривые представляют лишь частные случаи графиков функций. Вообще графики четных и нечетных функций могут быть весьма сложными, например могут состоять из нескольких изолированных точек. Доказательство теоремы носит общий характер.

Итак, видим, что значения функции $F(x)$ в точках $-x$ и x отличаются только знаком, т. е. $F(-x) = -y$, а $F(x) = y$, следовательно,

$$F(-x) \equiv -F(x).$$

Справедливо и обратное заключение, т. е. *если функция четная то ее график симметричен относительно оси ординат, а если — нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат.*

В самом деле (рис. 43), пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = F(x)$ и, следовательно, выполняется равенство:

$$y_0 = F(x_0). \qquad (*)$$

Если функция $y = F(x)$ — четная, то

$$F(-x_0) = F(x_0),$$

откуда, учитывая равенство (*), получим

$$F(-x_0) = y_0,$$

а это значит, что точка $M'(-x_0, y_0)$ также принадлежит графику функции $y = F(x)$.

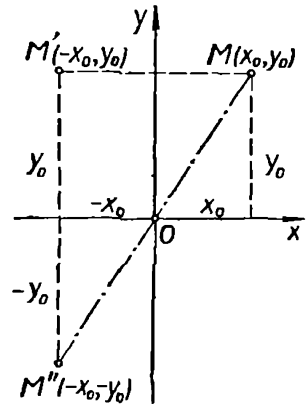


Рис. 43.

Сопоставляя координаты точек M и M', убеждаемся, что эти точки симметричны относительно оси ординат. А так как этот вывод верен для всех точек графика четной функции, то заключаем, что такой график симметричен относительно оси ординат.

Если же функция $y = F(x)$ — нечетная, то выполняется равенство:

$$F(-x_0) = -F(x_0).$$

Сравнивая это равенство с соотношением (*), получим:

$$F(-x_0) = -y_0,$$

а это значит, что точка $M''(-x_0, -y_0)$ также принадлежит графику функции $y = F(x)$.

Сопоставляя координаты точек M и M'', заключаем, что эти точки симметричны относительно начала координат, следовательно, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Примечание. Было бы неверно полагать, что функции бывают только четные или нечетные. Легко убедиться, например, что функция $y = x + 1$ не является ни четной, ни нечетной и ее график (рис. 44) не обладает указанными свойствами.

Поставим теперь вопрос: нет ли среди круговых функций четных или нечетных функций?

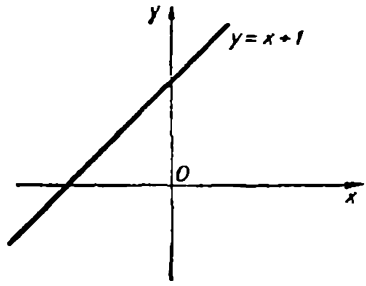


Рис. 44.

Ответ на этот вопрос дает теорема: $\cos z$ и $\sec z$ *суть функции четные, остальные круговые функции нечетные*, т. е. при всех значениях аргумента z выполняются равенства:

$$\left.\begin{aligned} \cos(-z) &\equiv \cos z \\ \sec(-z) &\equiv \sec z \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(-z) &\equiv -\sin z \\ \operatorname{tg}(-z) &\equiv -\operatorname{tg} z \\ \operatorname{ctg}(-z) &\equiv -\operatorname{ctg} z \\ \operatorname{cosec}(-z) &\equiv -\operatorname{cosec} z \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Указанные свойства легко усмотреть на графиках круговых функций. Так, например, замечаем, что точки

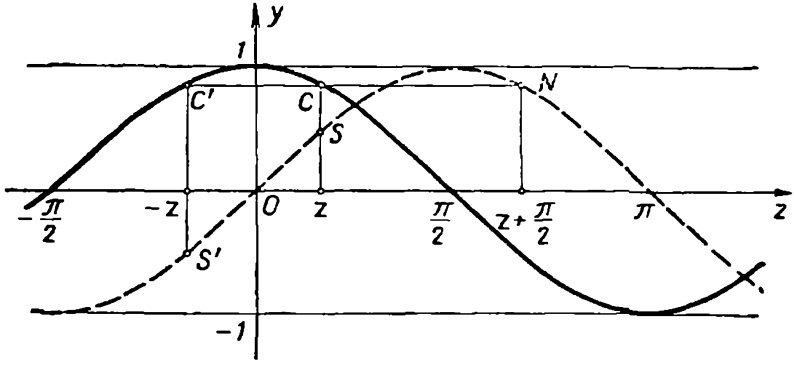


Рис. 45.

косинусоиды с абсциссами z и $-z$ расположены симметрично относительно оси OY (рис. 45) и, следовательно, у этих точек ординаты равны, а потому $\cos(-z) = \cos z$.

На синусоиде и тангенсоиде точки с абсциссами z и $-z$ симметричны относительно начала координат (рис. 45, 35) и, следовательно, их ординаты отличаются только знаком, а потому

$$\sin(-z) \equiv -\sin z \text{ и } \operatorname{tg}(-z) \equiv -\operatorname{tg} z.$$

Справедливость равенств (13, 14) можно проверить непосредственно на числовой окружности. В самом деле, если число z на числовой окружности изобразится в точке $M(z)$ (см. рис. 12), то числу $-z$ будет соответствовать точка $M'(-z)$, симметричная M относительно Ox (глава I, § 5). Но у таких точек абсцисса $x = OP$ — общая, а ординаты $PM = y$ и $PM' = -y$ отличаются только знаком, следовательно, по определению круговых функций (при $R = 1$) будем иметь:

$$\cos(-z) = x = \cos z;$$

$$\sin(-z) = -y = -\sin z;$$

$$\operatorname{tg}(-z) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} z;$$

$$\operatorname{ctg}(-z) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg} z;$$

$$\sec(-z) = \frac{R}{x} = \sec z;$$

$$\operatorname{cosec}(-z) = \frac{R}{-y} = -\frac{R}{y} = -\operatorname{cosec} z.$$

Формулы (13, 14), впервые развитые Л. Эйлером, дают возможность кратчайшим путем приводить круговые функции отрицательного аргумента к тем же функциям положительного аргумента, противоположного данному.

Примеры.

1. $\cos(-5{,}08) = \cos 5{,}08;$
2. $\operatorname{tg}(1-2x) = -\operatorname{tg}(2x-1);$
3. $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha).$

Упражнения.

Даны функции: а) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; б) $g(x)=x+\sin x$; в) $h(x)=$ $=1+\sin x$; г) $P(x)=1+\cos x$; д) $Q(x)=x+\cos x$; е) $S(x)=$ $=\sin x\cos x$; ж) $F(x)=2\sin x+\operatorname{tg} x$. Какие из них являются четными и какие нечетными?

§ 18. Сведение круговых функций любого аргумента к тем же функциям положительного аргумента, не превышающего $\frac{\pi}{2}$

В первой части курса тригонометрии мы пользовались таблицами круговых функций, составленными для углов и дуг от 0 до 90°. Может показаться, что в основном курсе, где рассматриваются функции любых углов, потребуется расширить указанные таблицы на углы, большие 90°. Оказывается, в этом нет необходимости, потому что круговые функции любого аргумента с помощью некоторых формул могут сводиться к функциям неотрицательного аргумента, не превышающего $\frac{\pi}{2}$. Выводом таких формул мы и займемся в данном параграфе.

Изменение аргумента синуса и косинуса на полупериод

Если аргумент z у синуса и косинуса увеличить или уменьшить на π, то изменится лишь знак этих функций, т. е.

$$\left.\begin{aligned}\sin(z\pm\pi)&\equiv-\sin z\\ \cos(z\pm\pi)&\equiv-\cos z\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Действительно, числа z и $z\pm\pi$ изображаются на числовой окружности точками $M(z)$ и $M'(z\pm\pi)$, симметричными относительно начала координат (см. рис. 13, где $R=1$), следовательно, ординаты и абсциссы этих точек отличаются между собой только знаком:

$PM=y,$	Аналогично, $OP=x,$
$P'M'=-y,$	$OP'=-x,$
следовательно, $P'M'=$	следовательно, $OP'=-OP.$

$= -PM$. Но при $R = 1$ имеем:

$$P'M' = \sin(z \pm \pi),$$
$$PM = \sin z,$$

поэтому

$$\sin(z \pm \pi) = -\sin z.$$

Но при $R = 1$ имеем:

$$OP' = \cos(z \pm \pi),$$
$$OP = \cos z,$$

поэтому

$$\cos(z \pm \pi) = -\cos z.$$

Примеры.

1. $\sin 1{,}2\pi = \sin(0{,}2\pi + \pi) = -\sin 0{,}2\pi$;

2. $\cos 210° = \cos(30° + 180°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Возьмем выведенные нами формулы (15):

$$\sin(z + \pi) \equiv -\sin z \text{ и } \cos(z + \pi) \equiv -\cos z.$$

Так как эти формулы справедливы при любом значении z, то можно положить в них также $z = -z'$, тогда получим новые формулы:

$$\sin(-z' + \pi) \equiv -\sin(-z') \text{ и } \cos(-z' + \pi) \equiv -$$
$$-\cos(-z'),$$

или, приняв во внимание нечетность синуса и четность косинуса,

$$\left.\begin{aligned} \sin(\pi - z') &\equiv \sin z' \\ \cos(\pi - z') &\equiv -\cos z' \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

формулы (12), (13), (14), (15), (16) дают возможность сводить синус и косинус любого аргумента к аргументу отрезка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Примеры.

1. $\sin(-7336°) = -\sin 7336° =$ [14]
   $= -\sin(360° \cdot 20 + 136°) = -\sin 136° =$ [12]
   $= -\sin(180° - 44°) = -\sin 44° \approx -0{,}6947;$ [16]
2. $\cos 17{,}4\pi = \cos(2\pi \cdot 8 + 1{,}4\pi) = \cos 1{,}4\pi =$ [12]
   $= \cos(\pi + 0{,}4\pi) = -\cos 0{,}4\pi \approx -0{,}9511.$ [15]

Примечание. Тангенс и котангенс любого аргумента легко приводится к аргументу промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ на основе теорем о периоде и нечетности этих функций.

Примеры. $\operatorname{tg} 18\,139^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 10 + 139^\circ) = \operatorname{tg} 139^\circ = \operatorname{tg}(139^\circ - 180^\circ) = \operatorname{tg}(-41^\circ) = -\operatorname{tg} 41^\circ.$

$$\operatorname{ctg}(-13{,}75\pi) = \operatorname{ctg}(-13{,}75\pi + 14\pi) = \operatorname{ctg} 0{,}25\,\pi.$$

Установленные в данном параграфе свойства круговых функций можно записать коротко одним соотношением $|F(z \pm \pi)| \equiv |F(z)|$ или общее $|F(z + k\pi)| \equiv |F(z)|$, где F — знак любой круговой функции, а k — любое целое число.

Упражнения.

1. Проверить справедливость равенств:

а) $\sin(\pi n + z) \equiv (-1)^n \sin z$; б) $\cos(\pi n + z) \equiv (-1)^n \cos z$ (n—целое).

2. Преобразовать аргументы функции к аргументу промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$\sin(-12{,}7\,\pi)$; $\cos 23{,}8\pi$; $\operatorname{tg} 5$; $\operatorname{ctg} 2{,}3$.

3. Решить уравнение:

$$4\sin(x - \pi) - \sin(2\pi - x) = 2\sin(\pi + x).$$

4. Доказать, что синусы смежных углов равны.

5. Доказать, что во всяком треугольнике синус любого угла равен синусу суммы двух других углов.

§ 19. Сведение круговых функций любого аргумента к соименным круговым функциям положительного аргумента, не превышающего $\frac{\pi}{4}$

Составление таблиц круговых функций с большой степенью точности (как мы увидим дальше) требует огромного труда. Облегчить такой труд можно максимальным сужением промежутка тех значений аргумента, для которых значения функций приходится вычислять непосредственно. Кроме того, пользоваться таблицами меньшего объема легче и быстрее.

В данном параграфе мы выведем формулы, дающие возможность кратчайшим путем сводить круговые функции любых аргументов к аргументу, принадлежащему отрезку $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Теорема о взаимной связи функций синуса и косинуса

Косинус любого аргумента равен синусу аргумента на $\frac{\pi}{2}$ *большего*, т. е.

$$\cos z \equiv \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (17)$$

Доказательство. Пусть число z изображается на числовой окружности точкой $M(z)$ (рис. 46), тогда дуга $AM = z$ радиан. Прибавим к этой дуге дугу $MM' = \frac{\pi}{2}$, получим точку $M'\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$. Строим ординаты PM и $P'M'$ точек M и M'. По определению круговых функций (при $R = 1$) будем иметь:

$$\cos z = OP,$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = P'M'.$$

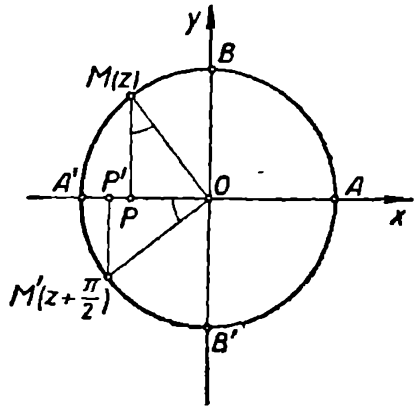


Рис. 46.

Остается показать, что отрезки OP и $P'M'$ равны.

Сначала убеждаемся, что эти отрезки имеют одинаковые знаки при всех значениях z. Так, на нашем рисунке точка $M(z)$ расположена во II четверти, следовательно, ее абсцисса OP отрицательна; но точка $M'\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ расположена в III четверти, а потому ее ордината $P'M'$ также отрицательна. Убедитесь сами в совпадении знаков абсциссы точки $M(z)$ и ординаты точки $M'\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ для случаев, когда $M(z)$ принадлежит I, III и IV четвертям.

Чтобы доказать равенство длин отрезков OP и $P'M'$, проведем радиусы OM и OM' и рассмотрим образовавшиеся треугольники OMP и $OM'P'$. Эти треугольники равны, так как у них гипотенузами служат радиусы числовой окружности, а углы OMP и $M'OP'$ равны, как острые углы, со взаимно перпендикулярными сторона-

ми. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих катетов OP и $P'M'$.

Следует заметить, что проведенные выше рассуждения теряют смысл, если число z изображается в какой-нибудь из точек A, B, A', B', так как в таких случаях треугольники OMP и $OM'P'$ не существуют. Однако в этом случае в справедливости теоремы легко убедиться непосредственно. Так, например, если число z изобразится в точке B, то $\cos z = 0$; но в таком случае число $z + \frac{\pi}{2}$ непременно изобразится в точке A' и, следовательно, $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ будет также равен 0, а потому и в данном случае будем иметь соотношение: $\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$.

Выведенное тождество обнаруживает связь синуса и косинуса; оказывается, косинус принимает те же значения, что и синус, но при аргументе на $\frac{\pi}{2}$ меньше, чем у синуса. Данное свойство синуса и косинуса наглядно передается на их графиках, изображенных на рисунке 45.

Действительно, возьмем на косинусоиде точку C с какой-нибудь абсциссой z и построим ее ординату Cz. В силу доказанного равенства (17) такую же ординату будет иметь на синусоиде точка N с абсциссой $z+\frac{\pi}{2}$. Таким образом, точку C можно получить смещением точки N параллельно оси Oz влево на расстояние $\frac{\pi}{2}$. А поскольку эти рассуждения верны для всякого значения z, то приходим к выводу, что вся косинусоида может быть получена параллельным смещением синусоиды вдоль оси Oz влево на отрезок $\frac{\pi}{2}$, что мы видим на графиках (рис. 45, 34 и 32).

Следствия из теоремы о взаимной связи синуса и косинуса

Применяя формулы (15; 17) находим:

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \sin\left[\left(z + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \equiv \sin(z+\pi) \equiv -\sin z,$$

$$\text{т. е. } \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\sin z. \qquad (18)$$

Положим, в формулах (17) и (18) $z = -z'$, получим:

$$\sin\left(-z' + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \cos(-z') \quad \text{и} \quad \cos\left(-z' + \frac{\pi}{2}\right) \equiv$$
$$\equiv -\sin(-z'),$$

откуда, учитывая четность косинуса и нечетность синуса, находим, что

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - z'\right) &\equiv \cos z' \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - z'\right) &\equiv \sin z' \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Разделим почленно первое из этих равенств на второе, а затем второе на первое, получим:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - z'\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - z'\right)} \equiv \frac{\cos z'}{\sin z'} \quad \text{и} \quad \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - z'\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - z'\right)} \equiv \frac{\sin z'}{\cos z'}. \quad (*)$$

Принимая во внимание тождества:

$$\operatorname{tg} z \equiv \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{при} \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\operatorname{ctg} z \equiv \frac{\cos z}{\sin z} \quad \text{при} \quad z \neq \pi k,$$

доказанные в § 7 (стр. 131), равенства (*) можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - z'\right) &\equiv \operatorname{ctg} z' \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - z'\right) &\equiv \operatorname{tg} z' \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Положив в формулах (20) $z' = -z'$, будем иметь:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + z\right) \equiv \operatorname{ctg}(-z) \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + z\right) \equiv \operatorname{tg}(-z),$$

откуда, учитывая нечетность тангенса и котангенса, получим:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + z\right) &\equiv -\operatorname{ctg} z \\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + z\right) &\equiv -\operatorname{tg} z \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Покажем на примерах, как используются выведенные формулы для преобразования аргументов круговых функций к аргументу промежутка $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$

1. $\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ$; [17]
2. $\cos 63^\circ = \cos(90^\circ - 27^\circ) = \sin 27^\circ$; [19]
3. $\operatorname{tg}(-7{,}4\pi) = -\operatorname{tg} 7{,}4\pi = -\operatorname{tg} 0{,}4\pi =$

$$= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 0{,}1\pi\right) = -\operatorname{ctg} 0{,}1\pi. \qquad [14{,}20]$$

Полученные в данной главе тождества называют обычно формулами сведения или приведения, так как с их помощью удается сводить (приводить) круговые функции любых аргументов к функциям простейшего аргумента, принадлежащего отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$. На практике иногда употребляют и другие формулы сведения, в которых аргумент изменяется на число $\frac{3\pi}{2}$, равное $\frac{3}{4}$ периода синуса и косинуса, а именно:

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{3\pi}{2} + z\right) \equiv \sin z; && \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + z\right) \equiv -\operatorname{ctg} z;\\
&\cos\left(\frac{3\pi}{2} - z\right) \equiv -\sin z; && \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - z\right) \equiv \operatorname{ctg} z;\\
&\sin\left(\frac{3\pi}{2} + z\right) \equiv -\cos z; && \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + z\right) \equiv -\operatorname{tg} z;\\
&\sin\left(\frac{3\pi}{2} - z\right) \equiv -\cos z; && \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - z\right) \equiv \operatorname{tg} z.
\end{aligned} \qquad (22)$$

Все эти тождества являются следствиями из предыдущих, и вывод их не представляет больших трудностей. Так, например,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + z\right) \equiv \sin\left[\left(\pi + z\right) + \frac{\pi}{2}\right] \equiv \cos(\pi + z) \equiv -\cos z. \qquad [17, 15]$$

Заменив z на $-z$, получим две другие формулы для синуса и косинуса. (22)

Вывод. Просматривая выведенные нами в данной главе формулы, можно обнаружить следующее простое правило для их получения.

а) Если аргумент круговой функции представлен в в виде $\pi \pm z$ или $2\pi \pm z$ (или в общем виде $\frac{\pi}{2} 2n \pm z$), то эта функция сводится к той же функции аргумента z; если же аргумент круговой функции представлен в виде $\frac{\pi}{2} \pm z$ или $\frac{3\pi}{2} \pm z$ (или в общем виде $\frac{\pi}{2}(2n - 1) \pm z$), то она сводится к соименной функции (к кофункции) аргумента z. *Соименными называют такие круговые функции, у которых названия отличаются только частицей «ко»*, например: тангенс — котангенс, косинус — синус и т. д.

Если обозначить любую круговую функцию через F, а ей соименную через Fs, то вышеустановленный вывод можно кратко записать в виде двух тождеств:

$$1) \quad \left|F\left(\frac{\pi}{2} \cdot \overline{2n-1} \pm z\right)\right| \equiv \left|Fs\,(z)\right|;$$

$$2) \quad \left|F\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2n \pm z\right)\right| \equiv \left|F\,(z)\right|.$$

Абсолютное значение данной круговой функции от алгебраической суммы четного (нечетного) числа $\frac{\pi}{2}$ *и аргумента* z *равно абсолютному значению той же (соименной) функции от названного аргумента* z.

Значение же полученной функции берется с тем знаком, который имеет данная функция. А так как для любых значений z формулы сведе́ния одинаковы, то указанный знак проще всего определить, считая z дугой первой четверти.

Совершим, например, по этому правилу сведе́ния функций $\cos(\pi - z)$ и $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + z\right)$ к функции аргумента z.

1) По виду аргумента приводимой функции $\cos(\pi - z)$ заключаем, что она приводится к той же функции от z, т. е. к косинусу z.

Когда z — дуга I четверти, то аргумент приводимой функции $\pi - z$ изображается во II четверти и, следовательно, $\cos(\pi - z)$ отрицательный, а потому $\cos z$ надо взять со знаком минус.

Итак, $\cos(\pi - z) = -\cos z$.

2) Вид аргумента приводимой функции $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+z\right)$ требует перехода к соименной функции от z, т. е. к $\sin z$.

Если z есть дуга I четверти, то $\left(\frac{3\pi}{2}+z\right)$ — дуга IV четверти и, следовательно, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+z\right)$ положительный, а потому $\sin z$ берем с положительным знаком, т. е.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+z\right)=\sin z.$$

Те же выводы можно получить и непосредственно, не прибегая к указанному общему правилу, а именно:

$\cos(\pi-z)=\cos(z-\pi)=-\cos z$, [формулы 13, 15]

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+z\right)=\cos\left[\left(\frac{3\pi}{2}+z\right)-2\pi\right]=$ [формула 12]

$=\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\sin z.$ [формулы 13, 19]

Следует отметить, что формулы сведéния круговых функций хотя и встречались в некоторых математических работах до Леонарда Эйлера, но общий характер они приобрели только через его труды.

Упражнения.

1. Найти значение функции:

$$\cos\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+(-1)^k\frac{\pi}{2}\right] \qquad (k\text{—целое}).$$

2. Доказать, что для углов A, B и C треугольника справедливы соотношения:

а) $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$;

б) $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

3. Вычислить, не прибегая к таблицам, произведение

$$\operatorname{tg}41^\circ\cdot\operatorname{tg}42^\circ\cdot\operatorname{tg}43^\circ\ldots\operatorname{tg}49^\circ.$$

4. Найти $\cos z$, если $\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$.

§ 20. Алгебраическая зависимость между круговыми функциями одного аргумента и возможность сведения каждой из шести круговых функций к одной из них

Некоторые из формул приведения раскрывают связь между различными круговыми функциями через преобразование аргументов этих функций. К этим формулам относятся, например, следующие:

$$\cos z \equiv \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \equiv \cos z,$$

$$\operatorname{tg} z \equiv \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

и некоторые другие.

Существуют и такого рода связи между круговыми функциями, которые раскрываются без преобразования аргументов. Они выражаются тождественными равенствами, в которых производятся только алгебраические операции над круговыми функциями одного и того же аргумента.

К таким тождествам относятся установленные нами ранее (§ 7) формулы (9; 9, *a*; 9, *b*; 9, *c*):

$$\operatorname{tg} z \equiv \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z \equiv \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z \equiv \frac{1}{\cos z}$$

$$\text{и } \operatorname{cosec} z \equiv \frac{1}{\sin z},$$

справедливые при всех допустимых значениях аргумента z.

Из этих тождеств легко получаются следующие:

$$\operatorname{tg} z \cdot \operatorname{ctg} z \equiv 1, \tag{23}$$

$$\cos z \cdot \sec z \equiv 1, \tag{24}$$

$$\sin z \cdot \operatorname{csc} z \equiv 1, \tag{25}$$

справедливые также при всех допустимых значениях z.

Докажем еще одно тождество, выражающее алгебраическую зависимость между синусом и косинусом:

$$\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть z — произвольное действительное число. На числовой окружности этому числу соответствует некоторая точка $M(z)$ (рис. 22). Строим прямоугольные координаты этой точки: $x = OP$ и $y = PM$. По определению синуса и косинуса (гл. II, §7) при $R=1$ имеем:

$$PM = \sin z, \quad OP = \cos z.$$

Но по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике OPM[1]

$$|PM|^2 + |OP|^2 = |OM|^2,$$

откуда, учитывая предыдущие равенства и то, что $OM = 1$, находим:

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1.$$

А так как при возвышении в четную степень знак абсолютной величины можно опустить, то будем иметь:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Все пять формул (9, 23, 24, 25, 26) выражают алгебраические соотношения между круговыми функциями одного аргумента. Чтобы легче это усмотреть, обозначим каждую функцию одной буквой: $\sin z = y$, $\cos z = x$, $\operatorname{tg} z = t$, $\operatorname{ctg} z = u$, $\sec z = v$, $\operatorname{csec} z = \omega$, получим систему из пяти уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{aligned} t &= \frac{y}{x}; \\ t \cdot u &= 1; \\ x \cdot v &= 1; \\ y \cdot \omega &= 1; \\ y^2 + x^2 &= 1. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Уравнения этой системы независимы между собой, т. е. ни одно из них не может быть получено как следствие из остальных четырех. Чтобы убедиться в этом, выразим все неизвестные, входящие в уравнения, через

[1] Если число z изобразится в какой-либо из точек A, B, A' и B', то треугольника OPM не получится, однако в этом случае справедливость тождества (26) проверяется непосредственно.

одно, например через x, получим систему уравнений, эквивалентную системе (I):

$$\left.\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{1-x^2} \\ t &= \frac{\pm\sqrt{1-x}}{x} \\ u &= \frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}} \\ v &= \frac{1}{x} \\ \omega &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Если отбросить какое-либо из уравнений этой системы, то отбросится одно из неизвестных и его неоткуда будет находить. Следовательно, система (II), а значит, и система (I) составлены из независимых алгебраических уравнений.

Существуют и другие алгебраические соотношения между круговыми функциями с одним аргументом, но они являются следствиями из пяти рассмотренных выше соотношений.

Так, например, исключив неизвестное t из первых двух уравнений системы (I):

$$\begin{cases} t = \frac{y}{x} \\ u \cdot t = 1, \end{cases}$$

получим соотношение $u = \frac{x}{y}$ или

$$\operatorname{ctg} z \equiv \frac{\cos z}{\sin z}, \text{ где } z \neq \pi k. \qquad (27)$$

Если из системы (I) взять уравнения:

$$\begin{cases} t = \frac{y}{x} \\ x \cdot v = 1 \\ y^2 + x^2 = 1, \end{cases}$$

и разделить последнее из них на x^2, то получится система уравнений:

$$\begin{cases} t = \frac{y}{x} \\ v = \frac{1}{x} \\ \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{x^2}, \end{cases}$$

из которой имеем: $t^2 + 1 = v^2$ или

$$\operatorname{tg}^2 z + 1 \equiv \sec^2 z, \quad \text{где } z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k. \tag{28}$$

Аналогично из уравнений

$$u = \frac{x}{y}, \quad y \cdot \omega = 1 \quad \text{и} \quad y^2 + x^2 = 1$$

системы (I) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u = \frac{x}{y} \\ \omega = \frac{1}{y} \\ 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2}, \end{cases}$$

откуда $1 + u^2 = \omega^2$ или

$$1 + \operatorname{ctg}^2 z \equiv \csc^2 z, \text{ где } z \neq \pi k. \tag{29}$$

Однако возникает вопрос, не существует ли еще какое-нибудь соотношение между круговыми функциями с одним аргументом, независимое от тех пяти, которые выражены формулами (23—27) или системой (I)?

Оказывается, такого соотношения не может быть, что доказывается от противного.

В самом деле, допустим, что существует такое шестое алгебраическое соотношение между круговыми функциями: $f(y, x, t, u, v, \omega) = 0$.

Имеем систему шести уравнений: $t = \frac{y}{x}$, $ut = 1$, $xv = 1$, $y\omega = 1$, $y^2 + x^2 = 1$, $f(y, x, t, u, v, \omega) = 0$, или эквивалентную ей систему: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$,

$$t = \frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad u = \frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \frac{1}{x},$$

$$\omega = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}, \quad f(y, x, t, u, v, \omega) = 0.$$

Исключив из шести уравнений пять неизвестных: y, t, u, v и ω, получим уравнение с одним неизвестным:

$$f\left(\pm\sqrt{1-x^2};\ x;\ \frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x};\ \frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}};\ \frac{1}{x};\ \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}\right)=0.$$

Освободив это уравнение от радикалов и знаменателя, придем к целому рациональному алгебраическому

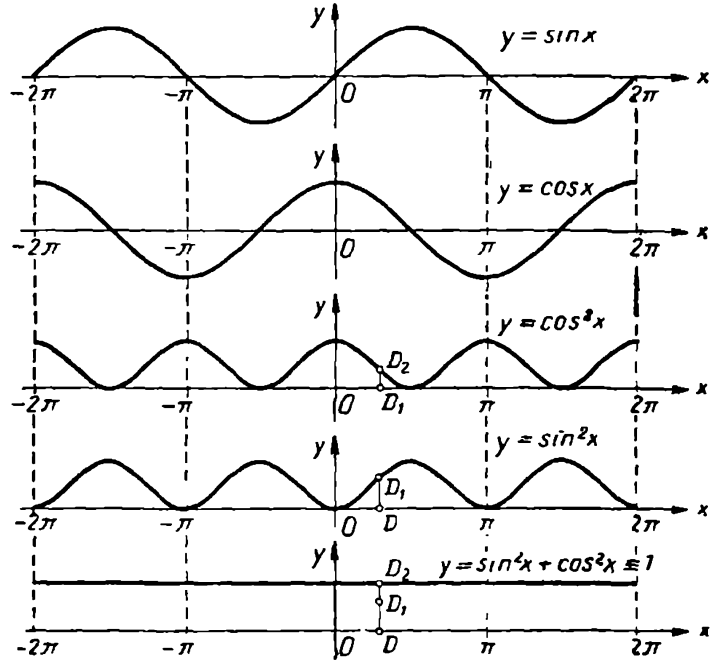


Рис. 47.

уравнению $F(x)=0$ некоторой n-й степени. Решив это уравнение, найдем n корней: $x=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$.

Но $x=\cos z$, следовательно, $\cos z=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$, т. е. $\cos z$ имеет лишь конечное множество различных значений (не больше n). А это неверно, так как при изменении z от 0 до π косинус принимает бесконечное множество значений.

Полученное противоречие показывает, что допущение о существовании шестого независимого соотношения между шестью круговыми функциями с одним аргументом невозможно.

Пять тождеств (23, 24, 25, 26, 9) выражают так называемые основные алгебраические зависимости между круговыми функциями с одним и тем же аргументом. Содержание этих тождеств можно истолковать и графически.

Так, на рисунке 47 наглядно передана последовательность операций над графиками функций $\sin x$ и $\cos x$, приводящая к тождеству

$$\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1.$$

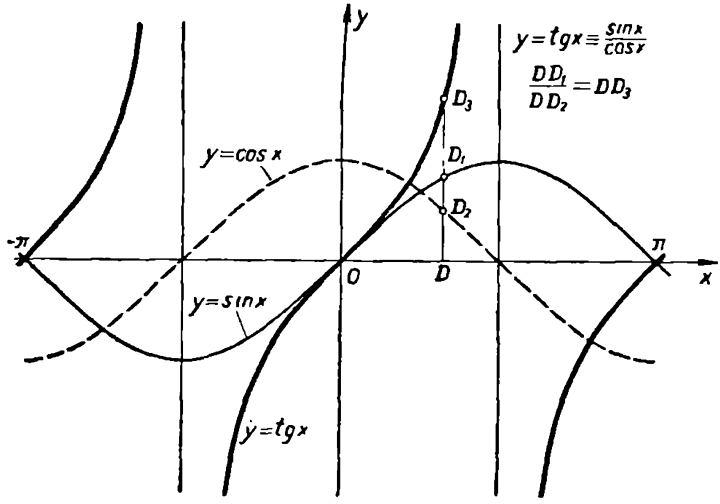


Рис. 48.

На рисунке 48 иллюстрирован переход от графиков $\sin x$ и $\cos x$ к графику $\operatorname{tg} x$, соответствующий тождеству: $\dfrac{\sin x}{\cos x} \equiv \operatorname{tg} x$.

С помощью выведенных формул (23—26 и 9) можно выражать все круговые функции через одну из них.

Так, из формулы (26) выражаем $\sin z$ через $\cos z$:

$$\sin z = \pm \sqrt{1 - \cos^2 z}\ ,$$

затем, подставив полученное значение синуса в формулы (9) и (27), находим:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 z}}{\cos z} \text{ и } \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 z}}.$$

Как видим, данному значению косинуса (в общем случае) соответствуют два значения каждой из остальных круговых функций, отличающиеся знаком. Но косинус в этом отношении не является исключением; двойственность знаков в формулах, выражающих круговые функции через одну из них, имеет место для всех функций. Разумеется, если на аргумент z заданной функции наложить дополнительные ограничения, например указать, в какой четверти числовой окружности изображается аргумент z, то из двух значений каждой из искомых функций, получаемых по таким формулам, следует выбрать только то, которое удовлетворяет дополнительным ограничениям. Поясним это на конкретных примерах.

Пусть $\cos z = -\frac{3}{5}$. По формулам получаем значения других функций:

$$\sin z = \pm\frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} z = \pm\frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg} z = \pm\frac{3}{4}.$$

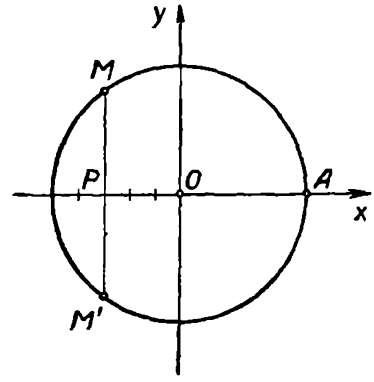


Рис. 49.

Отметим на числовой окружности данное значение косинуса $OP = -\frac{3}{5} = \cos z$ (рис. 49) и будем искать точку, в которой изображается z. Если об аргументе z ничего неизвестно (кроме того, что его косинус равен $-\frac{3}{5}$), то можно с равным правом полагать, что он находится в любой из тех четвертей, где косинус принимает отрицательные значения, т. е. либо во II, либо в III четверти, а потому $\sin z$, а также $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Если же в условии будет дополнительно сказано, что z изображается, например, во II четверти окружности, тогда ясно, что $\sin z$ положительный, а $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ отрицательные, и поэтому, применяя в данном случае те же формулы, оставляют в них только по одному знаку, соответствующему дополнительному условию.

Пример. Дано: $\operatorname{tg} z = -\frac{5}{12}$, $\frac{\pi}{2} < z < \pi$. Находим остальные круговые функции z:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z} = -\frac{12}{5}.$$

Из формул (28 и 9, *б*) находим:

$$\cos z = \frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1}}.$$

Но по условию число z изображается во II четверти, где косинус принимает только отрицательные значения, поэтому из двух значений берем отрицательное:

$$\cos z = \frac{1}{-\sqrt{\left(-\frac{5}{12}\right)^2 + 1}} = -\frac{12}{13}.$$

Заметив, что $\operatorname{tg} z \cdot \cos z \equiv \sin z$, получаем:

$$\sin z = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} = -\frac{13}{12},$$

$$\operatorname{csc} z = \frac{1}{\sin z} = \frac{13}{5}.$$

Примечание. Возможность выражать все круговые функции через одну алгебраическими операциями показывает, что можно было бы вообще определить и изучать только одну какую-нибудь из круговых функций, например синус, и с ее помощью выражать законы различных периодических процессов. Однако практически оказалось более удобным и целесообразным (в смысле экономии времени и сил) определять и изучать все шесть круговых функций и для каждой из них иметь отдельную таблицу; правда, в последнее время все реже и реже употребляют таблицу $\sec z$ и $\operatorname{csc} z$, так как современные вычислительные средства дают возможность быстро вычислять $\sec z$ и $\operatorname{csc} z$ по формулам $\sec z \equiv \frac{1}{\cos z}$ и $\operatorname{csc} z \equiv \frac{1}{\sin z}$.

Упражнения.

1. Найти все круговые функции аргумента z, если известно, что $\operatorname{tg} z = \frac{1}{2}$, а $\sin z < 0$.

2. Найти круговые функции угла A, принадлежащего треугольнику, если известно, что $\cos A = -0{,}45$.

3. Существует ли такое число z, для которого:

а) $\sin z = \frac{1}{3}$, а $\cos z = \frac{1}{4}$?

б) $\sin z = \sqrt{\frac{1}{3}}$, а $\cos z = -\sqrt{\frac{2}{3}}$?

§ 21. Тождества и тождественные преобразования круговых функций

Две функции от одних и тех же аргументов называют тождественно равными, если они имеют одну и ту же область определения и принимают равные значения при всех допустимых значениях аргументов.

Примеры тождественно равных функций: $x^2 - y^2$ и $(x+y)(x-y)$, $\cos z$ и $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$, $\lg 10x$ и $1 + \lg x$ при $x > 0$.

Если две тождественно равные функции соединить знаком $\equiv$, то получается равенство, справедливое при всех допустимых значениях аргументов. Такое равенство называют тождеством.

Примеры тождеств:

$$x^2 - y^2 \equiv (x+y)(x-y),$$

$$\cos z \equiv \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\lg 10x \equiv 1 + \lg x \quad (x>0),$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1.$$

Если в состав тождества входят только круговые функции, то его называют тригонометрическим тождеством. К простейшим тригонометрическим тождествам можно отнести формулы сведения и равенства, выражающие алгебраическую зависимость между круговыми функциями.

Переход от данной функции к тождественно равной ей функции называют тождественным преобразованием.

При доказательстве некоторых теорем и исследовании функций, а также в процессе решения задач и уравнений приходится часто производить тождественные преобразования одних тригонометрических выражений в другие. При таких преобразованиях широко используются не только определения круговых функций, но и зависимости между ними.

Покажем это на примерах.

Пример 1. Доказать, что функция $f(z) = \dfrac{\sin z - \operatorname{tg} z}{\cos z - \operatorname{ctg} z}$ $\left(z \neq \dfrac{\pi}{2} k\right)$ не может принимать отрицательных значений.

Доказательство. Используя формулы (9.27), подвергаем данную функцию тождественным преобразованиям:

$$f(z) \equiv \frac{\sin z - \dfrac{\sin z}{\cos z}}{\cos z - \dfrac{\cos z}{\sin z}} \equiv \frac{\sin^2 z\,(\cos z - 1)}{\cos^2 z(\sin z - 1)} \equiv \operatorname{tg}^2 z \cdot \frac{1 - \cos z}{1 - \sin z}.$$

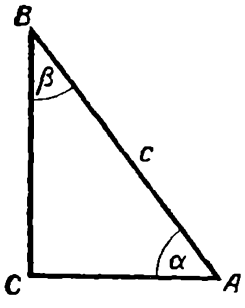


Рис 50.

Но $\operatorname{tg}^2 z \geqslant 0$, $1 - \cos z \geqslant 0$ и $1 - \sin z \geqslant 0$, следовательно, $f(z) \geqslant 0$.

Пример 2. Определить площадь прямоугольного треугольника, если известна гипотенуза c и сумма синусов острых углов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = q.$$

Решение. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник (рис. 50). Его площадь S выразится так:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} c \sin\alpha \cdot c \cos\alpha = \frac{1}{2} c^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Для определения произведения $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ используем данное равенство: $\sin\alpha + \sin\beta = q$, а именно, учитывая, что $\beta = 90° - \alpha$ и, следовательно, $\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, перепишем это равенство так:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = q,$$

возведем обе части в квадрат, получим:

$$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = q^2,$$

откуда, принимая во внимание тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \equiv 1$, находим:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{q^2 - 1}{2}.$$

Следовательно, $S = \dfrac{1}{4} c^2 (q^2 - 1)$. Как видим, задача имеет решение, если $q > 1$.

Пример 3. Найти значение дроби $D = \frac{\cos z}{\cos z - \sin z}$, если $\operatorname{tg} z = 2{,}7$.

Решение. Предварительно разделим числитель и знаменатель этой дроби на $\cos z$, получим: $D = \frac{1}{1-\operatorname{tg} z}$, следовательно, $D = \frac{1}{1-2{,}7} = -\frac{10}{17}$.

Пример 4. При каком значении параметра p выражение $y = \sin^6 x + \cos^6 x + p(\sin^4 x + \cos^4 x)$ не зависит от x?

Решение. Возведем в квадрат, а затем в куб тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$, будем иметь:

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x \equiv 1;$$

$$\sin^6 x + 3\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x \equiv 1.$$

Из первого равенства находим:

$$\sin^4 x + \cos^4 x \equiv 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

Из второго равенства находим:

$$\sin^6 x + \cos^6 x \equiv 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \equiv$$
$$\equiv 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x.$$

Таким образом, данное выражение можно записать так:

$$y = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x + p(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) \equiv 1 + p - (3 + 2p)\sin^2 x \cos^2 x.$$

Замечаем, что при $3+2p = 0$, т. е. $p = -\frac{3}{2}$, будем иметь: $y = 1 + p = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} = \text{const}$ следовательно, данное выражение не зависит от x при $p = -\frac{3}{2}$.

Пример 5. Доказать тождество:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \equiv \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (\alpha \neq \pi k).$$

Решение. Преобразуем левую часть так:

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \equiv \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} \equiv \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} \equiv$$
$$\equiv \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} \equiv \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Пример 6. Упростить выражение:

$$u = \operatorname{tg} x + \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

Решение. $u = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{\dfrac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}} \equiv$

$$\equiv \frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{(1+\sin x)^2}} \equiv \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{|1+\sin x|} \equiv$$

$$\equiv \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{|\cos x|}{1+\sin x},$$

так как $1 + \sin x > 0$.

Далее следует рассмотреть отдельные случаи, когда $\cos x > 0$ и $\cos x < 0$.

Если $\cos x > 0$, то $|\cos x| = \cos x$ и, следовательно,

$$u = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} \equiv \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x (1+\sin x)} \equiv$$

$$\equiv \frac{\sin x + 1}{\cos x (1+\sin x)} \equiv \frac{1}{\cos x}.$$

Если $\cos x < 0$, то $|\cos x| = -\cos x$; тогда

$$u = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{1+\sin x} \equiv \frac{\sin x + \sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x (1+\sin x)}.$$

Упражнения.

1. Вычислить значение выражения

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}, \text{ если } \operatorname{tg} x = 1\frac{3}{7}.$$

2. Определить величину произведения $P = \sin x \cos x$, если $\sin x + \cos x = a$.

3. Какова должна быть зависимость между числами a и b, чтобы равенства

$$\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha = a \text{ и } \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha = b$$

были совместны?

4. Найти значение выражения $\dfrac{m \sin \alpha + n \cos \alpha}{m \sin \alpha - n \cos \alpha}$, если известно, что $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha$.

5. Доказать тождества:

а) $\sin^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^6 x \equiv 1$;

б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\dfrac{5\pi}{3} + x\right) \operatorname{ctg}\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) + \operatorname{tg}(\pi + x) \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) \equiv$

$$\equiv \sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

6. Дано: $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $g(x) = \sin^2 x$. Доказать, что

$$f(x) - g(x) \equiv f(x) \cdot g(x).$$

7. При каких значениях аргумента x функции $f(x) = \cos^2 x$ и $g(x) = 2(\sin x + 1)$ принимают равные значения?

8. Найти координаты точек, в которых график функции $y = 7(1 - \cos x) - 2\sin^2 x$ пересекает ось абсцисс.

9. Найти значение аргумента z, при котором функция $f(z) = 2\sin z \operatorname{tg} z + \cos z$ принимает значение, равное 1.

10. Используя тождества, $\csc x \equiv \frac{1}{\sin x}$, $\sec x \equiv \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{tg} x \equiv \frac{\sin x}{\cos x}$ и уже построенные графики функций $\sin x$ и $\cos x$, построить графики функций: $\csc x$, $\sec x$ и $\operatorname{tg} x$.

ГЛАВА V

ОБОБЩЕННЫЕ КРУГОВЫЕ ФУНКЦИИ

§ 22. Гармонические колебательные движения и необходимость обобщения понятий круговых функций

В §6 второй главы рассматривался механизм преобразования кругового движения в прямолинейное колебательное, называемое простым гармоническим движением (см. рис. 14). В §7 было получено аналитическое выражение закона такого движения в виде функции $y = R \sin \omega t$. Однако данная функция не выражает общий закон всех простых гармонических процессов. Получить такой общий закон можно с помощью геометрической модели того же механизма в виде окружности с центром в начале координат и радиусом R, по которой совершает равномерное движение точка M со скоростью ω радиан в секунду (рис. 51). Для этого, как и прежде, достаточно рассмотреть движение проекции точки M на ось Oy, но в предположении, что в начале движения точка M занимает положение, отличное от A.

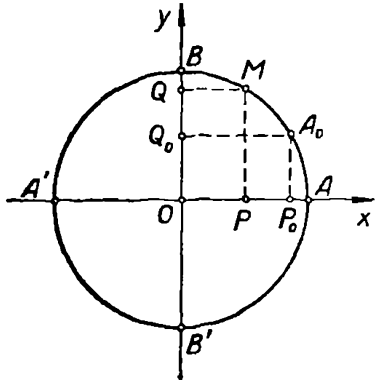


Рис. 51.

В самом деле, пусть A_0 — исходное положение точки M. За t секунд она опишет дугу $A_0M = \omega t$ радиан. Обозначив проекции точки M на оси координат через Q

и P, а дугу AM через φ, будем иметь (по определению синуса и косинуса дуги φ):

$$\sin\varphi = \frac{PM}{R} = \frac{OQ}{R}, \quad \cos\varphi = \frac{OP}{R},$$

откуда $OQ = R\sin\varphi$, $OP = R\cos\varphi$.

Если дуга $AA_0 = \varphi_0$ радиан, то $\varphi = \smile AM = \smile AA_0 + \smile A_0M = \varphi_0 + \omega t$ и предыдущие равенства перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} OQ &= R\sin(\omega t + \varphi_0) \\ OP &= R\cos(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Этими функциями выражаются величины отклонения проекций P и Q от их среднего положения O в любой момент движения точки M.

Каждая из величин, входящих в данные функции, имеет свой физический смысл и в соответствии с этим определенное название.

Величину $\varphi = \omega t + \varphi_0$, определяющую положение движущейся точки M, называют переменной фазой колебания, а постоянную величину φ_0 — начальной фазой колебания. Последнее название объясняется тем, что в начале движения, т. е. при $t = 0$ фаза $\varphi = \varphi_0$.

Величину R называют размахом или амплитудой колебания; она выражает наибольшие отклонения проекций Q и P от их среднего положения O. Действительно, с изменением φ синус и косинус изменяются от -1 до $+1$, следовательно, величины $OQ = R\sin\varphi$ и $OP = R\cos\varphi$ изменяются от $-R$ до $+R$.

Величину $T = \frac{2\pi}{\omega}$ сек. называют периодом колебания; она равна тому промежутку времени, в течение которого точка M описывает полную окружность, а ее проекции P и Q совершают свои полные колебания, т. е. каждая из них проходит из своего исходного положения (первая из P_0, а вторая из Q_0) до конца диаметра, а затем в обратном направлении до другого конца диаметра и, наконец, возвращается снова в свое исходное положение.

Легко убедиться в том, что период колебания T является периодом функций $R\sin(\omega t + \varphi_0)$ и $R\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Действительно, $\omega T = 2\pi$, поэтому

$$R\sin[\omega(t+T)+\varphi_0] = R\sin[\omega t + 2\pi + \varphi_0] =$$
$$= R\sin[\omega t + \varphi_0) + 2\pi] = R\sin(\varphi + 2\pi) =$$
$$= R\sin\varphi = R\sin(\omega t + \varphi_0),$$

т. е. от прибавления к аргументу функции числа $T = \frac{2\pi}{\omega}$ величина функции не изменилась.

Остается показать, что никакое положительное число, меньшее T, не может служить периодом этой функции. Для этого заметим (как это мы делали при отыскании периода синуса, стр. 166), что в точке B данная функция принимает свое наибольшее значение $+R$; для повторения этого значения функции точка M должна описать не менее одного оборота, а следовательно, и времени до повторения данного значения функции пройдет не менее $T = \frac{2\pi}{\omega}$ сек.

Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — есть наименьшее положительное число, при котором $R\cos[\omega(t+T)+\varphi_0] = R\cos(\omega t+\varphi_0)$ для произвольного значения аргумента t.

Наконец, отметим, что функции (*) являются обобщениями рассмотренных нами ранее круговых функций. Действительно, если $R = 1$ и точка A_0 совпадает с A, то $\varphi_0 = \smile AA_0 = 0$, $\varphi = \omega t$, $OQ = R\sin\omega t$ и $OP = R\cos\omega t$. В частности, когда скорость движения точки M будет $\omega = 1$ рад/сек и $R = 1$, будем иметь: $OQ = \sin t$, $OP = \cos t$.

Надо заметить, что с обобщенной синусоидой $y = A\sin x$ в виде шаблона для выкройки приходится иметь дело жестянщику, портному и другим практикам.

В самом деле, возьмем прямой круговой цилиндр (например, для наглядности круглый стакан, у которого боковая поверхность покрыта листом бумаги) и пересечем его боковую поверхность наклонной плоскостью относительно образующих цилиндра (как показано на рисунке 52, *а*). Развернем боковую поверхность на плоскость, тогда окружность сечения $APBK$ развернется по прямой $ADBKA_1$ (рис. 52, *б*), а кривая сечения $AMNBN_1A$ развернется в кривую $AMBA_1$. Покажем, что кривая $AMBA_1$ представляет одну волну обобщенной синусоиды.

На рисунке 52, *а*) имеем: $\frac{MD}{DE} = \operatorname{tg}\alpha = k$—const, где $k = \frac{NP}{OP} = \frac{H}{R}$; короче, $\frac{y}{DE} = k$, откуда $y = k \cdot DE$; также имеем: $\frac{DE}{OD} = \sin \smile AD = \sin x$, короче $\frac{DE}{R} = \sin x$, откуда $DE = R \sin x$.

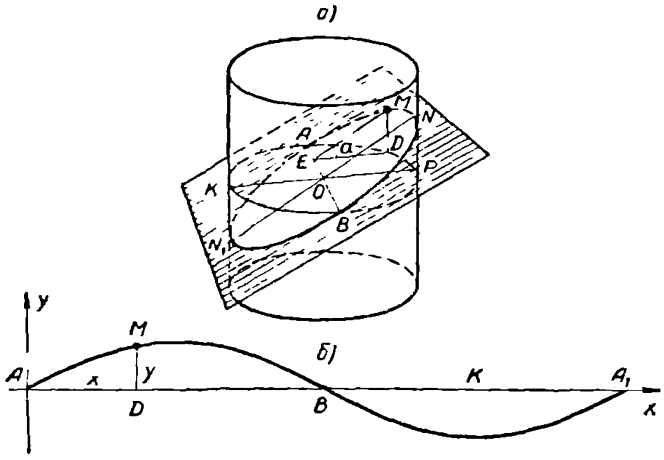


Рис. 52.

Подставляя найденное значение DE и предшествующее соотношение, получаем: $y = kR \sin x = \frac{H}{R} R \sin x = H \sin x$, т. е. $y = H \sin x$, где $H = NP$.

Итак, развертка наклонного сечения прямого кругового цилиндра имеет границу синусоидальную или точнее является обобщенной синусоидой.

Допустим, что мастеру надо сделать цилиндрическую трубу с коленом, как показано на рисунке 53, *а*). Для этого он берет прямоугольный лист жести шириной $l = 2\pi R$, где R — радиус перпендикулярного сечения трубы, и на его основании строит синусоиду $y = H \sin x$ (рис. 53, *б*); если обе части колена одного радиуса, то

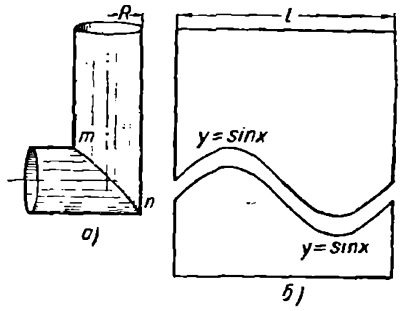


Рис. 53.

$\alpha = 45°$, а потому $H = R = 1$ и $y = \sin x$, т. е. получается обыкновенная синусоида; если же $\alpha \neq 45°$, например $\alpha = 60°$, то $y = R \operatorname{tg} 60^{\circ} \sin x \approx 1{,}735 \sin x$ и шаблоны имеют вид, показанный на рисунке 54.

Аналогично создается выкройка для портного, которому надо сшивать верхнюю часть рукава с вырезом в плече для рукава.

Упражнения.

1. Написать уравнение гармонического колебания, если амплитуда равна $\sqrt{2}$ *см*, период 0,1 сек. и начальная фаза $\frac{\pi}{6}$.

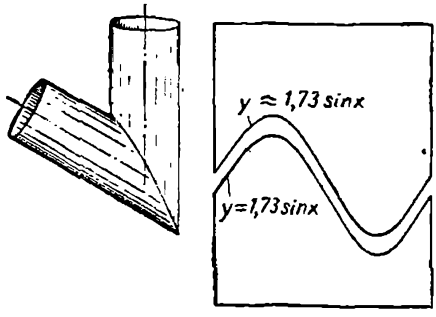


Рис. 54.

2. Найти период, амплитуду, начальную фазу и частоту колебания, заданного уравнением:

$$y = 0{,}5 \sin (314t + 2{,}1).$$

Указание. Частотой называют число полных колебаний, совершаемых в 1 сек.

3. Во сколько времени тело, совершающее гармоническое колебание по закону $s = A \sin \omega t$, проходит:

а) весь путь от среднего своего положения до крайнего?

б) первую половину его?

в) весь путь от одного своего крайнего положения до другого?

г) изменятся ли ответы, если взять уравнение $y = A \sin (\omega t + \varphi)$?

Указание к вопросу б). Первая половина пути равна $\frac{1}{2} A$; из равенства $\frac{1}{2} A = A \sin \omega t$ получаем $\sin \omega t = \frac{1}{2}$, откуда $\omega t = \frac{\pi}{6}$ и $t = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{1}{12} T$, так как период колебания $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

§ 23. Графики функций $k \sin (az + b)$ и $k \cos (az + b)$ и роль параметров a, b, k

Функция $k \sin (az + b)$

Выше мы объяснили физический смысл параметров $k = R$, $a = \omega$ и $b = \varphi_0$ функции $k \sin (az + b)$, выражающей закон гармонического колебания точки вдоль оси Oy. Теперь остановимся более подробно на выяснении влияния каждого из этих параметров на график данной функции.

Преобразование периода

В предыдущем параграфе было показано, что периодом функции $R\sin(\omega t+\varphi_0)$ является число $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Как видим, это число T не зависит от параметров R и φ_0, но находится в обратной пропорциональной зависимости от величины коэффициента ω при аргументе t. С возрастанием этого коэффициента период функции убывает, что хорошо проследить в следующей таблице:

ω	$R\sin(\omega t+\varphi_0)$	$T=\frac{2\pi}{\omega}$
1	$R\sin(t+\varphi_0)$	2π
2	$R\sin(2t+\varphi_0)$	π
3	$R\sin(3t+\varphi_0)$	$\frac{2}{3}\pi$
π	$R\sin(\pi t+\varphi_0)$	2
2π	$R\sin(2\pi t+\varphi_0)$	1
$\frac{1}{2}$	$R\sin\left(\frac{1}{2}t+\varphi_0\right)$	4π
$\frac{1}{3}$	$R\sin\left(\frac{1}{3}t+\varphi_0\right)$	6π
$\frac{1}{2\pi}$	$R\sin\left(\frac{1}{2\pi}t+\varphi_0\right)$	$4\pi^2$

Дадим параметрам R и φ_0 в функции $R\sin(\omega t+\varphi_0)$ конкретные значения: $R=1$ и $\varphi_0=0$, а для коэффициента ω возьмем три случая: $\omega_1=1$, $\omega_2=2$ и $\omega_3=\frac{1}{2}$, получим соответственно три функции: $y_1=\sin t$, $y_2=\sin 2t$ и $y_3=\sin\frac{1}{2}t$, выражающие законы трех различных гармонических колебаний с периодами $T_1=2\pi$ сек., $T_2=\pi$ сек. и $T_3=4\pi$ сек. Такие колебания совершают проекции (на ось ординат) трех точек: M_1, M_2 и M_3, движущихся по числовой окружности с постоянными скоростями $\omega_1=1$ рад/сек, $\omega_2=2$ рад/сек и $\omega_3=\frac{1}{2}$ рад/сек при условии, что эти точки начали свое движение одновременно из одного и того же положения A (рис. 55).

Действительно, за t сек., протекших от начала движения, точки M_1, M_2 и M_3 опишут соответственно дуги $AM_1 = t$ радиан, $AM_2 = 2t$ радиан и $AM_3 = \frac{1}{2}t$ радиан. По определению синуса дуг будем иметь:

$$\sin \cup AM_1 = \frac{P_1M_1}{R}, \text{ т. е. } \sin t = y_1 \ (R = 1,\ P_1M_1 = y_1);$$

$$\sin \cup AM_2 = \frac{P_2M_2}{R}, \text{ т. е. } \sin 2t = y_2 \ (P_2M_2 = y_2);$$

$$\sin \cup AM_3 = \frac{P_3M_3}{R}, \text{ т. е. } \sin \frac{1}{2}t = y_3 \ (P_3M_3 = y_3).$$

Построим графики данных функций (на одном чертеже) в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ известным нам геометрическим способом.

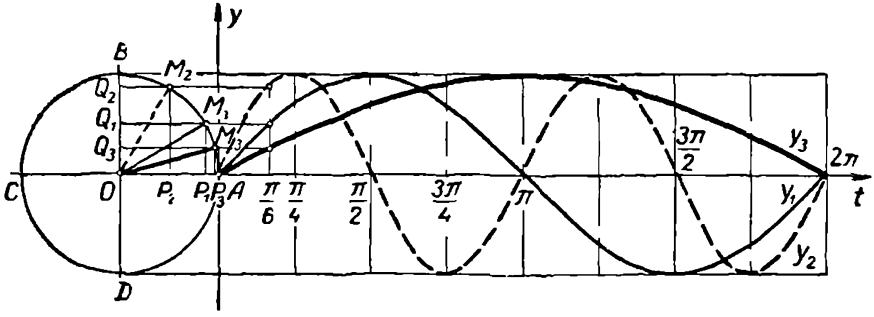


Рис. 55.

Графиком функции $y_1 = \sin t$ является обыкновенная синусоида, с которой мы хорошо знакомы; на отрезке оси At, равном указанному промежутку $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, уложится полная волна синусоиды, так как за время $t = 2\pi$ сек. точка M_1 опишет полную окружность и придет в свое исходное положение A, а ее проекция Q_1 совершит полное колебание.

За то же время $t = 2\pi$ сек. точка M_2 успеет дважды описать числовую окружность, так как ее скорость движения в два раза больше скорости точки M_1, поэтому на том же отрезке оси At от 0 до 2π уложится две полные волны графика функции $y_2 = \sin 2t$.

Скорость движения третьей точки M_3 меньше, чем у точки M_1, в два раза, поэтому она за те же 2π сек. успеет описать только верхнюю половину числовой ок-

ружности, и, следовательно, на отрезке оси At от 0 до 2π уложится лишь половина волны графика функции $y_3 = \sin \frac{1}{2} t$. Полная волна графика этой функции заняла бы отрезок $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$, соответствующий ее периоду, т. е. времени, за которое точка M_3 описывает всю окружность, а ее проекция Q_3 совершает полное колебание.

Наблюдая мысленно за движением точек M_1, M_2 и M_3 и их проекций на ось Oy, а также сопоставляя построенные нами графики функций $y_1 = \sin t$, $y_2 = \sin 2t$ и $y_3 = \sin \frac{1}{2} t$, приходим к выводу:

1. Гармонические колебания, выраженные функциями $\sin t$, $\sin 2t$ и $\sin \frac{1}{2} t$, имеют одну и ту же амплитуду (размах) $R = 1$ и одну и ту же начальную фазу $\varphi_0 = 0$, но различные периоды: $T_1 = 2\pi$, $T_2 = \pi$ и $T_3 = 4\pi$, обусловленные различными скоростями движения точек M_1, M_2 и M_3.

2. Функции $\sin t$, $\sin 2t$ и $\sin \frac{1}{2} t$ при своем изменении проходят через одни и те же значения промежутка $[-1; 1]$, но одинаковые значения принимают при различных значениях аргумента t.

3. Графики функций $\sin 2t$ и $\sin \frac{1}{2} t$ представляют собой деформированные синусоиды, а именно: первый из них есть синусоида, сжатая вдоль оси абсцисс в два раза (уменьшение периода вдвое повлекло за собой уменьшение длины волны графика также в два раза); второй график есть синусоида, растянутая вдоль оси абсцисс вдвое (увеличение периода в два раза вызвало увеличение длины волны графика также в два раза).

Все сказанное об изменении периода функции $R \sin(\omega t + \varphi_0)$ и влиянии такого изменения на график остается в силе и при других конкретных значениях коэффициента ω, а именно: график функции $\sin \omega t$ получается сжатием (при $\omega > 1$) или растяжением (при $0 < \omega < 1$) обыкновенной синусоиды вдоль оси абсцисс в отношении $\omega : 1$.

Упражнение.

Построить графики функций: $y_1 = \sin z$, $y_2 = \sin 3z$, $y_3 = \sin \frac{1}{3} z$.

Преобразование амплитуды

Сравним две функции $y = \sin \omega t$ и $y_1 = R \sin \omega t$, выражающие законы гармонических колебаний с равными периодами, но различными амплитудами. Заметив, что при всяком значении аргумента t имеет место соотношение $y_1 = Ry$, приходим к заключению, что график функции $y_1 = R \sin \omega t$ можно получить изменением в отношении $R : 1$ ординат всех точек графика функции $y = \sin \omega t$, т. е. деформацией этого графика в отношении $R : 1$ вдоль оси ординат, причем при $R > 1$ «растяжением», а при $0 < R < 1$ «сжатием»[1].

Ясно, что при таком преобразовании графика $y = \sin \omega t$ длина его волн сохранится, а высота изменится, а имен-

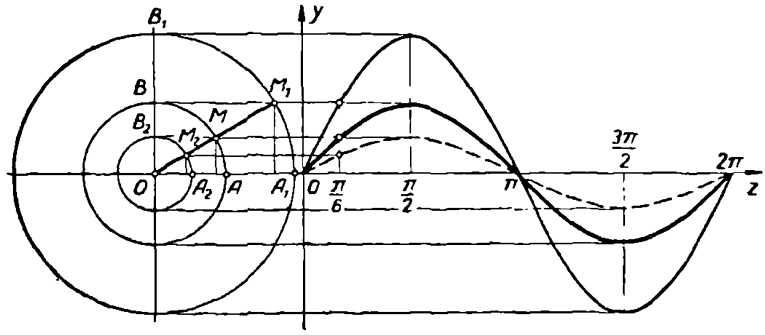


Рис. 56.

но: до преобразования она равнялась 1 (наибольшему значению функции), после преобразования она станет равной R.

На рисунке 56 построены графики трех функций: $y = \sin z$, $y_1 = 2 \sin z$ и $y_2 = \frac{1}{2} \sin z$, имеющих один и тот же период 2π, но различные амплитуды: 1, 2 и $\frac{1}{2}$. Этими функциями выражаются законы гармонических колебаний, совершаемых проекциями на ось ординат трех различных точек M, M_1 и M_2 подвижного радиуса окружности, вращающегося вокруг ее центра с постоянной скоростью $\omega = 1$ рад/сек, причем указанные точки взяты

[1] Если коэффициент R отрицательный, то, кроме указанной операции «растяжения» графика, будет иметь место еще отражение графика относительно оси абсцисс.

так, что $OM = 1$, $OM_1 = 2$ и $OM_2 = \frac{1}{2}$. На графиках данных функций весьма наглядно подтверждается сделанный выше нами вывод о роли параметра R, т. е. амплитуды колебания.

Упражнение.

Построить на одном чертеже графики функций:

$$\sin z, \quad 3\sin z, \quad \frac{1}{3}\sin z, \quad -\sin z, \quad -3\sin z.$$

Смещение фазы

Чтобы выяснить влияние начальной фазы колебания φ_0 на график функции $R\sin(\omega t + \varphi_0)$, положим $R = 1$ и $\omega t = z$, получим функцию $y_1 = \sin(z + \varphi_0)$. Очевидно, эта

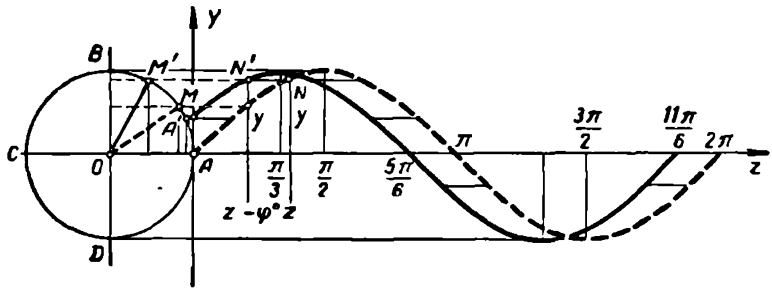


Рис. 57.

функция в процессе своего изменения проходит те же значения, что и функция $y = \sin z$, но «опережает» ее на разность фаз, а именно: $\sin(z_1 + \varphi_0) = \sin z$, если $z_1 = z - \varphi_0$ или $z - z_1 = \varphi$.

Это обстоятельство дает возможность получить график функции $y_1 = \sin(z + \varphi_0)$ параллельным смещением кривой $y = \sin z$ вдоль оси абсцисс «влево» на отрезок φ_0, если $\varphi_0 > 0$.

В самом деле, пусть $N(z, y)$ — произвольная точка графика функции $y = \sin z$ (рис. 57). Сдвинем эту точку параллельно оси Az влево на отрезок φ_0, получим новую точку $N'(z - \varphi_0; y)$, которая будет принадлежать кривой $y_1 = \sin(z + \varphi_0)$, так как замена z на $z - \varphi_0$ дает:

$$y_1 = \sin(z - \varphi_0 + \varphi_0) = \sin z = y.$$

С таким преобразованием графиков мы уже встречались при построении косинусоиды, то есть графика функции $y = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$. Как видим, в данном случае $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, поэтому косинусоида получалась параллельным смещением графика функции $y = \sin z$ вдоль оси абсцисс влево на отрезок $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

На рисунке 57 построены графики двух функций: $y = \sin z$ и $y_1 = \sin\left(z + \frac{\pi}{6}\right)$. Этими функциями выражаются законы гармонических колебаний, совершаемых проекциями на ось ординат двух точек M и M', движущихся по числовой окружности с постоянной скоростью $\omega = 1$ рад/сек, причем точка M' опережает M на дугу $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, так как в начале движения при $z = 0$ точка M находилась в положении A, а точка M' занимала положение A' так, что дуга $AA' = \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$. Поскольку точки M и M' движутся равномерно с одной и той же скоростью, то дуга MM' при любом значении z будет равна $\frac{\pi}{6}$ радиан, и, следовательно, функция $y_1 = \sin\left(z + \frac{\pi}{6}\right)$ будет всегда опережать в своем изменении функцию $y = \sin z$ на одну и ту же величину аргумента $\frac{\pi}{6}$.

Все сказанное наглядно иллюстрируется на графиках.

Общий вывод

Проведенные нами исследования позволяют сделать следующий вывод.

Функцией вида $k\sin(az + b)$ выражается закон таких периодических процессов, которые называют простыми гармоническими колебаниями; изменение параметра k у этой функции вызывает изменение амплитуды колебания (на графике — высоты волны); изменение параметра a вызывает изменение периода колебания, равного $\frac{2\pi}{a}$ (на графике — изменение длины волны); изменение параметра b вызывает «смещение колебательного процесса во времени» (на графике — смещение волны вдоль оси абсцисс).

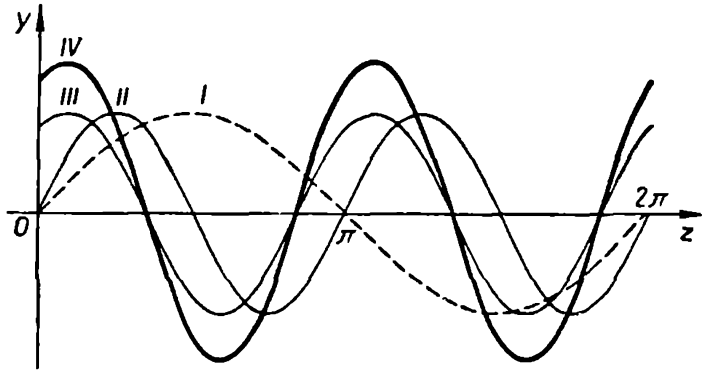
График функции $y = k \sin(az + b)$ может быть получен из обыкновенной синусоиды $y = \sin z$ путем:

1) Сжатия (или растяжения) ее вдоль оси абсцисс в отношении $a : 1$ (при $a > 0$).

2) Сжатия (или растяжения) в направлении оси ординат в отношении $k : 1$ (при $k > 0$).

3) Переноса вдоль оси абсцисс на отрезок $\frac{b}{a}$[1].

На рисунке 58 показано, как получается график функции $y = 1{,}5 \sin(2z + 1)$ из обыкновенной синусоиды последовательным выполнением указанных трех операций.



I – sin z, II – sin 2z, III – sin(2z + 1), IV – 1,5 sin(2z + 1)

Рис. 58.

Функция $k \cos(az + b)$

Нет необходимости в особом исследовании функции $y = k \cos(az + b)$, так как она представляет собой частный случай уже изученной нами функции.

В самом деле, внесем обозначение $az + b = z'$, получим $y = k \cos z'$.

Но $\cos z' = \sin\left(z' + \frac{\pi}{2}\right)$, следовательно,

---

[1] График $y = k \sin(az + b)$ можно получить, выполняя в ином порядке указанные преобразования синусонды $y = \sin z$, но если перенос синусоиды выполняется до ее «сжатия» вдоль оси абсцисс, то он производится на отрезок b, а не на $\frac{b}{a}$, как это указано выше.

$$y = k\sin\left(z' + \frac{\pi}{2}\right) = k\sin\left(az + b + \frac{\pi}{2}\right) = k\sin(az + b'),$$

где $b' = b + \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, функция $k\cos(az + b) = k\sin(az + b')$, и, следовательно, отличается от функции $k\sin(az + b)$ только начальной фазой: ее фаза $b' = b + \frac{\pi}{2}$.

Это дает возможность получить график функции $k\cos(az+b)$ параллельным смещением кривой $k\sin(az+b)$ вдоль оси абсцисс «влево» на отрезок $\frac{\pi}{2}$.

Но можно, разумеется, кривую $k\cos(az + b)$ получить и непосредственно из косинусоиды $\cos z$, подвергнув ее указанным выше операциям:

1) Сжатию (или растяжению) вдоль оси абсцисс в отношении $a : 1$ (если $a > 0$).

2) Сжатию (или растяжению) в направлении оси ординат в отношении $k : 1$ (если $k > 0$).

3) Параллельному переносу вдоль оси абсцисс на отрезок $\frac{b}{a}$.

Мы рассмотрели функции $k\sin(az + b)$ и $k\cos(az+b)$, представляющие обобщение ранее изученных функций $\sin z$ и $\cos z$. Аналогичным образом можно обобщить и другие круговые функции, т. е. $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$, и прийти к функциям вида $k\operatorname{tg}(az + b)$ и $k\operatorname{ctg}(az + b)$. Хотя физический смысл параметров a и b здесь будет несколько иным, но их влияние на график, а также способ построения графиков остаются прежними. А именно, кривая $k\operatorname{tg}(az + b)$ может быть получена из обыкновенной тангенсоиды путем:

1) ее сжатия (или растяжения) вдоль оси абсцисс в отношении $a : 1$ (если $a > 0$),

2) сжатия (или растяжения) в направлении оси ординат в отношении $k : 1$ (если $k > 0$),

3) параллельного переноса вдоль оси абсцисс на отрезок $\frac{b}{a}$.

Замечание. На основании сделанных выводов о роли параметров в обобщенных функциях можно дать простое геометрическое толкование некоторым формулам приведения.

Возьмем, например, формулу $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \cos z$. Она пока-

зывает, что функции $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos z$ тождественны, следовательно, их графики совпадают. Но по доказанному выше график функции $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$ получается параллельным смещением «нормальной» синусоиды вдоль оси абсцисс «влево» на отрезок $\frac{\pi}{2}$, следовательно, таким же смещением синусоиды получается и график функции $\cos z$, т. е. косинусоида.

Проводя аналогичные рассуждения для формулы $\sin(\pi+z) \equiv$ $\equiv -\sin z$, заключаем, что график функции $y=-\sin z$ может быть получен двумя путями: либо отражением синусоиды относительно оси абсцисс, либо параллельным смещением ее вдоль этой оси «влево» на отрезок π.

Формула $\operatorname{tg}(z \pm \pi) \equiv \operatorname{tg} z$ показывает, что тангенсоида самосовмещается при параллельном переносе ее вдоль оси абсцисс влево или вправо на отрезок π.

Упражнения.

1. Каким преобразованиям надо подвергнуть «нормальную» синусоиду, т. е. график функции $\sin z$, чтобы получить графики следующих функций:

а) $3\sin z$; $\frac{1}{3}\sin z$; $-\sin z$; $-2\sin z$?

б) $\sin\left(z+\frac{\pi}{3}\right)$; $\sin\left(z-\frac{\pi}{3}\right)$?

в) $\sin 3z$; $\sin\frac{1}{3}z$; $\sin 2\pi z$?

г) $3\sin\left(4z+\frac{2\pi}{3}\right)$; $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{z}{5}-1\right)$?

2. Построить график функции $y=\frac{1}{2}\cos\left(3z-\frac{3\pi}{4}\right)$.

3. Каким преобразованиям надо подвергнуть «нормальную» синусоиду, т. е. график функции $\sin x$, чтобы получить графики следующих функций:

а) $1+\sin x$, $1-\sin x$, $|\sin x|$?

б) $1+\cos x$, $1-\cos x$, $|\cos x|$?

4. Каким преобразованиям надо подвергнуть «нормальную» тангенсоиду, т. е. график функции $y=\operatorname{tg} z$, чтобы получить графики следующих функций:

а) $2\operatorname{tg} z$; $\frac{1}{2}\operatorname{tg} z$; $-\operatorname{tg} z$; $1+\operatorname{tg} z$; $|\operatorname{tg} z|$?

б) $\operatorname{tg}\left(z+\frac{\pi}{4}\right)$; $\operatorname{tg}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)$?

в) $\operatorname{tg} 2z$; $\operatorname{tg} \frac{1}{2} z$?

г) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(2z + \frac{\pi}{3}\right)$?

5) Найти периоды функций:

$$\sin mx; \quad \operatorname{tg} mx; \quad \cos \frac{x}{n}; \quad \operatorname{ctg} \frac{x}{n}.$$

§ 24. Применение обобщенных круговых функций при рассмотрении простых гармонических колебательных движений

К понятию круговых функций и их обобщениям мы пришли в связи с изучением некоторого вида движений, встречающихся в механике. Приведем еще несколько примеров движений такого рода, законы которых выражаются с помощью круговых функций.

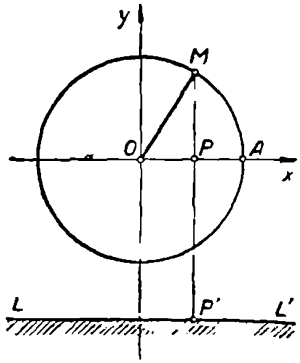


Рис. 59.

Пример 1. Маховое колесо паровой машины имеет в диаметре 240 *см* и делает 60 оборотов в минуту, вращаясь вокруг оси, расположенной на высоте в 150 *см* от плоскости пола машинного отделения.

Выразить функцией закон, по которому изменяется расстояние любой точки M, взятой на ободе маховика, от плоскости пола машинного отделения. Построить график этой функции.

Решение. Изобразим схематически в виде окружности сечение маховика плоскостью, перпендикулярной оси вращения и проходящей через точку M на его ободе (рис. 59). В плоскости сечения ось вращения маховика изобразится точкой O — центром окружности, а плоскость пола — прямой LL'. Примем точку O за начало координат, а прямую OA, параллельную LL', за ось абсцисс. Отсчет времени t начнем с того момента, когда точка M занимает на окружности положение A. Так как угловая скорость вращения маховика $\omega = 2\pi$ рад/сек, то за t сек. точка M опишет дугу $AM = 2\pi t$ радиан.

Опустим из точки M на прямую LL' перпендикуляр MP', величина которого и выражает искомую функцию. По определению синуса дуги имеем: $\sin \smile AM = \frac{PM}{OM}$, или $\sin 2\pi t = \frac{PM}{1,2}$, откуда $PM = 1,2 \sin 2\pi t$. Величина отрезка $P'M = P'P + PM = 1,5 + 1,2 \sin 2\pi t$.

Итак, расстояние точки M от плоскости пола изменяется по закону простых гармонических колебаний и выражается функцией $s = 1,5 + 1,2 \sin 2\pi t$. Период этой функции $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1$ сек., то есть времени, в течение которого маховик совершает полный оборот. Так как $\sin 2\pi t$ изменяется от -1 до $+1$, то наибольшее значение этой функции

$$S_{\max} = 1,5 + 1,2 = 2,7 \ (м)$$

получается при $\sin 2\pi t = 1$ (I), а наименьшее

$$S_{\min} = 1,5 - 1,2 = 0,3 \ (м)$$

при $\sin 2\pi t = -1$ (II).

Решая эти уравнения относительно t, находим:

I. $2\pi t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, откуда $t = \frac{1}{4} + n$ (n — целое);

II. $2\pi t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, откуда $t = -\frac{1}{4} + n$.

Таким образом, наибольшее расстояние от плоскости пола достигается точкой M в моменты движения $t = \frac{1}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{4}$, ...; минимальное расстояние при $t = \frac{3}{4}$, $1\frac{3}{4}$, $2\frac{3}{4}$, ...

На рисунке 60 построен график данной функции на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 2$, равном двум периодам. Способ построения графика читателю знаком.

Пример 2. Палец кривошипа паровой машины совершает равномерное круговое движение, делая 90 об/мин. Выразить функциями законы движения отдельных частей кривошипного механизма, изображенного схематически на рисунке 61.

Решение.

Пусть кривошип $OM = r$, шатун $MN = l$, $\sphericalangle NOM = \alpha$, $\sphericalangle MNO = \beta$ и отсчет времени движения пальца M про-

изводится с момента, когда он проходит через ось Ox в точке A.

1) Уравнение движения пальца M. Положение пальца M в любой момент движения вполне определяется прямоугольными координатами $x = OP$ и $y = PM$

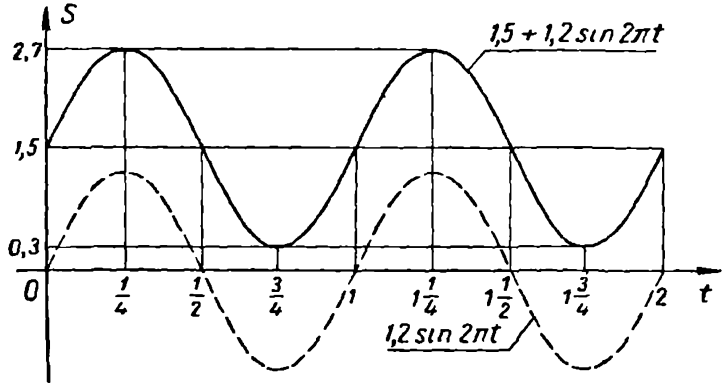


Рис. 60.

точки $M(x; y)$. Из условия следует, что угловая скорость движения кривошипа OM будет $\omega = 3\pi$ рад/сек, поэтому за t секунд точка M опишет дугу $AM = \alpha = 3\pi t$ радиан. По определению синуса и косинуса дуги имеем:

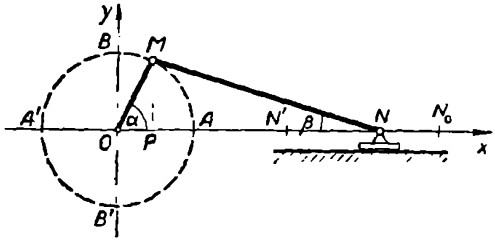


Рис. 61.

$$\sin\alpha = \frac{PM}{r} \text{ и } \cos\alpha = \frac{OP}{r}, \text{ откуда}$$

$$PM = r\sin\alpha \text{ и } OP = r\cos\alpha$$

или $y = r\sin 3\pi t$ и $x = r\cos 3\pi t$.

Возведем эти уравнения в квадрат и сложим почленно, получим:

$$y^2 + x^2 = r^2(\sin^2 3\pi t + \cos^2 3\pi t) = r^2.$$

Соотношение $x^2 + y^2 = r^2$ является уравнением окружности $O(r)$, т. е. траектории движения пальца.

2) Уравнение движения ползуна N. Ползун N по условию скользит вдоль оси Ox, поэтому его положение вполне определяется отрезком $ON = OP + PN$.

Но $OP = r\cos\alpha$, $PN = \sqrt{MN^2 - PM^2} = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}$, следовательно, $ON = r\cos\alpha + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}$, или

$$ON = r\cos 3\pi t + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2 3\pi t}.$$

При $t = 0$ имеем: $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$, и ползун занимает свое крайнее правое положение N_0, где $ON_0 = r + l$.

При $t = \frac{1}{3}$ сек. имеем: $\alpha = \pi$, $\cos\alpha = -1$, $\sin\alpha = 0$, и ползун занимает свое крайнее левое положение N':

$$ON' = r(-1) + \sqrt{l^2 - r^2 \cdot 0} = l - r.$$

3) Движение шатуна MN.

Шатун MN совершает более сложное движение, однако в каждый момент времени t по выведенным выше уравнениям мы умеем определять положение концов шатуна M и N. Так, например, при $t = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} + k\right)$ сек. угол $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (k — натуральное), конец M шатуна совпадает с точкой B и шатун MN делает максимальное отклонение вверх; другой конец шатуна N в эти моменты занимает положение, определяемое равенством:

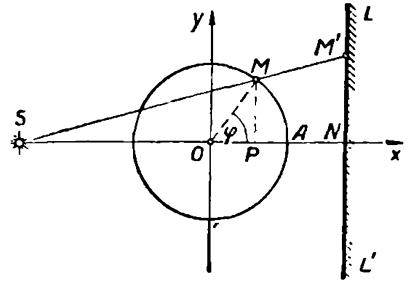


Рис. 62.

$$ON = r\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = \sqrt{l^2 - r^2}.$$

Пример 3.

Материальный шарик M, расположенный между источником света S и экраном LL' (рис. 62), совершает равномерное движение по окружности $O(R)$ со скоростью ω рад/сек. Выразить функцией закон движения тени M', отбрасываемой шариком на экран, если прямая SO перпендикулярна к экрану и лежит в плоскости окружности.

Решение. Внесем систему координат, приняв прямую SO за ось абсцисс, а точку O за начало координат.

Пусть расстояние источника света S от центра окружности O равно a, а от экрана равно b. Поскольку луч SM совершает колебательное движение в плоскости окружности, то тень M' от шарика будет совершать колебательные движения по прямой LL' (т. е. по линии пересечения плоскости окружности с экраном).

За t секунд шарик M опишет дугу $AM = \varphi = \omega t$ радиан, а тень M' отклонится от своего среднего положения N на расстояние NM'.

Из подобия треугольников SNM' и SPM находим:

$$\frac{NM'}{PM} = \frac{SN}{SP}, \text{ откуда } NM' = \frac{SN \cdot PM}{SP}.$$

Но $SN = b$, $PM = R \sin \varphi$, $SP = SO + OP = a + R \cos \varphi$.

Следовательно, искомая функция

$$NM' = \frac{R\,b \sin \varphi}{a + R \cos \varphi} = \frac{Rb \sin \omega t}{a + R \cos \omega t}.$$

В частности, если источник света расположить в центре окружности, то $SO = a = 0$ и функция принимает вид:

$$NM' = \frac{Rb \sin \omega t}{R \cos \omega t} = b \operatorname{tg} \omega t,$$

однако физический смысл этого соотношения будет иметь место только при

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \varphi < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \text{ — целое число}),$$

$$\text{т. е. при } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \omega t < \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$\text{или } \frac{1}{\omega}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) < t < \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right).$$

На рисунке 63 построен график функции $NM' = b \operatorname{tg} \omega t$ при $b = 1{,}5$ и $\omega = 2$ в промежутке $0 \leqslant \varphi \leqslant 4{,}5\pi$. Как видим, график функции не имеет точек в промежутках

$$\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2} \quad \text{и} \quad 2{,}5\pi \leqslant \varphi \leqslant 3{,}5\pi,$$

так как при указанных значениях φ луч SM не пересекает экрана LL'.

Выше мы рассмотрели некоторые процессы из области механики, совершающиеся по законам гармонических колебаний. Особенно большую роль играет теория кру-

говых функций при изучении электромагнитных явлений и, в частности, в электротехнике переменных токов, имеющих самое широкое применение как в промышленности и земледелии, так и в бытовой жизни человека. Достаточно сказать, что за небольшим исключением все мощные современные генераторы электричества дают переменные токи, величина которых и направление непрерывно изменяются по законам гармонических колебаний. Выяснение принципа возникновения переменного электрического тока и характера его изменения начнем, естественно, с рассмотрения простейших электромагнитных явлений.

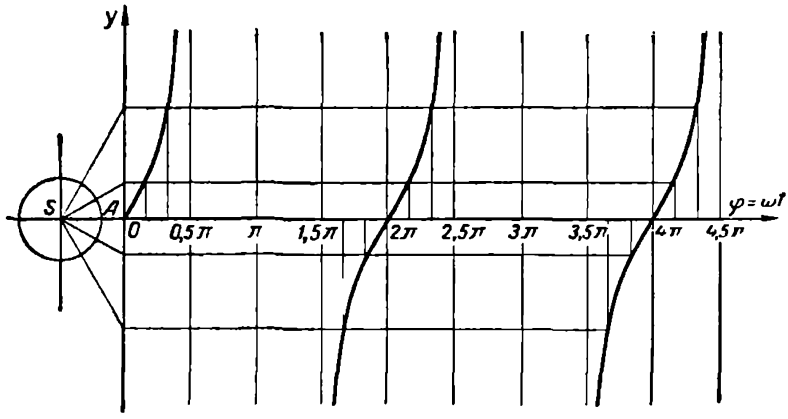


Рис. 63.

Путем опытов установлено, что в замкнутом проводнике, движущемся в магнитном поле, возникает электрический ток, электродвижущая сила которого прямо пропорциональна числу силовых линий поля, пересекаемых проводником в единицу времени.

Допустим, что в некотором проводнике, движущемся равномерно со скоростью v *см/сек* в однородном магнитном поле перпендикулярно силовым линиям, возник ток, электродвижущая сила которого, например, $E = 0{,}1$ *в*. Естественно встает вопрос, как изменится электродвижущая сила этого тока, если проводник, не изменяя скорости, станет пересекать поле под углом φ к силовым линиям?

Пусть в 1 сек. в первом случае проводник прошел путь AA_1, а во втором AA_2 (рис. 64). Очевидно, на пути

AA_2 он пересечет столько силовых линий, сколько их пересекает отрезок AB, равный проекции AA_2 на прямую AA_1, перпендикулярную силовым линиям. Следовательно, число пересеченных за 1 сек. силовых линий во втором случае будет меньше, чем в первом, в том же отношении, в каком находится AB к AA_1; отсюда заключаем, что новая электродвижущая сила e будет меньше прежней E в том же отношении, в каком находится AB к AA_1, т. е. $\frac{e}{E} = \frac{AB}{AA_1}$.

Но $\frac{AB}{AA_1} = \frac{AB}{AA_2} = \sin\varphi$, следовательно, $e = E\sin\varphi$; в частном случае имеем $e = 0{,}1\sin\varphi$.

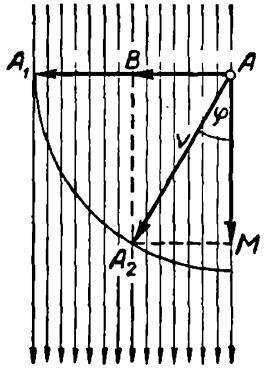


Рис. 64.

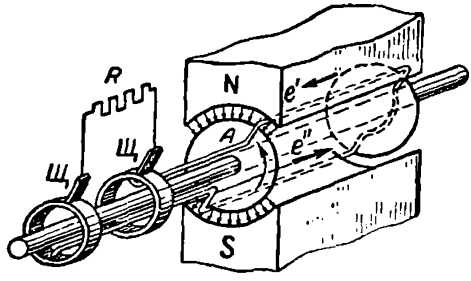


Рис. 65.

Таким образом, с изменением угла φ электродвижущая сила будет изменяться по закону синуса. При $\varphi=0$ $e = 0{,}1 \cdot \sin 0 = 0$; в этом случае проводник скользит вдоль силовых линий и их не пересекает, а потому электрический ток в нем не возникает. Если $\varphi = 90°$, то $e = 0{,}1 \cdot \sin 90° = 0{,}1$ *в*; как видим, в этом случае проводник движется перпендикулярно силовым линиям и электродвижущая сила возникшего в нем тока достигает своего максимума.

Генераторы переменного тока устраиваются обычно так, что в них проводник совершает круговые движения в однородном магнитном поле. На рисунке 65 дана схема простейшего из таких генераторов. Между полюсами N и S электромагнита вращается цилиндр, на котором укреплен проводник в виде витка медного провода (обыч-

но делается не один, а несколько витков). Концы витка присоединены к контактным кольцам, изолированным от вала цилиндра. К кольцам прижимаются неподвижные щетки *Щ*, которые соединяются проводами с приемником энергии *R*. При вращении цилиндра проводник пересекает силовые линии магнитного поля и в проводнике возникает переменный электрический ток.

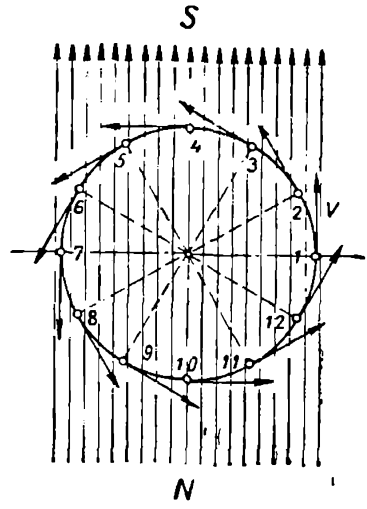


Рис. 66.

В начальном положении *1* (см. рис. 66) проводник движется вдоль магнитных линий и не пересекает их, поэтому в этот момент электродвижущая сила равна нулю. Затем проводник начинает пересекать магнитные линии и возникающая в нем электродвижущая сила увеличивается, достигая наибольшего значения в положении *4*, когда проводник движется перпендикулярно направлению магнитного поля. После этого электродвижущая сила убывает, уменьшаясь до нуля в положении *7*. В положениях *8*, *9*, *10*, *11* проводник движется под другим полюсом. В соответствии с этим меняется направление электродвижушей силы, которая, как и в первую половину оборота, достигает своего наибольшего значения в положении *10* и уменьшается затем до нуля.

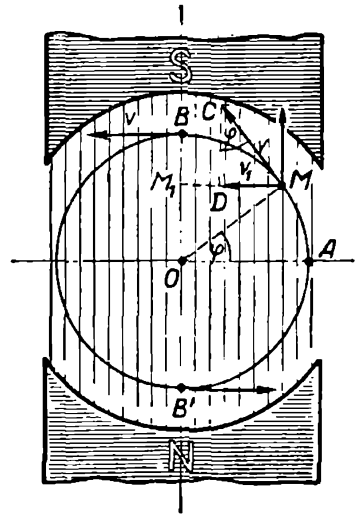


Рис. 67.

После одного оборота процесс повторяется.

Нетрудно найти функцию, выражающую изменение электродвижущей силы тока, возникающего в проводнике. Пусть максимальное значение электродвижущей силы равно *E в*. Этого значения достигает электродвижущая

сила в момент, когда скорость v движущегося проводника направлена перпендикулярно магнитным линиям, т. е. в положениях B и B' (рис. 67). Когда проводник находится в положении M, электродвижущая сила будет находиться в том же отношении к своей максимальной величине, в каком находится v_1 к v[1], т. е. $\frac{e}{E} = \frac{v_1}{v}$, где v_1 — составляющая вектора скорости v, перпендикулярная магнитным силовым линиям.

Но $\frac{v_1}{v} = \sin\varphi$, где φ — величина угла AOM ($\measuredangle AOM = \measuredangle DCM$). Следовательно, $e = E\sin\varphi$.

Если угловая скорость вращения цилиндра, на котором закреплен проводник, равна ω рад/сек, а время t

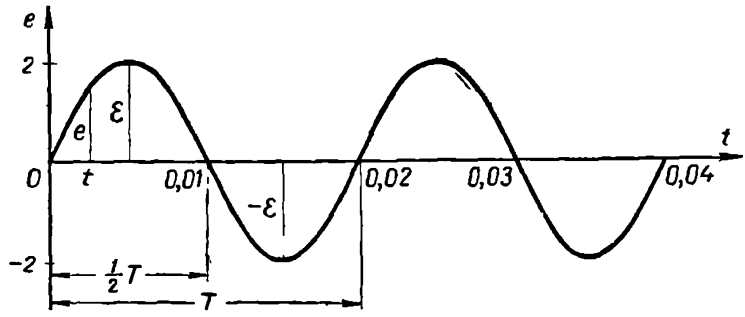


Рис. 68.

отсчитывается с момента, когда проводник находился в положении A, то дуга $AM = \varphi = \omega t$ рад/сек и, следовательно, $e = E\sin\omega t$.

Таким образом, мы убеждаемся, что изменение электродвижущей силы переменного тока происходит по закону гармонических колебаний.

На рисунке 68 изображен график электродвижущей силы переменного тока $e = E\sin\omega t$ для случая, когда $E = 2в$ и $\omega = 100\pi$ рад/сек, т. е. $e = 2\sin 100\pi t$. Период данной функции $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{50}$ сек. есть время, в течение которого совершается один цикл изменения электродвижущей силы переменного тока. На графике это выразилось в том, что на отрезке $T = 0{,}02$ уложилась полная волна кривой.

[1] См. объяснение в предыдущей задаче с движением проводника

Высота волны $E = 2$ *в* выражает амплитуду колебания электродвижущей силы тока, т. е. наибольшее ее значение. На протяжении первой четверти периода электродвижущая сила возрастает от 0 до 2, затем она убывает и к концу полупериода доходит до нуля. Во второй половине периода э. д. с. возникает снова, но противоположного направления и изменяется от 0 до—2, а затем «убывает» от—2 до 0. Поэтому половина волны, соответствующая данному промежутку времени, расположена ниже оси абсцисс. Дальше весь процесс изменения повторяется в том же порядке.

Число полных периодов или колебаний, совершаемых электродвижущей силой тока в 1 сек., называют в электротехнике частотой тока. Наши электростанции дают обычно токи частотой в 50 периодов в секунду.

Если источник переменной электродвижущей силы $e = E \sin \omega t$ питает некоторую электрическую цепь (например, к источнику подключены провода осветительной сети), то в этой цепи получается также переменный ток, сила которого пропорциональна электродвижущей силе, *следовательно, изменяется по закону:* $i = I \sin \omega t$, *где* I — максимальная сила тока, а i — сила тока в данный момент времени t. Электродвижущую силу и силу тока измеряют специальными приборами и выражают в особых единицах—вольтах и амперах.

Упражнения.

1. Найти период, амплитуду и начальную фазу следующих гармонических движений:

а) $s = 2 \sin 3t$; б) $s = 1{,}6 \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{12}\right)$;

в) $s = 5 \sin \left(100\pi t - \frac{4\pi}{3}\right)$;

г) $y = \sin \frac{250t + 17}{6}$.

2) Выразить аналитически закон изменения э. д. с. генератора тока, если известно, что $E_{max} = 120$ *в* и частота $= 50$ *гц* (число полных колебаний в 1 сек.)

(*Ответ*. $e = 120 \sin 100\,\pi t$ *в*.)

3. На цилиндре, вращающемся в магнитном поле со скоростью ω рад/сек, находятся два одинаковых проводника a_1 и a_2,

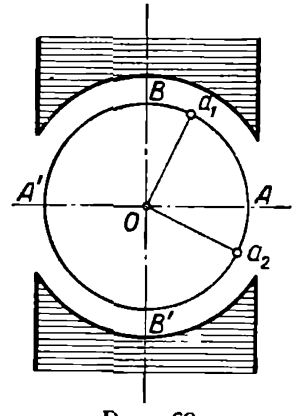


Рис. 69.

расположенные так, что дуга $a_2a_1 = \varphi$ радиан (рис. 69). Выразить закон изменения возникших в них токов, если с помощью амперметра установлено, что максимальная сила тока в каждом из них равна $I a$.

Указание. Проводник a_1 опишет дугу $Aa_1 = \omega t$ рад. за время t, протекшее с того момента, когда он занимал нейтральное положение A (рис. 69), и в нем возникнет ток силой $i_1 = I \sin \omega t$. В этот момент второй проводник a_2 будет занимать положение, определяе-

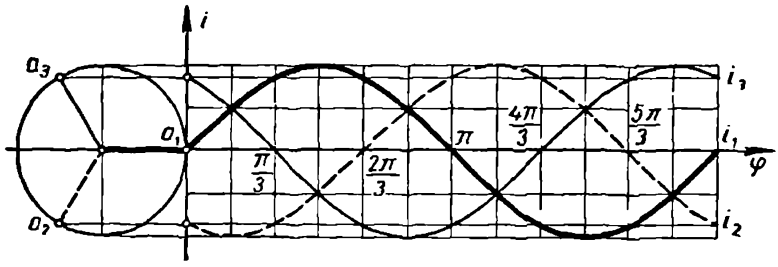


Рис. 70.

мое условием: $\cup Aa_2 = \cup Aa_1 - \varphi = \omega t - \varphi$, следовательно, сила тока, возникшего в нем, будет

$$i_2 = I \sin \cup Aa_2 = I \sin (\omega t - \varphi).$$

Таким образом, ток i_2 отстает от первого тока i_1 по фазе, имея одинаковый с ним период колебания $T = \frac{2\pi}{\omega}$. В электротехнике принято говорить в таких случаях, что генератор дает двухфазный ток.

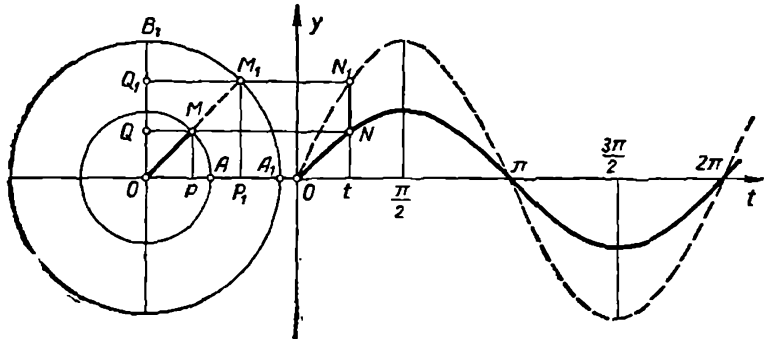


Рис. 71.

Постройте график «двухфазного тока», положив $I = 0{,}1$, $\omega = 10\pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

4. Если на цилиндре, вращающемся в однородном магнитном силовом поле, закрепить определенным образом три одинаковых (не связанных между собой) проводника a_1, a_2, a_3 так, что $\cup a_2a_1 = \varphi_1$ и $\cup a_3a_1 = \varphi_2$, то в них возникнут три переменных тока: $i_1 = I \sin \omega t$, $i_2 = I \sin (\omega t - \varphi_1)$ и $i_3 = I \sin (\omega t - \varphi_2)$, или, как говорят в электро-

технике, трехфазный ток. В генераторах трехфазного тока указанные проводники располагаются на цилиндре так, что $\varphi_1 = 120°$ и $\varphi_2 = 240°$, тогда сила тока выразится формулами: $i_1 = I \sin \omega t$, $i_2 = I \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ и $i_3 = I \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$. Построить графики этих токов на одном чертеже, положив $I = 1a$, $\omega = 2\pi$ рад/сек (рис. 70).

5. Радиус окружности вращается вокруг ее центра с постоянной угловой скоростью ω рад/сек. Отрезок MM_1 этого радиуса проектируется на диаметр данной окружности. Найти закон, по которому изменяется величина указанной проекции.

Указание. Превратим данную окружность в числовую, как это показано на рисунке 71.

$$\text{пр}_y MM_1 = QQ_1 = OQ_1 - OQ = OM_1 \sin \omega t - OM \sin \omega t =$$
$$= (OM_1 - OM) \sin \omega t = MM_1 \sin \omega t.$$

Если построить графики функций $y_1 = OM_1 \sin \omega t$ и $y = OM \sin \omega t$, как это сделано на рисунке, то $\text{пр}_y MM_1 = y_1 - y = NN_1$; характер

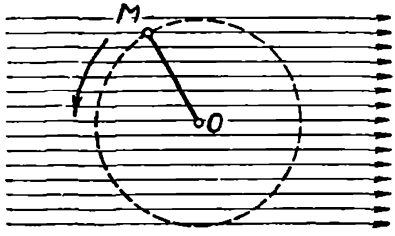


Рис. 72.

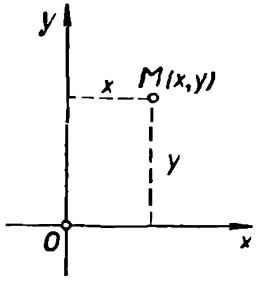


Рис. 73.

изменения отрезка NN_1 здесь выступает с исключительной наглядностью.

6. В однородном магнитном силовом поле вращается квадрат вокруг своей стороны, равной 10 *см* (рис. 72). В положении, когда плоскость квадрата перпендикулярна силовым линиям, на каждый квадратный сантиметр его поверхности приходится 1000 силовых линий. Найти функцию, выражающую число силовых линий, пересекающих квадрат в каждый момент времени его вращения, если скорость вращения равна 5 об/сек. (Ответ. $n_t = 10^5 |\cos 10\pi t|$.)

7. На плоскости движется точка $M(x; y)$ (рис. 73) так, что ее прямоугольные координаты x и y изменяются по закону:

$$x = a \cos^2 t \quad \text{и} \quad y = a \sin^2 t,$$

где t—время движения в секундах.

Определить траекторию и характер движения точки M, а также путь, пройденный точкой за время $t = 2\pi$ секундам.

Указание. Для определения траектории движения точки надо исключить из уравнений параметр t сложением этих уравнений.

ГЛАВА VI

КРУГОВЫЕ ФУНКЦИИ ОТ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ АРГУМЕНТОВ

§ 25. Практическая необходимость знания тождеств, выражающих круговые функции от суммы аргументов через круговые функции от слагаемых

В пяти предшествующих главах изложено много свойств и особенностей круговых функций, и все же этих знаний недостаточно для раскрытия некоторых закономерностей в гармонических колебательных движениях.

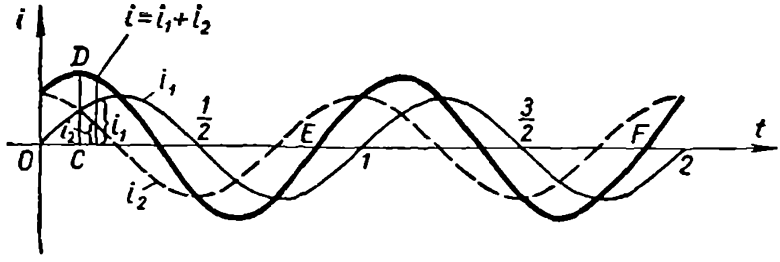


Рис. 74.

В самом деле, рассмотрим несколько примеров.

1. В предшествующей главе мы остановились на рассмотрении двухфазных и трехфазных переменных токов. Известно, что на практике приходится часто двухфазный или трехфазный ток направлять в один проводник, при этом возникает, как показывает опыт, «суммированный» переменный ток, мгновенная сила которого равна сумме мгновенных сил слагаемых токов. На рисунке 74

выполнено геометрическое сложение графиков двухфазного тока

$$i_1 = \sin 2\pi t \text{ и } i_2 = \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

и получен график «результирующего» тока

$$i = i_1 + i_2 = \sin 2\pi t + \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Рассматривая полученную кривую, можно высказать догадку, что она представляет деформированную синусоиду с амплитудой, равной отрезку CD, длиной волны, равной отрезку EF, и фазой смещения ($F2$). Однако строго доказать, что догадка наша верна, и найти точную величину амплитуды «суммарного» тока, его частоту и фазу смещения мы не сможем, не рассмотрев предварительно новых свойств круговых функций, связанных со сложением аргументов.

Еще более сложным явлением будет сложение трехфазных токов. На рисунке 70 выполнено геометрическое сложение графиков, характеризующих трехфазный ток:

$$i_1 = \sin 2\pi t, \quad i_2 = \sin\left(2\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ и } i_3 = \sin\left(2\pi t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Каков же график функции

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \sin 2\pi t + \sin\left(2\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + \\ + \sin\left(2\pi t - \frac{4\pi}{3}\right)?$$

Опытом решение затруднительно.

Необходимо дополнить теорию круговых функций.

2. Из физики известно, что при переходе светового луча из одной среды в другую происходит его «преломление», т. е. отклонение от первоначального направления, причем коэффициент преломления равен отношению $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$, где α_1—угол падения луча на границу сред, а α_2—угол отклонения. При конструировании оптических приборов приходится решать задачи, подобные следующей:

«Как надо направить луч на границу двух сред, чтобы угол падения луча превышал угол преломления на данную величину?»

Если коэффициент преломления равен n, а угол падения больше угла преломления на α°, то отыскание искомого угла падения x сводится к решению уравнения:

$$\frac{\sin x}{\sin (x-\alpha)} = n,$$

которое невозможно разрешить без знания так называемой теоремы сложения, выражающей новые, неизвестные еще нам свойства круговых функций.

3. Если бы удалось найти аналитическое выражение для $\sin(\alpha \pm \beta)$ через круговые функции слагаемых α и β, то стало бы возможно составление таблицы круговых функций. В самом деле, зная что $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, нашли бы $\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 75^\circ$ и также $\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 15^\circ$; также нашли бы $\sin 22^\circ 30'$, выражая $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(22^\circ 30' + 22^\circ 30')$ через $\sin 22^\circ 30'$, а далее $\sin(22^\circ 30' - 15) = \sin 7^\circ 30'$ через $\sin 22^\circ 30'$ и $\sin 15^\circ$.

Частные случаи синуса суммы двух аргументов рассматривались уже в главе о приведении круговых функций к простейшему аргументу; например, положив в функции $\sin(\alpha + \beta)$ число $\beta = \frac{\pi}{2}$, получаем $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$; при $\beta = \frac{3}{2}\pi$ имеем $\sin\left(\alpha + \frac{3}{2}\pi\right) = -\cos\alpha$ и т. д.

Все это приводит к необходимости изучения выражения $\sin(\alpha \pm \beta)$, где α и β любые числа, к чему и перейдем в следующем параграфе.

§ 26. Синус и косинус от алгебраической суммы двух аргументов и соответствующие тригонометрические тождества

Как найти, чему равен $\sin(\alpha + \beta)$ или $\cos(\alpha + \beta)$, если известны, например, $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ или $\cos\alpha$ и $\cos\beta$. Нет ли такой формулы, которая выражает синус или косинус суммы любых двух чисел через круговые функции этих чисел?

Прежде всего убедимся, что $\sin(\alpha + \beta) \not\equiv \sin\alpha + \sin\beta$, для чего достаточно одного примера. Положим, например,

$\alpha = 30°$ и $\beta = 60°$, тогда $\sin(\alpha + \beta) = \sin(30° + 60°) = \sin 90° = 1$, а $\sin\alpha + \sin\beta = \sin 30° + \sin 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 1$, следовательно,

$$\sin(30° + 60°) \neq \sin 30° + \sin 60°.$$

По-видимому, $\sin(\alpha + \beta)$ выражается более сложно через $\sin\alpha$ и $\sin\beta$. Как же выявить эту зависимость?

Используя числовую окружность единичного радиуса (рис. 75 *а*, *б*) и определение круговых функций, найдем

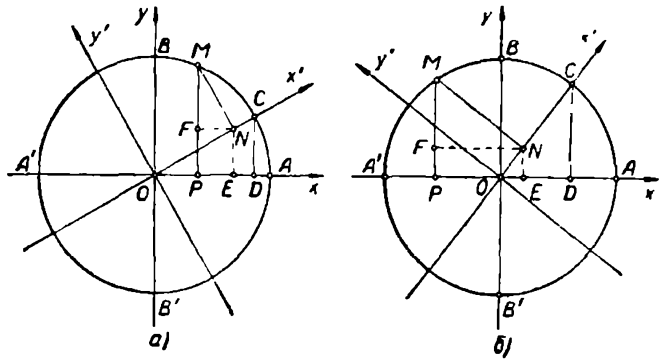


Рис. 75.

эту зависимость сначала для случая, когда α и β—действительные числа промежутка $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Для этого отложим на числовой окружности дугу $AC = \alpha$ радиан и из точки C опустим перпендикуляр CD на ось Ox. По определению синуса и косинуса будем иметь:

$$DC = \sin\alpha \quad \text{и} \quad OD = \cos\alpha.$$

Затем проведем новые оси координат $x'Oy'$ так, чтобы положительный луч оси абсцисс Ox' прошел через точку C. Можно сказать, что новые оси получаются поворотом прежних осей вокруг точки O на угол α.

Отложим на окружности от точки C дугу $CM = \beta$ радиан и проведем из точки M перпендикуляры: MN на Ox' и MP на Ox. Относительно осей координат $x'Oy'$ точка M выделит на числовой окружности число β, так как дуга $CM = \beta$ радиан, поэтому ордината этой точки $NM = \sin\beta$, абсцисса $ON = \cos\beta$.

Относительно прежних осей координат xOy точка M выделит на окружности число $\alpha+\beta$, так как $\cup AM = \cup AC + \cup CM = \alpha+\beta$, поэтому ордината этой точки $PM = \sin(\alpha+\beta)$, абсцисса $OP = \cos(\alpha+\beta)$.

Опустив из точки N перпендикуляры NE на ось Ox и NF на PM, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= PM = PF + FM = EN + FM\\ \cos(\alpha+\beta) &= OP = OE - PE = OE - FN\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Из подобия треугольников ONE и OCD имеем:

$$\frac{FN}{DC} = \frac{OE}{OD} = \frac{ON}{OC} \quad \text{или} \quad \frac{EN}{\sin\alpha} = \frac{OE}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{1},$$

откуда

$$EN = \sin\alpha\cos\beta;$$
$$OE = \cos\alpha\cos\beta.$$

Далее, треугольники FMN и DOC подобны, так как их стороны взаимно перпендикулярны, поэтому:

$$\frac{FM}{OD} = \frac{FN}{DC} = \frac{NM}{OC} \quad \text{или} \quad \frac{FM}{\cos\alpha} = \frac{FN}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{1},$$

откуда

$$FM = \cos\alpha\ \sin\beta;$$
$$FN = \sin\alpha\ \sin\beta.$$

Заменяя в равенствах (*) отрезки их выражениями, получаем искомые формулы:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \qquad (30)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (31)$$

Эти формулы называют в тригонометрии **теоремами сложения** для функций $\sin z$ и $\cos z$. Мы вывели их в предположении, что

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

и, следовательно, $0 < \alpha+\beta < \pi$, причем на рисунке 75,*а* передан случай, когда $0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$, а на рисунке 75,*б*

когда $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \pi$[1]. Справедливость формул (30 и 31) при $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ обнаруживается непосредственно с помощью формул приведения.

Действительно, если $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, то левая часть формулы (30) дает: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; правая часть дает: $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos\beta + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\sin\beta = \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$, следовательно, в данном случае формула (30) справедлива. Аналогично проверяется справедливость формулы (31).

Теперь поставим вопрос, не будут ли верны формулы (30 и 31) для всяких действительных чисел α и β?

Ответ надо искать исследованием, которое мы проведем в несколько шагов:

1. Непосредственной подстановкой убеждаемся в справедливости формул (30 и 31) в тех случаях, когда хотя бы одно из чисел α и β равно 0, $\frac{\pi}{2}$, π или $\frac{3\pi}{2}$.

Так, например, если $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, то левая часть формулы (30) дает:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) = -\cos\beta;$$

правая часть дает: $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin\frac{3\pi}{2}\cos\beta + \cos\frac{3\pi}{2}\sin\beta = -\cos\beta$, следовательно, формула верна.

[1] Читатель, владеющий сложением направленных отрезков на осях координат (и на параллельных им осях), мог бы не делать указанных ограничений на аргументы α и β, так как все проведенные нами рассуждения сохраняют силу при любых действительных α и β, не кратных $\frac{\pi}{2}$ (т. е. при любом расположении на числовой окружности точек $C(\alpha)$ и $M(\alpha+\beta)$, за исключением случая, когда они окажутся на осях координат. Понятно, что в этом случае никаких обобщений формул (30) и (31) не потребуется, кроме проверки их справедливости для чисел α и β, кратных $\frac{\pi}{2}$.

Также левая часть формулы (31) при $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ дает:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) = \sin\beta;$$

правая часть дает: $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\frac{3\pi}{2}\cos\beta - \sin\frac{3\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta$, следовательно, и эта формула верна.

Аналогично проверяются формулы для 0, $\frac{\pi}{2}$ и π.

2. Теперь покажем, что формулы (30 и 31) остаются верными, если в них одно из чисел α и β увеличить на $\frac{\pi}{2}$.

В самом деле, увеличим на $\frac{\pi}{2}$, например, α и внесем обозначение: $\alpha + \frac{\pi}{2} = \alpha_1$ и, следовательно, $\alpha = \alpha_1 - \frac{\pi}{2}$, получим:

$$\sin(\alpha_1 + \beta) = \sin\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \beta\right] = \sin\left[(\alpha + \beta) + \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right)\cos\beta -$$

$$- \sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right)\sin\beta = \sin\alpha_1\cos\beta + \cos\alpha_1\sin\beta;$$

короче: $\sin(\alpha_1 + \beta) = \sin\alpha_1\cos\beta + \cos\alpha_1\sin\beta$,
т. е. формула (30) сохранилась.

Аналогично получаем:

$$\cos(\alpha_1 + \beta) = \cos\left[\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \beta\right] = \cos\left[(\alpha + \beta) + \frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= -\sin(\alpha + \beta) = -[\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta] =$$

$$= -\left[\sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right)\cos\beta + \cos\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right)\sin\beta\right] =$$

$$= \cos\alpha_1\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta;$$

короче: $\cos(\alpha_1 + \beta) = \cos\alpha_1\cos\beta - \sin\alpha_1\sin\beta$,
т. е. формула (31) также сохраняется.

3. Пусть теперь α и β любые числа в промежутке $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$. Разделив каждое из них на $\frac{\pi}{2}$, получим: $\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot n + \alpha_1$, где $0 \leqslant \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ и n одно из чисел:

1, 2, 3; $\beta = \frac{\pi}{2} \cdot m + \beta_1$, где $0 \leqslant \beta_1 < \frac{\pi}{2}$ и m одно из чисел: 1, 2, 3. Видим, что числа α_1 и β_1 принадлежат промежутку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно, для них выполняются формулы (30 и 31):

$$\sin(\alpha_1 + \beta_1) = \sin\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_1 \sin\beta_1;$$
$$\cos(\alpha_1 + \beta_1) = \cos\alpha_1 \cos\beta_1 - \sin\alpha_1 \sin\beta_1.$$

Но в предыдущем шаге было доказано, что эти формулы не нарушаются, если в них прибавлять к одному из аргументов по $\frac{\pi}{2}$. Будем в каждой формуле прибавлять к аргументу α_1 число $\frac{\pi}{2}$ последовательно n раз, получим в результате:

$$\sin\left[\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} n\right) + \beta_1\right] = \sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} n\right)\cos\beta_1 + \cos\left(\alpha_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2} n\right)\sin\beta_1;$$
$$\cos\left[\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} n\right) + \beta_1\right] = \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2} n\right)\cos\beta_1 - \sin\left(\alpha_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi}{2} n\right)\sin\beta_1;$$

т. е.

$$\sin(\alpha + \beta_1) = \sin\alpha \cos\beta_1 + \cos\alpha \sin\beta_1;$$
$$\cos(\alpha + \beta_1) = \cos\alpha \cos\beta_1 - \sin\alpha \sin\beta_1.$$

Прибавим $\frac{\pi}{2}$ последовательно m раз к аргументу β_1, оставляя без изменения α, получим:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Как видим, формулы сохранились.

4. Теперь мы можем убедиться в справедливости формул (30 и 31) для любых действительных чисел α и β.

В самом деле, разделив каждое из этих чисел на 2π, получим:

$$^* \begin{cases} \alpha = 2\pi \cdot k + \alpha_0, \text{ где } 0 \leqslant \alpha_0 < 2\pi \text{ и } k \text{ — целое число;} \\ \beta = 2\pi \cdot k_1 + \beta_0, \text{ где } 0 \leqslant \beta_0 < 2\pi \text{ и } k_1 \text{ — целое число.} \end{cases}$$

Для чисел α_0 и β_0, принадлежащих промежутку $[0, 2\pi]$, формулы (30 и 31) уже доказаны в предыдущих шагах, следовательно,

$$\sin(\alpha_0 + \beta_0) = \sin\alpha_0 \cos\beta_0 + \cos\alpha_0 \sin\beta_0;$$

$$\cos(\alpha_0 + \beta_0) = \cos\alpha_0 \cos\beta_0 - \sin\alpha_0 \sin\beta_0.$$

Поставим в эти формулы значения α_0 и β_0 из равенств (*), т. е. $\alpha_0 = \alpha - 2\pi k$ и $\beta_0 = \beta - 2\pi k_1$,

получим:

$$\sin[(\alpha + \beta) - 2\pi(k + k_1)] = \sin(\alpha - 2\pi k)\cos(\beta - 2\pi k_1) + \cos(\alpha - 2\pi k)\sin(\beta - 2\pi k_1);$$

$$\cos[(\alpha + \beta) - 2\pi(k + k_1)] = \cos(\alpha - 2\pi k)\cos(\beta - 2\pi k_1) - \sin(\alpha - 2\pi k)\sin(\beta - 2\pi k_1).$$

Откуда на основе периодичности круговых функций имеем:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

Итак, теорема сложения для синуса и косинуса доказана нами полностью для любых действительных значений аргументов α и β.

Теорема сложения для синуса была установлена впервые в Греции в форме «Теоремы Птолемея» (II в. н. э., Александрия). В виде, близком к современному, эта теорема появилась в работах французского математика Франсуа Виета (1540—1603), но без необходимых обобщений. Систематизирует теорию сложения круговых функций петербургский академик Фридрих Майер (Петербург, 1697—1729), сделавший по этому поводу специальное сообщение на одном из заседаний Академии наук (1727). Однако и в это время еще отсутствовало необходимое обобщение теоремы сложения. Только в критический XIX век, когда естествознание (физика, астрономия, механика) потребовало большей строгости от математики, был заполнен этот пробел французским математиком Л. Карно (1753—1823), который доказал общность данной теоремы; этому обобщению придавали большое значение французские математики А. Лежандр (1752—1833) и О. Коши (1789—1857).

Покажем применение теоремы сложения на решении задач, поставленных нами в предыдущем параграфе.

1. Задача на сложение двухфазных и трехфазных токов будет рассмотрена далее на основе некоторых следствий из теоремы сложения (см. стр. 258).

2. Задача о нахождении угла падения светового луча на границу двух сред была сведена к уравнению

$$\frac{\sin x}{\sin (x-\alpha)} = n.$$

По теореме сложения (30) имеем:

$$\sin (x-\alpha) = \sin [x+(-\alpha)] = \sin x \cos (-\alpha) +$$
$$+ \cos x \sin (-\alpha) = \cos \alpha \sin x - \sin \alpha \cos x,$$

следовательно, данное уравнение перепишется так:

$$\sin x = n (\cos \alpha \sin x - \sin \alpha \cos x)$$

или

$$\sin x (1 - n \cos \alpha) = -n \sin \alpha \cos x,$$

$$\text{откуда } \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-n \sin \alpha}{1 - n \cos \alpha}$$

$$\text{или } \operatorname{tg} x = \frac{n \sin \alpha}{n \cos \alpha - 1}.$$

Если, например, положить $\alpha = 10°$ и взять коэффициент преломления воды $n = 1{,}33$, то будем иметь;

$$\operatorname{tg} x = \frac{1{,}33 \cdot \sin 10°}{1{,}33 \cdot \cos 10° - 1} \approx \frac{1{,}33 \cdot 0{,}1736}{1{,}33 \cdot 0{,}9848 - 1} \approx 0{,}745.$$

$$x \approx 36°40'$$

3. Последняя из задач, поставленных в предыдущем параграфе, решается непосредственно по формулам (30) и (31).

$$\sin 75° = \sin (45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 0{,}9659;$$

$$\sin 15° = \sin [45° + (-30°)] = \sin 45° \cos (-30°) +$$

$$+ \cos 45° \sin (-30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx 0{,}2588.$$

4. Приведем еще один пример на применение формул 30 и 31. Пусть даны $\sin \alpha = 0{,}6$ и $\sin \beta = 0{,}8$, причем известно, что α и β числа промежутка $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; найти $\sin (\alpha + \beta)$ и $\cos (\alpha + \beta)$.

Решение.

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8;$$

$$\cos\beta = -\sqrt{1-0{,}64} = -0{,}6;$$

$\sin(\alpha+\beta) = 0{,}6\cdot(-0{,}6)+(-0{,}8)\cdot 0{,}8 = -0{,}36-0{,}64 = -1$;

$\cos(\alpha+\beta) = (-0{,}8)\cdot(-0{,}6)-0{,}6\cdot 0{,}8 = 0$. Такой случай возможен при $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{2}$.

§ 27. Синус и косинус суммы двух аргументов в новом изложении

Существуют способы доказательства теоремы сложения, отличные от приведенного нами. Для изложения некоторых из этих способов необходимо рассмотреть ряд вспомогательных понятий и теорем.

а) Направленные отрезки или векторы и ось

1. У всякого отрезка AB имеется два конца: A и B. Если почему-либо один из концов, например B, считается началом отрезка AB, а другой—его концом, то говорят, что этот отрезок направленный, и называют его вектором. Обозначают вектор теми же буквами A и B, но букву B, соответствующую началу отрезка, пишут впереди и над буквами ставят черту $\overline{BA}$. В соответствии с таким соглашением $\overline{BA}$ и $\overline{AB}$ — два различных вектора: у первого началом служит точка B, а у второго — точка A.

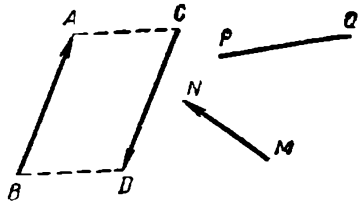


Рис. 76.

На рисунке вектор иногда обозначают стрелочкой, чтобы видно было, где начало вектора и где его конец. Так изображены на рисунке 76 векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MN}$, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{PQ}$ изображены без стрелок.

Термин вектор происходит от латинского слова vehere—тащить, тянуть груз отрезком бичевы.

Отметим, что запись $|\overrightarrow{AB}|$ читается «модуль вектора AB» и означает длину этого вектора. Понятно, что векторы AB и BA имеют одну и ту же длину: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

На рисунке 76 векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ также имеют одинаковую длину, так как фигура $ABDC$ является параллелограммом.

2. В дальнейшем особый интерес для нас будет представлять случай, когда векторы расположены на оси.

Осью, как известно, называют прямую, на которой установлено положительное направление и указана единица длины.

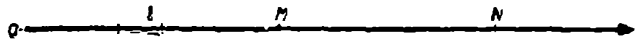


Рис. 77.

На рисунке 77 изображена ось a с единичным отрезком l и произвольным отрезком MN. Можно сказать, что на оси даны два вектора $\overline{MN}$ и $\overline{NM}$, имеющие одну и ту же длину, например d единиц (на рис. $d = 5l$), но противоположное направление; у вектора $\overline{MN}$ направление совпадает с направлением оси a, а у вектора $\overline{NM}$ оно противоположно направлению оси a.

Чтобы характеризовать числом d не только длину вектора, расположенного на оси, но и его направление, условились приписывать этому числу знак $+$ или $-$ в зависимости от того, совпадает или не совпадает направление вектора с направлением оси. Полученное таким образом действительное число называют величиной вектора. Так, на рисунке 77 имеем: длина $\overline{MN} = d$ и длина $\overline{NM} = d$, но величина $\overline{MN} = +d$, а величина $\overline{NM} = -d$.

Ради краткости в дальнейшем величину вектора $\overline{AB}$ будем обозначать через AB (опускается черточка сверху). Таким образом, $MN = +d$, а $NM = -d$ и, следовательно,

$$MN + NM = 0,$$

т. е. сумма величин двух векторов $\overline{MN}$ и $\overline{NM}$ равна нулю.

Отметим, что о величине вектора $\overline{AB}$ можно говорить только в том случае, когда он принадлежит некоторой оси, так как в противном случае принятое нами определение величины вектора к нему не подойдет.

3. Если на оси расположены векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ так что конец каждого из них совпа-

дает с началом следующего, то суммой этих векторов называют вектор $\overline{A_1A_n}$, началом которого является начало первого вектора, а концом—конец последнего.

Данное определение, очевидно, теряет смысл, если точка A_n совпадает с A_1, так как в этом случае вектор $\overline{A_1A_n}$ не существует. Чтобы избежать такое исключение, условимся говорить о существовании и такого «вектора», у которого начало и конец совпадают. Естественно называть такой «вектор» нулевым, а его величину считать равной нулю.

Из принятого нами определения вытекает следующее важное следствие; величина вектора $\overline{A_1A_n}$ равна сумме величин векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, т. е.

$$A_1A_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \\ + A_3A_4 + \ldots + A_{n-1}A_n.$$

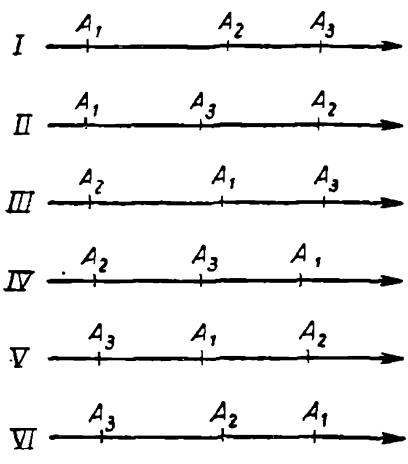


Рис. 78.

Доказательство проведем методом математической индукции.

1. Сначала убедимся в справедливости теоремы при $n = 3$. Число перестановок из трех элеменов равно шести, поэтому надо рассмотреть шесть возможных расположений точек A_1, A_2 и A_3 на оси (рис. 78).

Обозначим длины векторов так:

$$|\overline{A_1A_2}| = \alpha, \quad |\overline{A_2A_3}| = \beta, \quad |\overline{A_1A_3}| = \gamma^1.$$

Рассмотрим, например, II и V расположения точек. Во II имеем:

$$\alpha = \gamma + \beta, \quad \text{откуда} \quad \alpha + (-\beta) = \gamma,$$

т. е.

$$A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3.$$

---

[1] Понятно, что числовые значения α, β и γ в различных расположениях точек A_1, A_2, A_3 будут различными.

В V имеем: $\gamma + \alpha = \beta$, откуда $\alpha + (-\beta) = -\gamma$, т. е. $A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3$.

Аналогично проверяются остальные случаи.

2. Допустим теперь, что теорема верна для n, т. е. $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n = A_1A_n$ при любом расположении n точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ на оси.

3. Используя это допущение и результат 1-го шага, доказываем справедливость теоремы для $n+1$:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_{n+1} =$$

$$= \underbrace{(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n)} + A_nA_{n+1} = \quad \text{(сочетательное свойство суммы)}$$

$$= A_1A_n + A_nA_{n+1} = \quad \text{(допущение 2)}$$

$$= A_1A_{n+1}, \quad \text{(по доказанному в 1-м шаге)}$$

откуда по транзитивности

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_{n+1} = A_1A_{n+1}.$$

Итак, теорема верна.

б) Проекция точки и вектора на ось[1]

4. Пусть на плоскости даны: точка M, вектор $\overline{AB}$ и ось a (рис. 79).

Проекцией точки M на ось a называют основание перпендикуляра MM_1, опущенного из точки M на ось a.

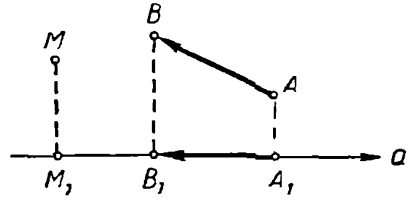


Рис. 79.

Слово проекция пришло из латинского языка: projector в переводе выбрасывающий (подразумевается выбрасывание M_1 из M).

Проекцией вектора AB на ось a (рис. 79) будем называть величину вектора $\overline{A_1B_1}$, лежащего на оси a и соединяющего проекции начала и конца вектора $\overline{AB}$ на эту ось.

Записывают это так: $\text{пр}_a\,\overline{AB} = A_1B_1$.

---

[1] Ради краткости здесь и далее словом проекция означается ортогональная проекция.

Из данных определений следует, что каждый вектор имеет единственную проекцию на данную ось. В частности, если вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен оси a, то его проекция на эту ось равна нулю, так как в этом случае начало вектора A и конец B проектируются в одну точку: A_1 совпадает с B_1.

5. ***Теорема.*** *При параллельном переносе вектора его проекция на данную ось не изменяется.*

Доказательство. Пусть при некотором параллельном переносе вектора $\overline{AB}$ получился вектор $\overline{A'B'}$ (рис. 80). Теорема утверждает, что $\text{пр}_a \overline{AB} = \text{пр}_a \overline{A'B'}$, т. е. $A_1B_1 = A'_1B'_1$.

Для доказательства этого проведем AC и $A'C'$ параллельно оси a, получим прямоугольные треугольники ABC и $A'B'C'$, у которых равны гипотенузы AB и $A'B'$ и острые углы между соответственно параллельными сторонами. Из равенства этих треугольников имеем: $AC = A'C'$ и, следовательно, $|\overline{A_1B_1}| = |\overline{A'_1B'_1}|$. А так как векторы $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A'_1B'_1}$ имеют также и одинаковое направление на оси a, то их величины равны, т. е. $A_1B_1 = A'_1B'_1$.

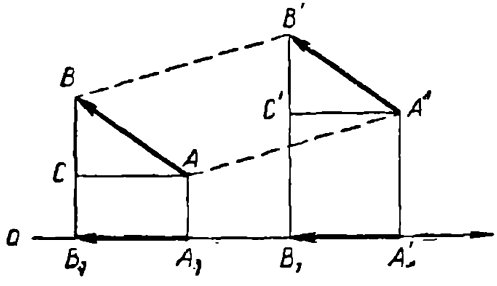


Рис. 80.

Справедливость теоремы очевидна и в тех случаях, когда вектор $\overline{AB}$ параллелен либо перпендикулярен оси проекций.

6. ***Теорема.*** *Проекция вектора на ось равна его длине, умноженной на косинус угла, образованного им с осью проекций;*
короче:

$$\text{пр}_a \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \cos(\widehat{a, \overline{AB}}) \ldots . \qquad (*)$$

Доказательство. Возьмем на оси a произвольную точку O и построим вектор $\overline{OM}$, параллельный дан-

ному вектору $\overline{AB}$ и имеющий с ним одинаковую длину (рис. 81). Затем опишем окружность с радиусом OM и примем ее центр O за начало прямоугольной системы координат с осью абсцисс Oa.

По предыдущей теореме имеем:

$$\text{пр}_a \overline{AB} = \text{пр}_a \overline{OM} = OM_1.$$

По определению косинуса можем записать:

$$\frac{OM_1}{|\overline{OM}|} = \cos A_0\widehat{OM},$$

откуда

$$OM_1 = |\overline{OM}| \cdot \cos A_0\widehat{OM}.$$

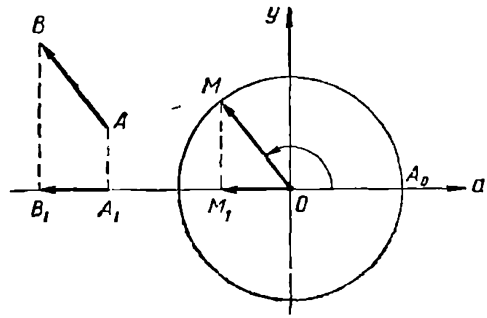


Рис. 81.

Но из построения следует, что $|\overline{OM}| = |\overline{AB}|$ и $\measuredangle A_0OM = \measuredangle (a, OM)$, поэтому из предыдущих равенств получаем: $OM_1 = |\overline{AB}| \cdot \cos \widehat{(a, OM)}$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если проектируемый вектор $\overline{AB}$ лежит на некоторой оси b, то проекция вектора $\overline{AB}$ на ось a равна его величине AB, умноженной на косинус угла, образуемого осью b с осью проекций; короче:

$$\text{пр}_a \overline{AB} = AB \cdot \cos \widehat{(a, b)} \ldots (**)$$

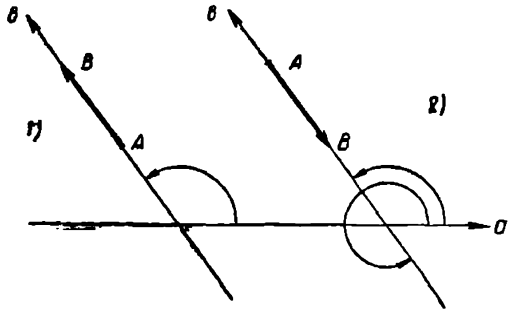


Рис. 82.

В самом деле, рассмотрим два возможных направления вектора $\overline{AB}$, расположенного на оси b (рис. 82):

1) когда направление вектора $\overline{AB}$ совпадает с направлением оси b, тогда его величина $AB = +|\overline{AB}|$ и

$\measuredangle(a, \overline{AB}) = \overset{\wedge}{(a, b)}$, поэтому равенство (*) дает:

$$\text{пр}_a \overline{AB} = AB \cdot \cos \overset{\wedge}{(a, b)};$$

2) когда направление вектора $\overline{AB}$ противоположно направлению оси b, тогда его величина $AB = -|\overline{AB}|$, а $\measuredangle(a, \overline{AB}) = \measuredangle(a, b) + \pi$; в этом случае $|\overline{AB}| = -AB$,

$$\cos \overset{\wedge}{(a, \overline{AB})} = \cos [\overset{\wedge}{(a, b)} + \pi] = -\cos \overset{\wedge}{(a, b)}$$

и равенство (*) опять дает:

$$\text{пр}_a \overline{AB} = (-AB)[-\cos \overset{\wedge}{(a, b)}] = AB \cdot \cos \overset{\wedge}{(a, b)}.$$

в) Ломаная линия и ее проекция на ось

7. Пусть на плоскости дана ось a и произвольная ломаная линия $C_1 C_2 C_3 \ldots C_{n-1} C_n$, у которой C_1 — начальная точка и C_n — конечная (рис. 83). Векторы $\overline{C_1C_2}$,

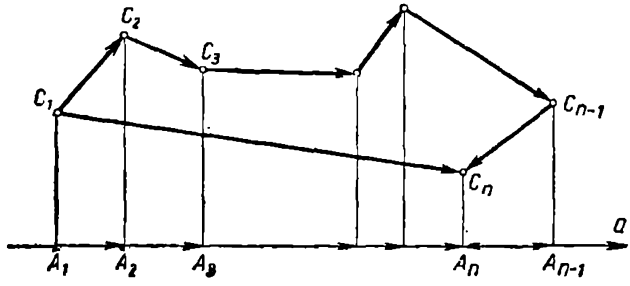


Рис. 83.

$\overline{C_2C_3}$, ..., $\overline{C_{n-1}C_n}$ называют составляющими эту ломаную, а вектор $\overline{C_1C_n}$ — замыкающим ее. Справедлива следующая теорема: *проекция вектора, замыкающего ломаную, равна сумме проекций векторов, составляющих ломаную* (при условии, что все векторы проектируются на одну и ту же ось).

Действительно, спроектируем на ось a составляющие векторы $\overline{C_1C_2}$, $\overline{C_2C_3}$, ..., $\overline{C_{n-1}C_n}$, получим на оси векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, расположенные так, что ко-

нец первого служит началом второго, конец второго — началом третьего и т. д. Но по доказанной выше теореме п.3, сумма величин таких векторов равна величине вектора $\overline{A_1A_n}$, соединяющего начало первого вектора с концом последнего, т. е.

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n = A_1A_n.$$

А так как по определению п.4 A_1A_n — проекция вектора $\overline{C_1C_n}$ (замыкающего ломаную), а A_1A_2, A_2A_3, ..., ..., $A_{n-1}A_n$ — проекции векторов $\overline{C_1C_2}$, $\overline{C_2C_3}$, ..., $\overline{C_{n-1}C_n}$, составляющих ломаную, то теорема доказана.

В дальнейшем мы будем чаще пользоваться частным случаем этой теоремы, когда ломаная состоит из двух звеньев.

Следствие. Если ломаная $C_1C_2C_3 \ldots C_{n-1}C_n$ замкнутая, то сумма проекций векторов, составляющих эту ломаную, равна нулю.

Действительно, в этом случае начало ломаной C_1 и конец C_n совпадают и замыкающий вектор $\overline{C_1C_n}$ обращается в точку (нулевой вектор!), поэтому его проекция на ось равна нулю.

Перейдем теперь к доказательству теорем сложения для круговых функций.

г) Выражение $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$ через синус и косинус от α и β

Пусть α и β — произвольные действительные числа. Возьмем числовую окружность с системой прямоугольных координат xOy (рис. 84) и отложим на ней $\smile AB = \alpha$ радиан. Затем повернем оси координат xOy вокруг точки O на угол α радиан, получим новую систему осей XOY, в которой ось абсцисс OX пройдет через точку B. От этой точки отложим на окружности $\smile BM = \beta$ радиан, из точки M опустим на оси OX и OY перпендикуляры MM_1 и MM_2 и проведем радиус OM. Катеты прямоугольного треугольника OM_1M образуют ломаную OM_1M,

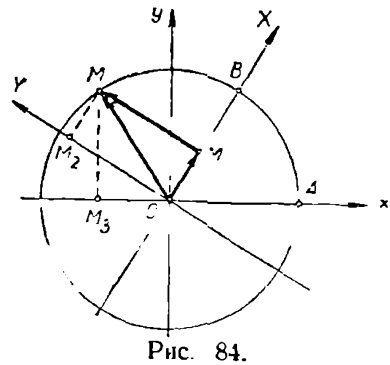


Рис. 84.

составленную из двух векторов $\overline{OM_1}$ и $\overline{M_1M}$, а гипотенуза будет вектором $\overline{OM}$, замыкающим эту ломаную. Если спроектировать составляющие векторы этой ломаной и замыкающий вектор на ось Ox, то по теореме 7 получим:

$$\text{пр}_x \overline{OM} = \text{пр}_x \overline{OM_1} + \text{пр}_x \overline{M_1M}. \qquad (*)$$

Заметив, что $\cup AM = \cup AB + \cup BM = \alpha + \beta$ и используя определение круговых функций и теоремы о проекции вектора, находим:

1) $\text{пр}_x \overline{OM} = OM_3 = \cos(\alpha + \beta)$,

2) $\text{пр}_x \overline{OM_1} = OM_1 \cos(\overset{\wedge}{Ox, OX}) =$
$= OM_1 \cos\alpha,$ [след. из теор. 6]

3) $\text{пр}_x \overline{M_1M} = \text{пр}_x \overline{OM_2} =$ [теор. 5]
$= OM_2 \cdot \cos(\overset{\wedge}{Ox. OY}) =$ [теор. 6]
$= OM_2 \cos(\alpha + 90°) = -OM_2 \sin\alpha$ [так как
$\measuredangle xOY = \measuredangle xOX + \measuredangle XOY = \alpha + 90°$].

Таким образом, равенство (*) дает:

$$\cos(\alpha + \beta) = OM_1 \cdot \cos\alpha - OM_2 \cdot \sin\alpha.$$

Используя определение синуса и косинуса на числовой окружности с осями XOY, получаем:

$$OM_1 = \cos\beta, \quad OM_2 = \sin\beta,$$

следовательно,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha.$$

Так как это тождество справедливо для любых значений α и β, то можем заменить в нем β на $\beta + \frac{\pi}{2}$, получим:

$$\cos\left[\alpha + \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha -$$

$$-\sin + \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\sin\alpha,$$

откуда по формулам сведéния следует:

$$-\sin(\alpha + \beta) = -\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha,$$

т. е.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

д) Приведем еще один вывод формул для $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$, основанный на следующей теореме:

Если имеется система прямоугольных координат xOy и точка $M(x, y)$ и если оси этой системы повернуть вокруг их начала O на угол α, то получится новая система прямоугольных координат XOY, в которой точка M будет иметь новые координаты (X, Y), связанные с прежними ее координатами (x, y) соотношениями:

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$

$$y = Y\cos\alpha + X\sin\alpha.$$

В самом деле:

1) Дадим геометрическое построение данных (рис. 85):

$OM_1 = x$, $OM_3 = y$,

$OM_2 = X$, $OM_4 = Y$.

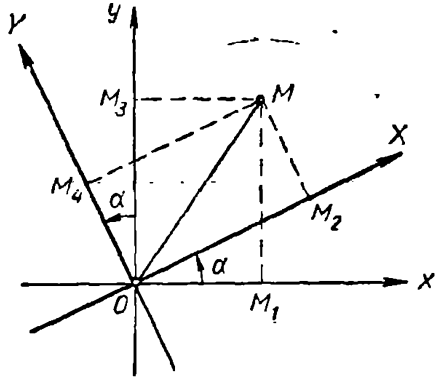


Рис. 85.

2) Рассмотрим ломаную OM_2M, у которой составляющие векторы $\overline{OM_2}$ и $\overline{M_2M}$, замыкающий вектор $\overline{OM}$. По теореме (7) проекции этих векторов на ось Ox связаны соотношением:

$$\text{пр}_x\overline{OM} = \text{пр}_x\overline{OM_2} + \text{пр}_x\overline{M_2M}.$$

Но $\text{пр}_x\overline{OM} = OM_1 = x$,

$$\text{пр}_x\overline{OM_2} = OM_2\cdot\cos(\widehat{Ox, OX}) = X\cdot\cos\alpha, \quad \text{[след. теор. 6]}$$

$$\text{пр}_x\overline{M_2M} = \text{пр}_x\overline{OM_1} = \quad \text{[теор. 5]}$$

$$= OM_1\cdot\cos(\widehat{Ox, OY}) = \quad \text{[след. теор. 6]}$$

$$= Y\cdot\cos(\alpha+90°) = -Y\cdot\sin\alpha$$

[так как $\sphericalangle(Ox, OY) = \sphericalangle(Ox, OX) + \sphericalangle(OX, OY) = \alpha + 90°$],

следовательно,

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha.$$

3) Если спроектировать векторы той же ломаной OM_2M на ось Oy, то получим:

$$\text{пр}_y \overline{OM} = \text{пр}_y \overline{OM_2} + \text{пр}_y \overline{M_2M}.$$

Теперь $\text{пр}_y \overline{OM} = OM_3 = y$,

$$\text{пр}_y \overline{OM_2} = OM_2 \cdot \cos(\widehat{Oy, OX}) = \quad \text{[след теор. 6]}$$
$$= X \cos(\alpha - 90°) = X \sin\alpha$$
[так как $\measuredangle (Oy, OX) = \alpha - 90°$],
$$\text{пр}_y \overline{M_2M} = \text{пр}_y \overline{OM_1} = \quad \text{[теор. 5]}$$
$$= OM_1 \cdot \cos(\widehat{Oy, OY}) = \quad \text{[след. теор. 6]}$$
$$= Y \cos\alpha,$$

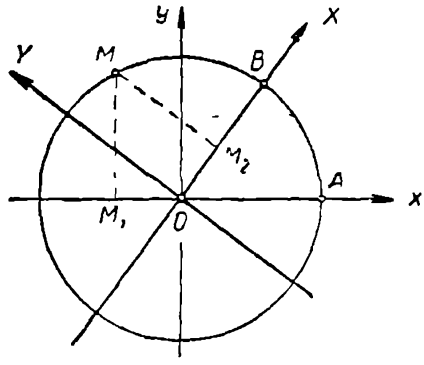


Рис 86.

следовательно,

$$y = X \sin\alpha + Y \cos\alpha.$$

Теорема доказана.

Используя эту теорему, легко выразить $\sin(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha + \beta)$ через синус и косинус от α и β.

Для этого на числовой окружности с системой координат xOy отложим $\cup AB = \alpha$ радиан (рис. 86). Затем повернем оси координат вокруг их начала O на угол α и отложим $\cup BM = \beta$ радиан. Обозначив координаты точки M в системе xOy через x и y, а в системе XOY через X и Y и используя определение круговых функций, будем иметь (см. рис. 86):

$$x = OM_1 = \cos(\alpha + \beta), \quad | \quad X = OM_2 = \cos\beta,$$
$$y = M_1M = \sin(\alpha + \beta), \quad | \quad Y = M_2M = \sin\beta$$

Но по предыдущей теореме

$$y = Y \cos\alpha + X \sin\alpha, \qquad x = X \cos\alpha - Y \sin\alpha;$$

подставив в эти соотношения значения x, y, X и Y, получаем:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha.$$

Упражнения.

1. Пользуясь понятием вектора и его проекции на ось, дать новое определение круговых функций $\sin z$ и $\cos z$, эквивалентное данному нами ранее (см. стр. 124) определению.

Указание. Каждому действительному числу z соответствует на числовой окружности (рис. 87) точка $M(z)$, определяющая единственный вектор $\overrightarrow{OM}$ с началом в центре окружности;

$$\cos z = OM_1 = \text{пр}_x \overrightarrow{OM},$$

$$\sin z = OM_2 = \text{пр}_y \overrightarrow{OM}.$$

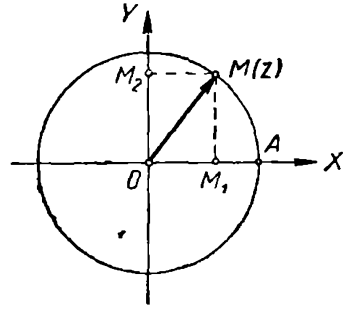


Рис. 87.

2. На рисунке 88 изображена ось l и последовательность векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ..., $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$, образующих правильный n-угольник. Найти сумму проекций этих векторов на ось l, если вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ наклонен к оси l под углом α.

Указание. Все векторы имеют одинаковую длину (обозначим ее через a), и каждый вектор образует угол $\frac{2\pi}{n}$ со следующим вектором, поэтому искомая сумма

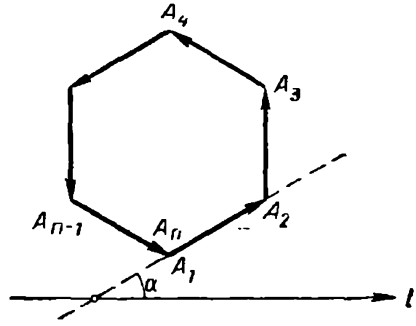


Рис. 88.

$$s = a\cos\alpha + a\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + a\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\cdot 2\right) + \ldots + a\cos\left[\alpha + \frac{2\pi}{n}(n-1)\right].$$

По следствию из теоремы 7 эта сумма равна нулю, так как ломаная $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ замкнутая.

3. Доказать, что во всяком треугольнике ABC выполняется соотношение:

$$a = b\cos C + c\cos B.$$

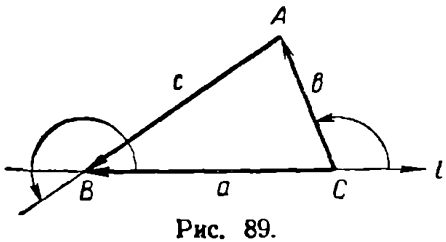


Рис. 89.

Указание. Стороны данного треугольника (рис. 89) можно считать направленными отрезками, расположенными так, что векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$ составляют ломаную CAB, а вектор $\overrightarrow{CB}$ замыкает эту ломаную. По теореме (7) $\text{пр}_e \overrightarrow{CB} =$

$= \text{пр}_e \overline{CA} + \text{пр}_e \overline{AB}$, т. е. $-a = b\cos(180° - C) + c\cos(B + 180°)$, откуда $a = b\cos C + c\cos B$.

4. Разложить силу $\overline{P}$, приложенную к некоторой материальной точке O, на две составляющие силы так, чтобы они образовали с данной силой углы α и β.

Указание. Дадим геометрическое изображение данной силы $\overline{P}$, искомых сил $\overline{P_1}$ и $\overline{P_2}$ и осей координат xOy, как это сделано на рисунке 90.

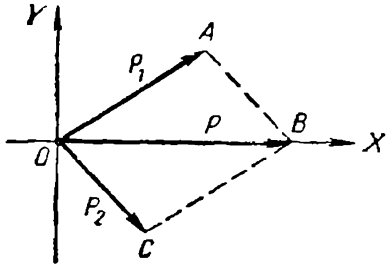


Рис. 90.

Вектор $\overline{OB}$ замыкает ломаную OAB, составленную из векторов $\overline{OA}$ и $\overline{AB}$, поэтому по теореме 7:

$$\text{пр}\,\overline{OB} = \text{пр}\,\overline{OA} + \text{пр}\,\overline{AB}.$$

Принимая за ось проекций ось OX, а затем ось OY, получим соответственно:

1. $P = P_1\cos\alpha + P_2\cos(-\beta)$,
2. $0 = P_1\cos[-(90° - \alpha)] + P_2\cos[-(90° + \beta)]$, т. е. $0 = P_1\sin\alpha - P_2\sin\beta$.

Решив систему этих уравнений относительно P_1 и P_2, найдем:

$$P_1 = \frac{P\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \frac{P\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$P_2 = \frac{P\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta} = \frac{P\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

5. На материальную точку действуют три силы $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$ и $\overline{P_3}$, образующие между собой попарно углы в 120°. Найти равнодействующие этих сил. Рассмотреть случай, когда $P_1 = P_2 = P_3$.

§ 28. Формулы для нахождения синуса и косинуса разности аргумента

В предыдущих задачах нам пришлось уже использовать теорему сложения для отыскания синуса разности двух аргументов. В дальнейшем нам придется весьма часто находить синус и косинус разности двух аргументов, поэтому выведем здесь соответствующие формулы и постараемся их запомнить:

$$\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin[\alpha + (-\beta)] \equiv \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \equiv \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos[\alpha + (-\beta)] \equiv \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Итак, $\sin(\alpha - \beta) \equiv \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$; (30, а)

$\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. (31, а)

Пример. Представив 15° как разность 45° и 30°, легко найти с помощью формулы (31, а) косинус угла в 15°, а именно:

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 0{,}9659.$$

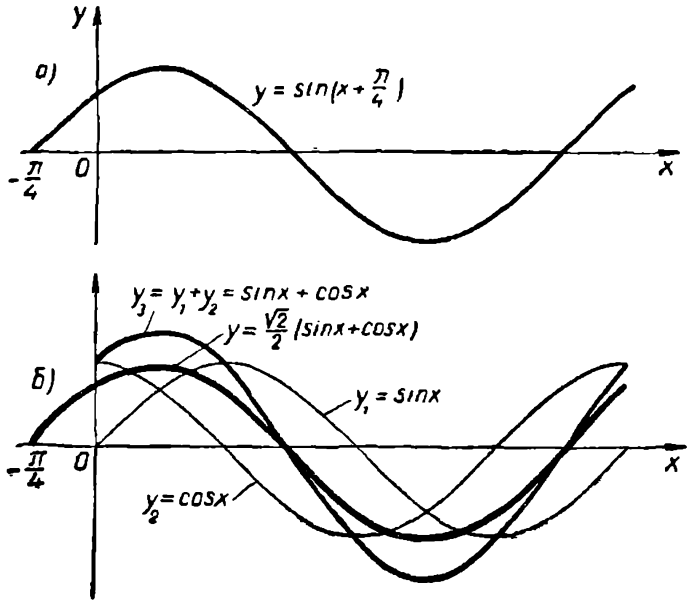


Рис. 91.

В заключение остановимся на построении графика функции:

$$y = \sin(x + c) \equiv \sin x\cos c + \cos x\sin c.$$

Положим, например, $c = \frac{\pi}{4}$, будем иметь:

$$y = \sin(x + \tfrac{\pi}{4}) \equiv \sin x\cos\tfrac{\pi}{4} + \cos x\sin\tfrac{\pi}{4} \equiv \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x).$$

График этой функции можно построить по левой части, т. е. $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$: это будет смещенная синусоида (рис. 91, *а*). Сложнее построение этого графика

по правой части, т. е. $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$ (рис. 91,*б*), оно осуществляется так:

1) проводится графическое сложение графиков $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$;

2) затем «умножение графика» $y_3 = \sin x + \cos x$ на $\frac{\sqrt{2}}{2}$. В результате получаются тождественные графики, только к ним пришли различными приемами построения.

А как же построить график функции $z = \sin(x + y)$, где второе слагаемое также переменное?

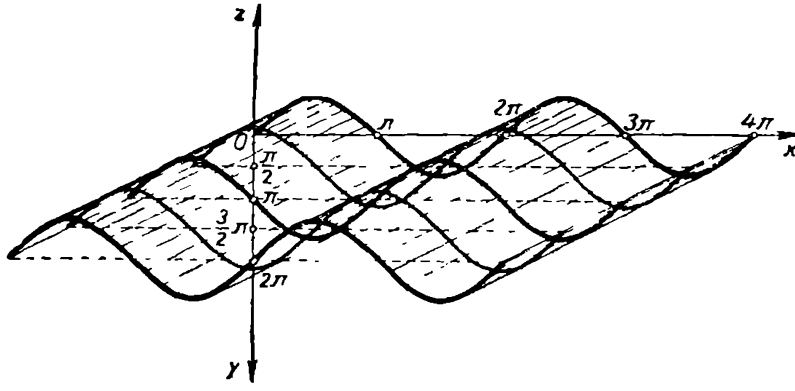


Рис. 92.

Это более сложное построение выполняется в пространственной системе координат через сведéние к графику функции $z = \sin(x + c)$, где c изменяется в интервале $(-\infty, +\infty)$. Таким путем получится бесконечное множество кривых (смещенных синусоид), которые образуют поверхность, изображенную на рисунке 92.

Упражнения.

1. Найти косинус угла в 75°.

2. Показать, что $a + b = 90°$, если $\sin a = \frac{3}{5}$ и $\sin b = \frac{4}{5}$, причем a и b — острые углы.

3. Доказать тождество:

$$\sin(a - b)\sin c + \sin(b - c)\sin a + \sin(c - a)\sin b \equiv 0$$

4. Показать, что $\sin(\alpha+\beta) < \sin\alpha + \sin\beta$, если α и β — числа интервала $(0; \frac{\pi}{2})$.

5. При каком условии выполняется неравенство:

$$\cos\alpha\cos\beta > \sin\alpha\sin\beta?$$

6. Доказать справедливость неравенства:

$$|\sin 3x\cos 5x + \cos 3x\sin 5x| \leqslant 1.$$

§ 29. Тангенс и котангенс от алгебраической суммы двух аргументов и соответствующие тригонометрические тождества

Используя тождества (9) и теорему сложения аргументов для синуса и косинуса, получаем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) \equiv \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \equiv \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) \equiv \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} \equiv \frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}.$$

Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $\beta \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, то делим числитель и знаменатель правых частей этих равенств на $\cos\alpha\cos\beta$, находим

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) \equiv \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \qquad (32)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) \equiv \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (32, а)$$

Эти формулы встречаются впервые в работах петербургского академика Якова Германа (1678—1733).

Для котангенса суммы и разности аргументов получаем следующие формулы:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) \equiv \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} \equiv \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) \equiv \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)} \equiv \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}.$$

Примечание. Котангенс суммы и разности аргументов можно выразить и непосредственно через котангенсы этих аргументов, но такие выражения употребляются редко.

Упражнения.

1. Показать, что $a+b=45°+180°\cdot n$, где n — число целое, если $\operatorname{tg} a=\frac{1}{2}$ и $\operatorname{tg} b=\frac{1}{3}$.

2. Показать, что $a+b+c=45°+180°\cdot n$, где n — число целое, если $\operatorname{tg} a=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} b=\frac{1}{5}$ и $\operatorname{tg} c=\frac{1}{8}$.

3. Доказать тождества:

$$\operatorname{tg}(x+y)-\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y\equiv\operatorname{tg}(x+y)\cdot\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y.$$

4. Тангенсы трех острых углов соответственно равны: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{8}$. Доказать, что первый угол равен сумме двух других

5. Угол в 45° разделить на две части так, чтобы тангенс одной из них был вдвое больше тангенса другой.

§ 30. Следствия из теорем о круговых функциях от алгебраической суммы двух аргументов

1. Круговые функции суммы нескольких аргументов

Используя теоремы сложения для двух аргументов, легко получить синус, косинус и тангенс суммы нескольких аргументов. Пусть, например, α, β и γ — три действительных числа, тогда

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\equiv\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]\equiv\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma;$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)\equiv\cos[(\alpha+\beta)+\gamma]\equiv\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)\equiv\operatorname{tg}[(\alpha+\beta)+\gamma]\equiv\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma}.$$

Заменив $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ полученными выше выражениями, находим:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\equiv\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)\equiv\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\sin\alpha\sin\gamma-\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)\equiv\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$$

Эти формулы впервые дает в 1722 году швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667—1748), являвшийся почетным членом Петербургской Академии наук.

Аналогичным путем можно перейти от синуса, косинуса и тангенса суммы трех аргументов к круговым функциям четырех и более аргументов.

2. Круговые функции кратного аргумента

Положив $\beta = \alpha$ в формулах (30), (31), (32), получаем синус, косинус и тангенс удвоенного аргумента:

$$\sin 2\alpha \equiv 2 \sin \alpha \cos \alpha; \tag{33}$$

$$\cos 2\alpha \equiv \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \tag{34}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha \equiv \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \tag{35}$$

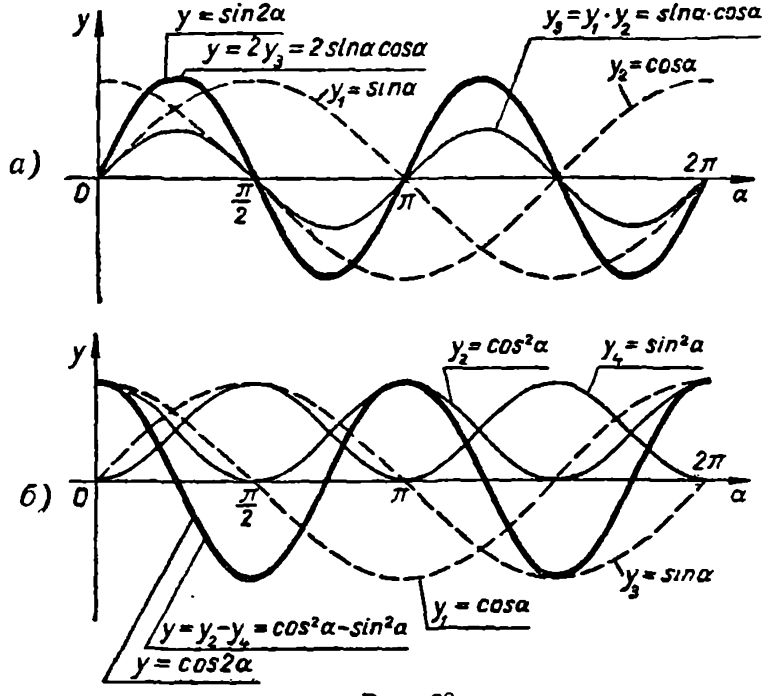


Рис. 93.

На рисунках 93, *а* и *б* дано графическое истолкование тождеств (33) и (34).

Используя эти тождества и теоремы сложения, легко получить круговые функции утроенного аргумента, учетверенного аргумента и т. д.

Например: $\sin 3\alpha \equiv \sin(2\alpha + \alpha) \equiv \sin 2\alpha \cos\alpha +$

$+ \cos 2\alpha \sin\alpha \equiv 2\sin\alpha \cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha \equiv$

$\equiv 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha \equiv 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, т. е.

$$\sin 3\alpha \equiv 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$\cos 4\alpha \equiv \cos 2(2\alpha) \equiv \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha \equiv (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)^2 -$

$- 4\sin^2\alpha \cos^2\alpha \equiv \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha \sin^2\alpha + \sin^4\alpha.$

Круговые функции от кратного аргумента были выведены у Франсуа Виета, начало же положено еще Птолемеем.

3. Круговые функции от «половинного» аргумента

При решении различных задач, а также при составлении таблиц круговых функций применяются формулы, выражающие круговые функции «половинного» аргумента $\frac{\alpha}{2}$ через круговые функции аргумента α. Чтобы найти такие формулы, заменим в тождествах (33) и (34) аргумент α на $\frac{\alpha}{2}$ и переставим правые и левые части этих тождеств, получим:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \equiv \sin\alpha; \qquad (*)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \equiv \cos\alpha. \qquad (**)$$

Кроме того, возьмем еще тождество

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \equiv 1. \qquad (***)$$

Складывая почленно тождества (**) и (***), получаем:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} \equiv 1 + \cos\alpha, \qquad (36)$$

откуда $$\cos\frac{\alpha}{2} \equiv \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (36,а)$$

Вычитая почленно (**) из (***), находим

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} \equiv 1 - \cos\alpha, \qquad (37)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} \equiv \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (37,а)$$

На рисунках 94 и 95 дано графическое толкование тождеств (36) и (37).

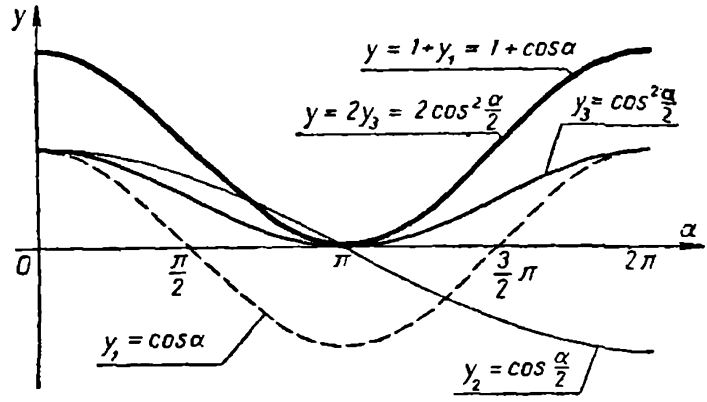

y
y = 1 + y₁ = 1 + cosα
y = 2y₃ = 2cos²α/2
y₃ = cos²α/2
α
0
π/2
π
3/2 π
2π
y₁ = cosα
y₂ = cos α/2

Рис. 94.

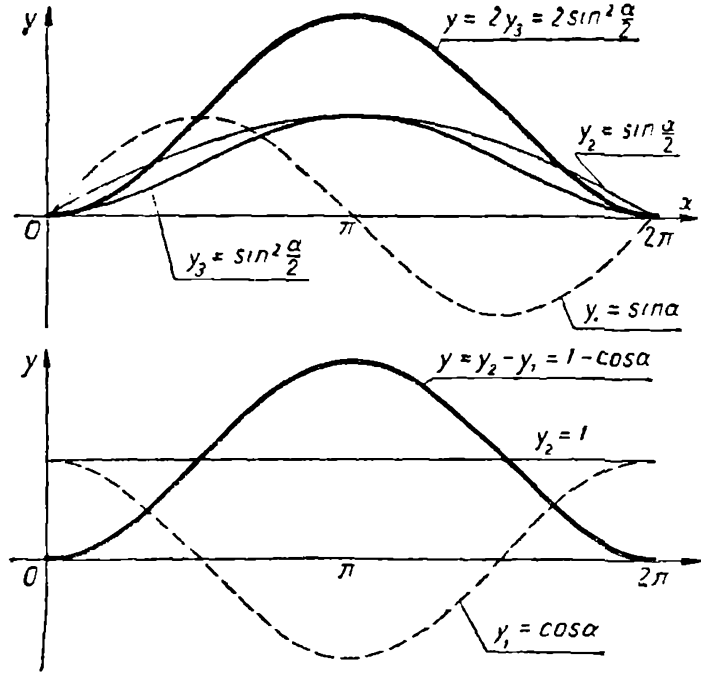

y
y = 2y₃ = 2sin²α/2
y₂ = sin α/2
x
0
π
2π
y₃ = sin²α/2
y₁ = sinα
y
y = y₂ − y₁ = 1 − cosα
y₂ = 1
0
π
2π
y₁ = cosα

Рис. 95.

Наконец, разделив почленно (37,а) на (36,а) получаем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \equiv \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\,. \qquad (38)$$

Для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ можно получить и другие выражения, более удобные тем, что в них отсутствует радикал и есть полная определенность в знаках. Для этого разделим почленно тождество (*) на (36), получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \equiv \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (38,а)$$

Теперь разделим (37) на (*), получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \equiv \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (38,б)$$

Знак перед радикалами в формулах (36,а), (37,а) и (38) берется такой, какой имеет данная функция в соответствующей четверти числовой окружности, т. е. там, где изображен аргумент $\frac{\alpha}{2}$. Так, например, если известно, что число $\frac{\alpha}{2}$ изображается на числовой окружности в третьей четверти, то радикалы в формулах (36,а) и (37, а) следует взять со знаком минус, а в формуле (38) — со знаком плюс, так как в этой четверти синус и косинус принимают отрицательные значения, а тангенс — положительные значения.

Если же нам дано только значение $\cos\alpha$, но об аргументе α ничего неизвестно, то в формулах следует сохранять оба знака, так как каждому значению $\cos\alpha$ соответствует два значения любой круговой функции от аргумента $\frac{\alpha}{2}$, отличающиеся между собой знаком. Проверим это, например, для $\sin\frac{\alpha}{2}$.

Пусть $\cos\alpha = c$. Данному значению косинуса соответствует бесконечное множество значений аргумента α, что видно по графику (стр. 152, рис. 34)

$$\alpha = \pm\alpha_0 + 2\pi k, \text{ где } k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots$$

и $0 \leqslant \alpha_0 \leqslant \pi$. Следовательно, $\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\alpha_0}{2} + \pi k$ и $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\left(\pm\frac{\alpha_0}{2} + \pi k\right)$, где k — произвольное целое число.

В случае четного k имеем: $k=2n$ и, следовательно,

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\left(\pm\frac{\alpha_0}{2}+\pi\cdot 2n\right)=\sin\left(\pm\frac{\alpha_0}{2}\right)=\pm\sin\frac{\alpha_0}{2}.$$

При нечетном k имеем: $k=2n+1$ и, следовательно,

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\left[\pm\frac{\alpha_0}{2}+\pi(2n+1)\right]=\sin\left(\pm\frac{\alpha_0}{2}+\pi\right)=$$

$$=-\sin\left(\pm\frac{\alpha_0}{2}\right)=\mp\sin\frac{\alpha_0}{2}.$$

Итак, во всех случаях $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sin\frac{\alpha_0}{2}$, где $0\leqslant\frac{\alpha_0}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$. Таким образом, одному значению $\cos\alpha$ соответствует два противоположных по знаку значения функции $\sin\frac{\alpha}{2}$; эти значения и дает формула (37,а).

Нахождение круговых функций половинного аргумента имело огромное значение при составлении таблиц хорд и таблиц синусов. Вот почему уже в работе Птолемея имеются зародыши круговых функций от половинных аргументов, хотя и в другой форме. Индийский математик Вараха-Мира (550 г. н. э.) дает формулу для синуса половины угла, близкую к нашей формуле

Решим следующий пример: дан $\cos\alpha=0{,}7550$; найти $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Решение. По формуле (37,а) имеем:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-0{,}7550}{2}}=\pm\sqrt{0{,}1225}=$$

$$=\pm 0{,}3500$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+0{,}7550}{2}}\approx\pm\sqrt{0{,}8775}\approx\pm 0{,}9368;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-0{,}7550}{1+0{,}7550}}\approx\pm\frac{0{,}3500}{0{,}9368}\approx\pm 0{,}3736.$$

4. О возможности составления таблиц круговых функций

Теоремы сложения и их следствия, рассмотренные нами в данной главе, дают возможность составления таблиц круговых функций вычислительным методом.

В самом деле, зная, что $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660\ldots$, мы можем найти по формулам (36,а), (37,а):

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} \approx \sqrt{\frac{1+0{,}8660}{2}} \approx 0{,}9659;$$

$$\sin 15° = \sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}} \approx \sqrt{\frac{1-0{,}8660}{2}} \approx 0{,}2588,$$

что было ранее найдено по другим формулам.

Применяя далее эти формулы, мы найдем косинус и синус углов 7°30′; 3°45′; 1°52′30″; 0°56′15″ и т. д. Затем, пользуясь формулами кратных аргументов (33; 34) и формулами суммы аргументов (30; 31), мы можем найти значения круговых функций всех углов, кратных, например, 0°56′15″ и получить тем самым таблицу с шагом в 0°56′15″.

Разумеется, значения круговых функций можно вычислять с любой степенью точности.

Мы не будем здесь более подробно рассматривать технику составления таблицы, так как дальше этому вопросу посвящается особая глава.

Упражнения.

1. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $-\frac{7}{25}$; определить синус и косинус угла при основании.

2. Проверить равенства:

   а) $\operatorname{ctg} 15° + \operatorname{tg} 15° = 4$;

   б) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$;

   в) $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = 4$.

3. Доказать неравенство: $|\sin z \cos z| < \frac{1}{2}$.

4. Дана функция $f(x) = \sin x \cos x$. Найти:
   а) период функции;
   б) значение аргумента, при котором функция равна нулю;
   в) значение x, при котором функция принимает наименьшее значение.

Указание. Преобразовать функцию к более простому виду.

5. Доказать, что $\sin 2z < 2\sin z$, если $0 < z < \pi$.

6. Доказать, что $\operatorname{tg} 2z > 2\operatorname{tg} z$, если $0 < z < \frac{\pi}{4}$.

§ 31. Преобразование произведения круговых функций в сумму и обратное преобразование суммы круговых функций в произведение

1. Преобразование произведения в сумму

Почленным сложением и вычитанием тождеств:

$$\sin(\alpha+\beta)\equiv\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)\equiv\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Получаем:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\equiv 2\sin\alpha\cos\beta; \qquad \text{(а)}$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\equiv 2\cos\alpha\sin\beta. \qquad \text{(б)}$$

Таким же путем из тождеств:

$$\cos(\alpha+\beta)\equiv\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)\equiv\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Находим:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\equiv 2\cos\alpha\cos\beta; \qquad \text{(в)}$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\equiv -2\sin\alpha\sin\beta. \qquad \text{(г)}$$

Из формул (а), (б) и (г) находим:

$$\sin\alpha\cos\beta\equiv\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]; \qquad (39,\text{а})$$

$$\cos\alpha\cos\beta\equiv\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]; \qquad (39,\text{б})$$

$$\sin\alpha\sin\beta\equiv\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \qquad (39,\text{в})$$

Все эти формулы были найдены Франсуа Виета. Приведем примеры применения этих формул.

1. Найти $x=\sin\alpha\cos\beta$, если $\beta=13°30'$, $\alpha=16°30'$.

Решение.

Прием 1: $x=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]=$

$=\frac{1}{2}[\sin 30°+\sin 3°]\approx\frac{1}{2}[0{,}5+0{,}0523]\approx 0{,}2761.$

Прием 2: $x=\sin\alpha\cos\beta=\sin 16°30'\cdot\cos 13°30'\approx$
$\approx 0{,}2840\cdot 0{,}9724\approx 0{,}2761.$

Понятно, что первый прием значительно проще второго.

2. Найти такие значения независимой переменной x, при которых функция $y=\cos\left(\frac{\pi}{10}+3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}-3x\right)$ принимает наименьшее значение.

Решение. По формуле (39,б) имеем:

$$y=\cos\left(\frac{\pi}{10}+3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{20}-3x\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{3\pi}{20}+\right.$$
$$\left.+\cos\left(\frac{\pi}{20}+6x\right)\right].$$

Ясно, что наименьшее значение функция y примет тогда, когда $\cos\left(\frac{\pi}{20}+6x\right)=-1$, т. е. при $\frac{\pi}{20}+6x=\pi+2\pi k$, откуда находим $x=\frac{19\pi}{120}+\frac{\pi}{3}\cdot k$, где k — целое.

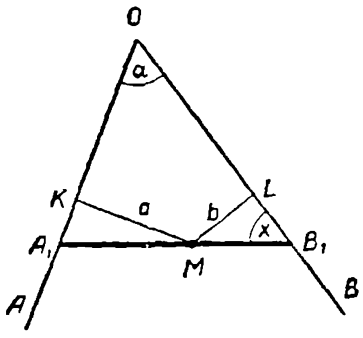


Рис. 96.

3. Дан угол $AOB=\alpha$ и точка M внутри него (рис. 96). Провести через эту точку прямую так, чтобы произведение ее отрезков от точки M до сторон угла было наименьшее.

Решение. Положение точки M нам известно, следовательно, известны и перпендикуляры MK и ML, опущенные из этой точки на стороны угла; обозначим их длины соответственно через a и b. Положение искомой прямой A_1B_1 вполне определяется углом, который она образует с одной из сторон данного угла, например со стороной OB; обозначим этот угол через x, тогда будем иметь:

$$MB_1=\frac{b}{\sin x},\quad MA_1=\frac{a}{\sin[180^\circ-(x+\alpha)]}=\frac{a}{\sin(x+\alpha)},$$

следовательно, $MA_1\cdot MB_1=\frac{ab}{\sin(x+\alpha)\sin x}$.

Теперь ясно, что произведение $(MA_1\cdot MB_1)$ будет иметь наименьшее значение тогда, когда стоящее в знаменателе выражение $\sin(x+\alpha)\sin x$ будет иметь наибольшее значение.

Но по формуле (39,в) имеем:

$$\sin(x+\alpha)\sin x=\frac{1}{2}[\cos\alpha-\cos(2x+\alpha)],$$

а полученная разность будет наибольшей при $\cos(2x+\alpha)=-1$ и, следовательно, при $2x+\alpha=180°$; отсюда находим $x=90°-\frac{\alpha}{2}$.

Итак, прямую A_1B_1 следует провести так, чтобы $\angle A_1B_1O$ был равен $90°-\frac{\alpha}{2}$, т. е. треугольник OA_1B_1 будет в этом случае равнобедренным.

2. Преобразование сумм в произведения

При вычислениях с помощью таблиц логарифмов бывает полезно преобразование суммы к виду, удобному для логарифмирования. Для получения формул, облегчающих такие преобразования, используем тождества (а, б, в, г) и обозначения:

$$\alpha+\beta=x,\quad \alpha-\beta=y. \qquad (*)$$

Складывая и вычитая почленно равенства (*), находим

$$2\alpha=x+y \quad \text{и} \quad 2\beta=x-y,$$

откуда

$$\alpha=\frac{x+y}{2} \quad \text{и} \quad \beta=\frac{x-y}{2} \qquad (**)$$

Используя обозначения (*) и равенства (**), тождества (а, б, в, г,) можно записать в следующем виде:

$$\sin x+\sin y\equiv 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (40)$$

$$\sin x-\sin y\equiv 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}; \qquad (41)$$

$$\cos x+\cos y\equiv 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (42)$$

$$\cos x-\cos y\equiv -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\equiv 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \qquad (43)$$

Словесно эти тождества читают так:

Сумма синусов любых аргументов равна удвоенному произведению синуса полусуммы на косинус полуразности этих аргументов.

Разность синусов любых аргументов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на синус полуразности этих аргументов.

Сумма косинусов любых аргументов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы на косинус полуразности этих аргументов.

Разность косинусов любых аргументов равна минус удвоенному произведению синуса полусуммы на синус полуразности этих аргументов.

Преобразуем теперь к виду, удобному для логарифмирования, сумму и разность тангенсов:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y \equiv \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} \equiv \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y}$$

Но числитель правой части равен $\sin(x+y)$, поэтому

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y \equiv \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}. \qquad (44)$$

Аналогичным путем получаем:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \equiv \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}. \qquad (45)$$

Выведенные формулы позволяют объяснить полученные нами графическим путем результаты сложения двухфазных и трехфазных токов (см. § 25, стр. 222). Сделаем это.

а) $i_1 = \sin 2\pi t;\ i_2 = \sin(2\pi t + \frac{\pi}{2})$;

$$i = i_1 + i_2 = \sin 2\pi t + \sin(2\pi t + \tfrac{\pi}{2}) =$$

$$= 2\sin\frac{2\pi t + \left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\cos\frac{2\pi t - \left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}{2} =$$

$$= 2\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right).$$

[по форм. (40)]

Этот результат показывает, что кривая i, полученная нами раньше сложением графиков i_1 и i_2 (рис. 74), является деформированной синусоидой, и что амплитуда суммарного тока $K = CD = \sqrt{2}$, его период $T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ и фаза смещения $\varphi_0 = \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\pi} = \frac{1}{8}$;

б) $i_1 = \sin 2\pi t$; $i_2 = \sin\left(2\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$; $i_3 = \sin\left(2\pi t - \frac{4\pi}{3}\right)$;

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \sin 2\pi t + \sin\left(2\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(2\pi t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Применив к сумме первого и последнего слагаемых формулу (40), получим:

$$i = 2\sin\frac{2\pi t + \left(2\pi t - \frac{4\pi}{3}\right)}{2}\cos\frac{2\pi t - \left(2\pi t - \frac{4\pi}{3}\right)}{2} +$$

$$+\sin\left(2\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\left(2\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sin\left(2\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)\cdot\left[2\cos\frac{2\pi}{3} + 1\right].$$

Но $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, следовательно, $2\cos\frac{2\pi}{3} + 1 = 0$, а потому $i = 0$.

Таким образом, мы пришли к тем же результатам, которые были получены в начале главы геометрическим сложением графиков функций i_1, i_2 и i_3 (рис. 70).

При решении некоторых задач и, в частности, при исследовании гармонических процессов приходится иметь дело с преобразованием в произведение суммы вида: $a\sin\alpha + b\cos\alpha$. Это преобразование производится введением двух вспомогательных величин φ и r так, чтобы выполнялись равенства:

$$a = r\cos\varphi \text{ и } b = r\sin\varphi. \qquad (*)$$

Действительно, если нам удастся подобрать такие числа φ и r, то, подставив полученные выражения a и b в данную сумму, будем иметь:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = r(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) =$$

$$= r\sin(\alpha + \varphi). \qquad (**)$$

Для определения чисел φ и r возведем обе части равенств (*) в квадрат, а затем почленно их сложим, получим:

$$a^2 + b^2 = r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha),$$

т. е.
$$a^2 + b^2 = r^2,$$

откуда
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Зная r, найдем из равенств (*)

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

а следовательно, и аргумент φ.

Пример 1. Приведем указанным способом к виду, удобному для логарифмирования, выражение $s = 3\sin\alpha - \sqrt{7}\cos\alpha$:

$$r = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{7})^2} = \sqrt{9+7} = 4;$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{4} = 0{,}7500,\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Пользуясь таблицей и учитывая знак синуса, находим, что $\varphi \approx -41°24'$, следовательно, по формуле (**)

$$s = 3\sin\alpha - \sqrt{7}\cos\alpha = 4\sin(\alpha+\varphi) \approx 4\sin(\alpha - 41°24').$$

Пример 2. Некоторая материальная точка под действием силы F_1 может совершать в данном направлении (например, вдоль оси Oy) гармоническое колебание $y_1 = 2\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$; под действием другой силы F_2 она может совершать вдоль той же оси колебание $y_2 = 3\sin\pi t$. Какое движение будет совершать эта точка в результате одновременного действия на нее обеих сил?

Решение. По законам механики точка будет совершать движение, определяющееся так:

$$y = y_1 + y_2 = 2\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\pi t = 2\sin\pi t \cdot \cos\frac{\pi}{3} +$$

$$+ 2\cos\pi t \cdot \sin\frac{\pi}{3} + 3\sin\pi t = \left(2\cos\frac{\pi}{3} + 3\right)\sin\pi t +$$

$$+ \left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)\cos\pi t = 4\sin\pi t + \sqrt{3}\cos\pi t.$$

Преобразуем эту сумму введением вспомогательного аргумента φ:

$r = \sqrt{4^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{19}$, следовательно, $\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{19}}$ и $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

По таблице находим: $\frac{4}{\sqrt{19}} \approx 0{,}9176$, т. е. $\cos\varphi = 0{,}9176$, откуда $\varphi \approx 23°22' \approx 0{,}4078$ радиан.

Итак, $y = 4\sin\pi t + \sqrt{3}\cos\pi t \approx \sqrt{19}\sin(\pi t + 0{,}4078)$, т. е. точка будет совершать гармоническое движение с амплитудой $\sqrt{19}$, начальной фазой $\varphi \approx 0{,}4078$ и с прежней частотой.

Упражнения.

1. Привести к виду, удобному для логарифмирования, выражение:

$$\sin A + \sin B + \sin C, \text{ если } A + B + C = 180°$$

Решение. $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$; [40]

но $\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{(180°-C)}{2} = \sin\left(90° - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$; [19]

следовательно, $\sin A + \sin B = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$;

по формуле (33) имеем: $\sin C = 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$.

Таким образом,

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right).$$

Но $\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{180° - (A+B)}{2} = \sin\left(90° - \frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{A+B}{2}$,

поэтому $\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2} =$

$= 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$; подставив этот результат в предыдущее соотношение, получим:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

2. При каком соотношении между аргументами α, β, γ справедливо равенство:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma?$$

Решение. Перепишем равенство так:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = 0;$$

объединим два последних слагаемых в одну группу и вынесем за скобку общий множитель $\operatorname{tg}\gamma$, получим:

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta)=0,$$

но $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$ [44] $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$; $1-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta=$

$$=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Подставив эти выражения в предыдущее равенство и выполнив сложение, получим:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=0$$

или $\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=0$, что возможно только при условии:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0,$$

откуда $\alpha+\beta+\gamma=\pi k$, где k — любое целое число.

3. В двух проводниках протекают электротоки: $I_1=40\sin 314t$ и $I_2=30\sin\left(314t-\dfrac{\pi}{6}\right)$. Если два проводника соединить в один, то по закону Кирхгофа в объединенном проводнике будет ток $I=I_1+I_2$. Найти функцию, выражающую этот суммарный ток.

Решение. Обозначим ради краткости $314t$ через z, тогда

$$I=40\sin z+30\sin\left(z-\frac{\pi}{6}\right)=40\sin z+30\left[\sin z\cos\frac{\pi}{6}-\right.$$

$$\left.-\cos z\sin\frac{\pi}{6}\right]=(40+15\sqrt{3})\sin z-15\cos z.$$

Далее поступаем так же, как в первом упражнении, а именно:

$$r=\sqrt{(40+15\cdot\sqrt{3})^2+15^2}\approx 66,$$

$\cos\varphi=\dfrac{40+15\sqrt{3}}{66}\approx 0{,}975$, $\sin\varphi=\dfrac{-15}{60}=-0{,}25$, следовательно, $\varphi\approx -14°30'$; в радианах $\varphi\approx -0{,}253$.

$$I=r\sin(z+\varphi)\approx 66\sin(314t-0{,}253).$$

4. Преобразовать произведения круговых функций в суммы.

а) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{8}$;

б) $\sin(x+1)\sin x$.

5. Кратчайшим путем с помощью натуральных таблиц круговых функций найти произведения:

а) $2 \sin 35° \cdot \cos 50°$;

б) $\sin 12° \cdot \cos 8° \cdot \cos 10°$.

Указание. Предварительно представить каждое произведение в виде суммы.

6. Показать, что

$$\sin 87° - \sin 59° - (\sin 93° - \sin 61°) = \sin 1°.$$

7. Преобразовать к виду, удобному для логарифмирования, следующие выражения:

а) $\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha} \quad (0 < \alpha < 2\pi)$;

б) $35{,}4 \sin\alpha - 28{,}6 \cos\alpha$.

8. Проверить равенства, не пользуясь таблицами:

а) $\operatorname{tg} 20° + 4 \sin 20° = \sqrt{3}$;

б) $\sin 20° \cdot \sin 40° \cdot \sin 60° \cdot \sin 80° = \frac{3}{16}$;

в) $\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg} 50° + \operatorname{tg} 60° = \frac{8}{\sqrt{3}} \cos 20°$.

9. Доказать тождества:

а) $\sqrt{1+\sin z} - \sqrt{1-\sin z} \equiv 2 \sin \frac{z}{2} \quad \left(0 < z < \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) \equiv$

$$\equiv 4 \sin(a+h) \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{h}{2}\right);$$

в) $\dfrac{\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h)}{\cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h)} \equiv \operatorname{tg}(a+h)$;

г) $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x \equiv \operatorname{tg} 3x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x$;

д) $\cos^2 x + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \equiv \frac{3}{2}$;

е) $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) \equiv$

$$\equiv 4 \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{b+c}{2} \cos\frac{c+a}{2}.$$

10. Показать, что выражения

а) $\cos^2 x + \cos^2(x-a) - 2 \cos x \cos a \cos(x-a)$ и

б) $\sin^2(x+\alpha) + \sin^2(x+\beta) - 2 \cos(\alpha-\beta) \sin(x+\alpha) \sin(x+\beta)$

не зависят от x.

11. Показать справедливость следующих равенств при $A+B+C=\pi$:

а) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$;

б) $\operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{C}{2} = 1$;

в) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$.

12. Найти значения x в промежутке $[0; \pi]$, при которых нижеследующие функции имеют наибольшее значение, а также найти такие значения функций:

а) $f(x) = \sin x + \cos x$;

б) $g(x) = 3 \sin x \cos x$;

в) $h(x) = \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

13. Доказать справедливость соотношений:

а) $|\sin x + \cos x| \leqslant \sqrt{2}$;

б) $\left|\sin z \sin \left(\frac{\pi}{3} - z\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + z\right)\right| \leqslant \frac{1}{4}$.

14. Показать, что если A, B и C — углы треугольника, причем один из них тупой, то

1) $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C < 0$;

2) $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A < 1$.

15. Показать, что если A, B и C — углы треугольника, то выполняется неравенство:

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

16. Пусть A, B и C — углы треугольника; доказать, что этот треугольник

1) прямоугольный, если $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$;

2) остроугольный, если $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2$;

3) тупоугольный, если $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$.

ГЛАВА VII

ТАБЛИЦЫ КРУГОВЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ЛОГАРИФМОВ С СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ТОЧНОСТЬЮ

До сих пор мы пользовались готовыми таблицами круговых функций, но не объясняли, каким путем были составлены эти таблицы.

Вычисление значений круговых функций с любой степенью точности основано на теореме сложения и ее следствиях, а также на знании основных тригонометрических неравенств[1], к которым и перейдем в следующем параграфе.

§ 32. Основные тригонометрические неравенства

Возьмем две функции: $y = (x + 1)^2$ и $y = x^2 + 2x$.

Нетрудно видеть, что при любом значении аргумента x разность $(x + 1)^2 - (x^2 + 2x) = 1$, следовательно,

$$(x + 1)^2 > x^2 + 2x. \qquad (*)$$

Это обстоятельство весьма наглядно передается на графиках данных функций (рис. 97).

Итак, если две функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ при одинаковых значениях аргумента x имеют неравные значения, то возникает соотношение вида

$$f(x) > \varphi(x) \text{ или } f(x) < \varphi(x),$$

[1] Существует и другой более простой прием вычисления значений круговых функций, найденный в XVII веке и ныне рассматриваемый в курсе математического анализа, однако таблицы круговых функций составлены значительно ранее элементарным методом, аналогичным рассматриваемому в этой главе.

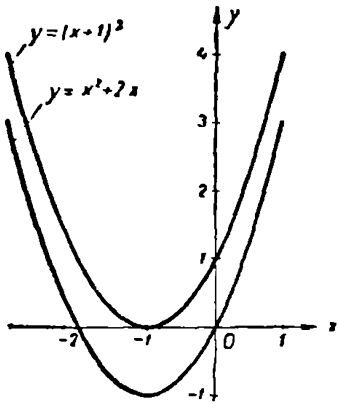


Рис. 97.

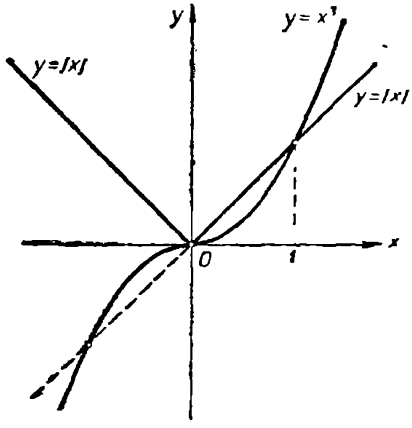


Рис. 98.

называемое неравенством. Множество значений аргумента x, при которых неравенство выполняется, называют его решением. Так, в предыдущем примере неравенство (*) выполняется при любом действительном значении x, следовательно, его решением будет множество всех действительных чисел, т. е. интервал $(-\infty; +\infty)$.

Неравенству $x^3 > |x|$ удовлетворяют значения x, больше единицы, что легко усматривается на графиках функций $y = x^3$ и $y = |x|$ (рис. 98), следовательно, его решением будет множество чисел, образующих интервал $(1; +\infty)$.

Определив понятие о неравенстве двух функций, перейдем к неравенствам между круговыми функциями.

Теорема 1.

Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. (а)

Доказательство. Возьмем на числовой окружности дугу $AM = x$ радиан, проведем хорду AM и опустим на ось Ox перпендикуляр MP из точки M (рис. 99). Затем в точке A проведем касательную к окружности и на ней отметим точку T, в которой она встречается с продолжением радиуса OM.

Сравнивая площади трех фигур: треугольника OAM, кругового сектора OAM и треугольника OAT, замечаем, что

пл. $\triangle OAM <$ пл. сект. $OAM <$ пл. $\triangle OAT$.

Но пл. $\triangle OAM = \frac{1}{2} OA \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x$;

пл. сект. $OAM = \frac{1}{2} \cup AM \cdot OA = \frac{1}{2} x \cdot 1 = \frac{1}{2} x$;

пл. $\triangle OAT = \frac{1}{2} OA \cdot AT = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, поэтому предыдущее неравенство запишется так:

$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, или $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, что и требуется доказать.

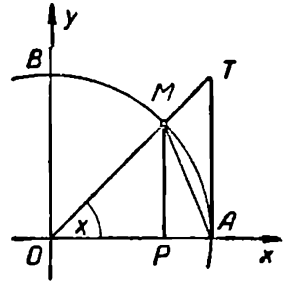


Рис. 99.

На графиках данных функций содержание доказанного неравенства выражается в том, что в интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ все точки синусоиды расположены ниже биссектрисы координатного угла, а точки тангенсоиды расположены выше этой биссектрисы (рис. 100).

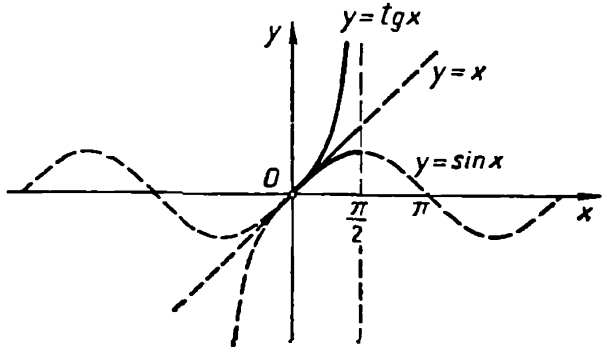


Рис. 100.

Так, взяв, например, $x = 15°18'$, имеем право по этой теореме записать, что

$$\sin 15°18' < \text{arc } 15°18' < \operatorname{tg} 15°18'$$

и действительно из соответствующих таблиц книги Брадиса «Математические четырехзначные таблицы» находим эти значения:

$$0{,}2639 < 0{,}2670 < 0{,}2736.$$

Понятно, что, если $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, то $\operatorname{tg} x < \sin x$, но $|\operatorname{tg} x| > \sin x$, что видно и на графике (рис. 101).

Теорема 2. *Если* $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *то* $x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x$. (β)

Доказательство. В предыдущей теореме уже доказано, что $\sin x < x$, поэтому остается убедиться в справедливости неравенства:

$x - \frac{x^3}{4} < \sin x$.

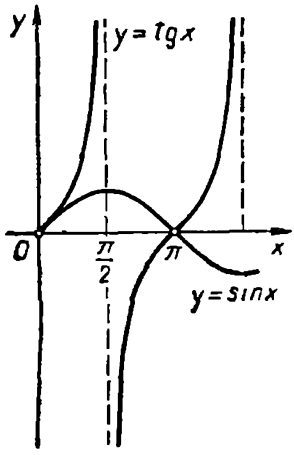


Рис. 101.

По теореме 1 имеем:

$$\frac{x}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Умножив обе части на $2\cos^2\frac{x}{2}$, получим:

$x\cos^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, или

$x\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right) < \sin x$,

откуда $x - \sin x < x \cdot \sin^2\frac{x}{2}$. (*)

Но по предыдущей теореме $\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ и, следовательно, $\sin^2\frac{x}{2} < \left(\frac{x}{2}\right)^2$, поэтому неравенство(*)еще более усилится, если в правой его части вместо $\sin^2\frac{x}{2}$ взять $\left(\frac{x}{2}\right)^2$,

т. е $$x - \sin x < x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

или $$x - \sin x < \frac{x^3}{4}, \qquad (\gamma)$$

откуда $x - \frac{x^3}{4} < \sin x$, что и требовалось доказать.

Смысл неравенства (β) на графике (рис. 102) выразился в том, что в промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ точки прямой $y = x$ лежат выше синусоиды $y = \sin x$, а точки кубической параболы $y = x - \frac{x^3}{4}$ лежат ниже синусоиды.

Неравенство (γ) показывает, что $\sin x$ отличается от своего аргумента x меньше, чем на $\frac{x^3}{4}$; на этом основании можно считать, что

$$\sin x \approx x \text{ с точностью до } \frac{x^3}{4}.$$

Для значений x, близких к нулю, данная приближенная формула позволяет находить синус с большей точностью. Так, например, если $x = 0{,}01$ радиана, то по-

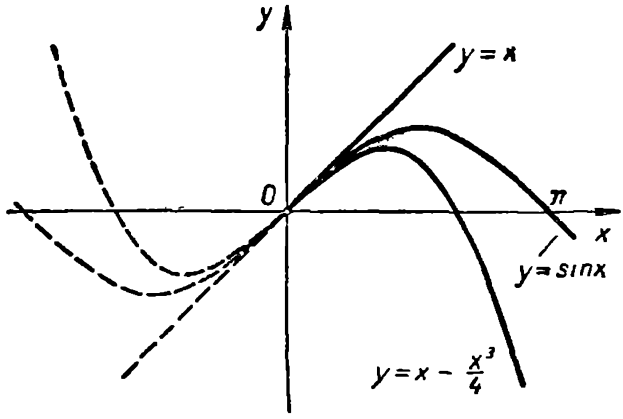


Рис. 102.

лучаем $\sin 0{,}01 \approx 0{,}01$ с погрешностью менее $\frac{0{,}01^3}{4} = 0{,}00000025$, т. е. $\sin 0{,}01$ может отличаться от 0,01 только в седьмом десятичном знаке.

§ 33. Составление таблиц круговых функций

Допустим, требуется составить таблицу круговых функций с шагом в $1'$ (мы берем градусное измерение дуг, так как на практике оно более употребительно).

Выражаем дуги $x_1 = 1'$ в радианах, взяв достаточное значение π, например, с 13 значащими цифрами: $\pi = 3{,}141\,592\,653\,590$, получаем:

$$x_1 = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \approx 0{,}0002908882085.$$

По теореме предыдущего параграфа имеем:
$\sin 1' = \sin x_1 \approx x_1 \approx 0{,}0002908882085$ с погрешностью меньше чем $\frac{x_1^3}{4}$.

Заметив, что $x_1 < 0{,}0003$, находим:

$$\frac{x_1^3}{4} < \frac{(0{,}0003)^3}{4} < 0{,}000000000007.$$

Округлив полученное значение синуса до 11-го знака, найдем

$$\sin 1' \approx 0{,}00029088821$$

с 11-ми верными десятичными знаками.

Если по условию составления таблицы требуется еще большая точность, то следует начинать с вычисления радианной меры меньшей дуги, например, в $1''$ и находить $\sin 1''$. Вообще, уменьшая начальную дугу x_1, можно получить значение $\sin x_1$ и всю таблицу круговых функций с какой угодно точностью.

Итак, получив значение $\sin 1'$, находим $\cos 1'$.

$$\cos 1' = \sqrt{1 - \sin^2 1'} \approx 0{,}99999999882.$$

Применяя теперь теорему сложения

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b;$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Находим последовательно[1]:

$\sin 2' = \sin(1' + 1') = \sin 1' \cos 1' + \cos 1' \sin 1'$;

$\cos 2' = \cos(1' + 1') = \cos 1' \cos 1' - \sin 1' \sin 1'$;

затем: $\sin 3' = \sin(2' + 1') = \sin 2' \cos 1' + \cos 2' \sin 1'$;

$\cos 3' = \cos(2' + 1') = \cos 2' \cos 1' - \sin 2' \sin 1'$;

далее $\sin 4' = \sin(3' + 1') = \sin 3' \cos 1' + \cos 3' \sin 1'$;

$\cos 4' = \cos(3' + 1') = \cos 3' \cos 1' - \sin 3' \sin 1'$ и т. д.

Таким путем можно составить таблицу функций $\sin z$ и $\cos z$ с шагом в $1'$ для всех острых углов, но учитывая, что формулы приведения дают возможность сводить функции любых углов к углам от 0 до 45°, естественно, указанные вычисления нужно довести только до 45°[2].

---

[1] Для аргументов вида $2x$ вычисления выгоднее производить по формулам удвоения аргумента (33 и 34).

[2] Так составлялись таблицы синусов Иоганном Мюллером (1436—1476) родом из деревни Regiomont во Франконии, почему его и называют Региомонтаном.

Примечание. Указанные вычисления можно даже довести только до 30°, заметив, что синусы и косинусы углов от 30 до 45° удобно вычислять посредством следующих двух тождеств, которые легко проверить.

$$\sin(30°+\alpha) \equiv \cos\alpha - \sin(30° - \alpha);$$
$$\cos(30°+\alpha) \equiv \cos(30°-\alpha) - \sin\alpha.$$

Давая углу α значения, возрастающие на $1'$, начиная с $1'$ до 15°, находим из первой формулы

$$\sin 30°1' = \cos 1' - \sin 29°59';$$
$$\sin 30°2' = \cos 2' - \sin 29°58' \text{ и т. д.}$$

Чтобы проверить точность составленной таким путем таблицы, находят значения круговых функций некоторых углов иным путем и сравнивают их с табличными значениями. Обычно составители таблиц используют в этих целях углы вида $45°\cdot\frac{1}{2^n}$ и $30°\cdot\frac{1}{2^n}$, для которых круговые функции легко вычислить по формулам (36, а) и (37, а).

$$\text{Так, } \sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin 22°30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \cos 22°30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\sin 11°15' = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \cos 11°15' =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \text{ и т. д.}$$

$$\text{Зная, что } \sin 30° = \frac{1}{2} \text{ и } \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

находят по тем же формулам sin 15° и cos 15°, затем sin 7°30′ и cos 7°30′ и т. д.

Используя формулы:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right); \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} \text{ и } \operatorname{csc} z = \frac{1}{\sin z},$$

составляют таблицы и для этих круговых функций.

§ 34. Таблицы логарифмов круговых функций и их построение

Если в процессе решения задачи получили выражение $x = \frac{\pi b^2 \sin\alpha}{\cos^2(\alpha+15°)}$, значение которого надо найти при $b = 25{,}34$ и $\alpha = 32°12'$, то можно применить два приема вычисления:

I — с помощью таблиц круговых функций;

II — с помощью таблиц логарифмов круговых функций.

I. 1) $b^2 \approx 642{,}1$ (табл. квадр.);
2) $\pi b^2 \approx 2017$ (табл. умнож.);
3) $\sin\alpha \approx 0{,}5329$ (табл. синусов);
4) $\pi b^2 \sin\alpha \approx 1075$ (табл. умнож.);
5) $\cos(\alpha + 15°) \approx 0{,}6794$ (табл. косинусов);
6) $\cos^2(\alpha + 15°) \approx 0{,}4615$ (табл. квадр.);
7) $\frac{\pi b^2 \sin\alpha}{\cos^2(\alpha + 15°)} \approx 2328$ (табл. умнож.)

II. 1) $\lg \pi = 0{,}4971$ (лог. чис.)
2) $\lg b \approx 1{,}4038$
3) $2\lg b = 2{,}8076$ (лог. числ.)
4) $\lg \sin\alpha = \bar{1}{,}7266$ (лог. син.)
5) $\lg \cos(\alpha+15°) \approx \bar{1}{,}8322$
6) $-2\lg\cos(\alpha+15°) = -\bar{1}{,}6644$ (лог. кос.)
7) $\lg x \approx 3{,}3670$ (сумма предшествующих логарифмов
8) $x \approx 2328$ (антилогарифм).

Видим, что прием II оказался более рациональным, следовательно, целесообразно построить таблицу логарифмов круговых функций, что осуществляется весьма просто:

1) Надо предварительно построить таблицу круговых функций, что выполнено в § 30.

2) Надо построить таблицу логарифмов чисел, что излагается в учебном предмете элементарной алгебры[1].

Пусть надо найти: 1) $\lg\sin 18°18'$;

2) $\lg\cos 43°6'$;

3) $\lg\operatorname{tg} 83°12'$, поступаем следующим образом:

1) Находим: а) по табл. синусов $\sin 18°18' \approx 0{,}3140$;
б) по табл. логар. чисел $\lg 0{,}3140 \approx \bar{1}{,}4969$.

Следовательно, $\lg\sin 18°18' \approx \bar{1}{,}4969$, что и подтверждается таблицами логарифмов синусов, данными в книге Брадиса.

2) Находим: а) по табл. косинусов $\cos 43°6' \approx 0{,}7302$;
б) по табл. логар. чисел $\lg 0{,}7302 \approx \bar{1}{,}8634$.

Следовательно, $\lg\cos 43°6' \approx \bar{1}{,}8634$, что видно в таблицах логарифмов косинусов.

---

[1] Значительные изменения произошли в тригонометрии от применения логарифмов, введенных шотландским математиком Джоном Непером (1550—1617) и опубликованных в 1614 году под названием «Описание удивительных таблиц логарифмов».

3) Находим: а) по табл. тангенсов $\operatorname{tg} 83°12' \approx 8{,}386$;
б) по табл. логар. чисел $\lg 8{,}386 \approx 0{,}9235$.

Следовательно, $\lg \operatorname{tg} 83°12' \approx 0{,}9235$; по таблицам логарифмов тангенсов имеем: $\lg \operatorname{tg}\ 83°12' \approx 0{,}9236$.

Полученное расхождение на 1 в четвертом десятичном знаке для четырехзначных таблиц допустимо; если надо создавать таблицы логарифмов круговых функций четырехзначные, то правильнее было бы брать пятизначные таблицы круговых функций и логарифмов чисел.

Чтобы не совершать при вычислениях указанных промежуточных операций, составили таблицу, содержащую логарифмы значений круговых функций для углов от 0 до 90°.

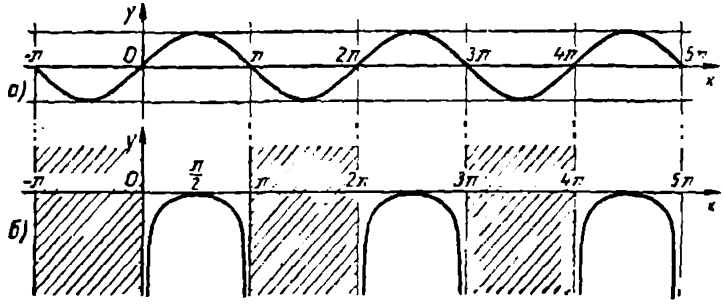


Рис. 103.

В книге Брадиса «Математические таблицы» такая таблица дана с четырьмя значащими цифрами с шагом в 6′ и готовыми поправками на 1′, 2′ и 3′. Правила пользования этой таблицей такие же, как и для таблиц круговых функций.

Построим графики логарифмов круговых функций.

I. График функции $y = \lg \sin x$. Предварительно построим синусоиду $y_1 = \sin x$ (рис. 103, *а*).

Далее отметим, что в интервалах $(-\pi; 0)$; $(\pi; 2\pi)$; $(3\pi; 4\pi)$ и т. д. синус имеет отрицательные значения, а потому логарифмов его (действительных) не существует.

Заштрихуем полосы, где нет графика $\lg \sin x$ (рис. 103, *б*).

В оставшихся (незаштрихованных) интервалах $(0; \pi)$; $(2\pi; 3\pi)$ и т. д. $\sin x$ принимает положительные значения, не большие 1, поэтому $\lg \sin x \leqslant 0$ и, следовательно, график $\lg \sin x$ не будет подниматься выше оси абсцисс.

При изменении аргумента x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ $\sin x$ возрастает от 0 до 1, поэтому $\lg \sin x$ также возрастает, проходя отрицательные значения от $-\infty$ до 0, и, следова-

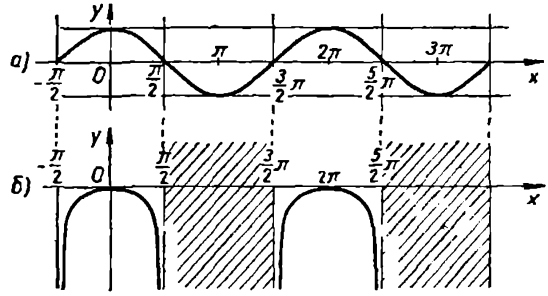


Рис. 104.

тельно, график $\lg \sin x$ в этом промежутке поднимается из $-\infty$ до оси Ox, как показано на рисунке 103, *б*.

Далее x изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до π, $\sin x$ убывает от 1 до 0, а $\lg \sin x$ убывает от 0 до $-\infty$, поэтому график $\lg \sin x$ в этом промежутке опускается от оси абсцисс вниз, уходя снова в $-\infty$.

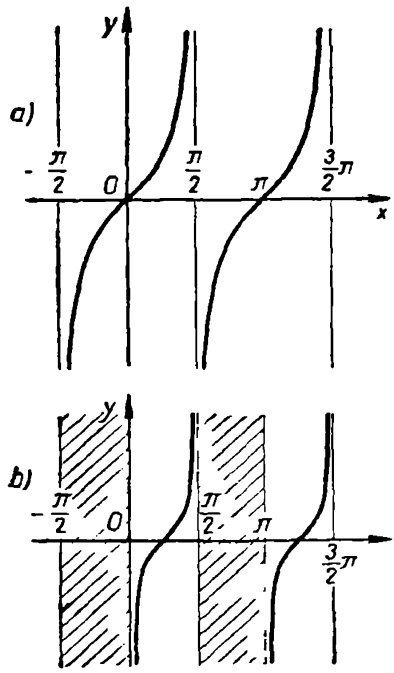


Рис. 105.

В силу периодичности синуса его изменение в других интервалах будет протекать в той же закономерности, поэтому будет повторяться изменение $\lg \sin x$ и его график. Таким образом, полный график функции $y = \lg \sin x$ состоит из бесконечного множества ветвей, разделенных между собой «заштрихованными» полосами.

II. Построение графика функции $y = \lg \cos x$ осуществляется аналогичным путем (см. рис. 104, *а*, *б*).

III. Построение графика функции $y = \lg \operatorname{tg} x$.

Сначала построим график $y_1 = \operatorname{tg} x$ (рис. 105, *а*). Отметим, что логарифмы тангенса в интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и т. д. не существуют (так как здесь $\operatorname{tg} x < 0$), а поэтому заштрихуем эти полосы (рис. 105, *б*).

Пока аргумент x изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$, тангенс возрастает от 0 до 1, поэтому $\lg \operatorname{tg} x$ будет возрастать от $-\infty$ до 0, а кривая $y = \lg \operatorname{tg} x$ будет подниматься из $-\infty$ до оси абсцисс (см. рис. 105, *б*).

Далее x изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$, тангенс возрастает от 1 до ∞, а $\lg \operatorname{tg} x$ также возрастает, проходя все положительные значения от 0 до ∞, поэтому кривая $y = \lg \operatorname{tg} x$ поднимается выше оси абсцисс и уходит в ∞.

Понятно, что в силу периодичности тангенса такая же ветвь графика $y = \lg \operatorname{tg} x$ будет в каждой незаштрихованной полосе.

На графике видно, что с приближением аргумента x к 0 и к $\frac{\pi}{2}$ функция $\lg \operatorname{tg} x$ изменяется очень быстро; этим и объясняется наблюдаемое (в таблицах Брадиса) разъединение строк в начале и в конце таблицы логарифмов тангенса, а для углов, меньших 9° и больших 81°, пришлось даже составлять особые таблицы с меньшим шагом.

IV. Построение графика функции $y = \lg \operatorname{ctg} x$ рекомендуется провести читателю самостоятельно.

В заключение рассмотрим некоторые функции, связанные с круговыми, а именно:

1) $y = \sin |x|$ 3) $y = |\sin x|$
2) $y = \lg \sin |x|$ 4) $y = \lg |\sin x|$

Закон изменения этих функций хорошо виден на их графиках (рис. 106—109).

1) График функции $y = \sin |x|$ (рис. 106) симметричен относительно оси ординат, так как эта функция четная. Правая часть графика (справа от оси Oy) совпадает с обыкновенной синусоидой, так как при $x > 0$ имеем: $|x| = x$ и $\sin |x| = \sin x$. Левая часть графика (слева от оси Oy)

получается зеркальным отражением правой части относительно оси Oy.

2) График функции $y = \lg \sin |x|$ (рис. 107) построен по тому же принципу, что и предыдущий; он симметричен относительно оси ординат, «правая» его часть совпадает с графиком функции $y = \lg \sin x$, а «левая» получается зеркальным отражением правой части относительно оси ординат.

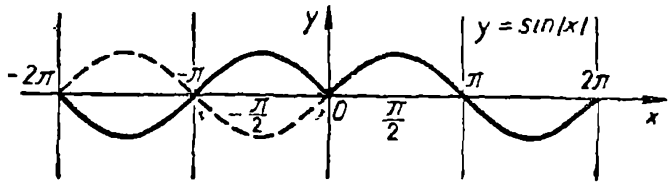


Рис. 106.

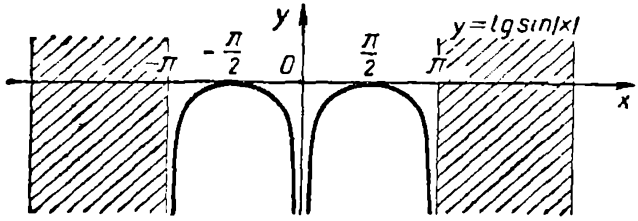


Рис. 107.

Нетрудно понять, что по такому принципу строится график любой функции вида $y = f(|x|)$.

3) В тех интервалах, где $\sin x \geqslant 0$, имеем $|\sin x| = \sin x$; там же, где $\sin x < 0$, будет $|\sin x| = -\sin x$. Отсюда ясен способ получения графика $y = |\sin x|$ (рис. 108)

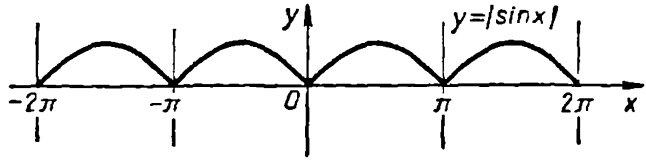


Рис. 108.

из обыкновенной синусоиды: оставляем на месте ту часть синусоиды, которая расположена над осью абсцисс, а ту

часть синусоиды, которая расположена ниже оси абсцисс, отражаем относительно этой оси.

По такому же принципу получается график всякой функции вида $y = |f(x)|$, если уже построен график функции $y = f(x)$.

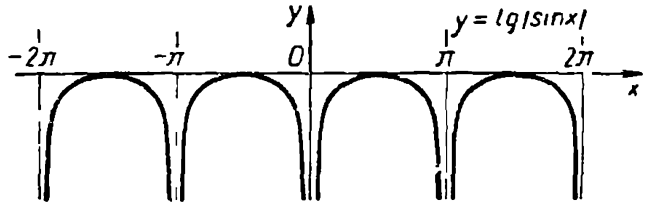


Рис. 109.

4) Построение графика функции $y = \lg|\sin x|$ (рис. 109) не вызовет затруднения, если использовать уже построенные графики функций $y = |\sin x|$ (рис. 108) и $y = \lg \sin x$ (рис. 103).

Упражнения.

1. Построить графики функций: $\cos|x|$; $|\cos x|$; $\lg\cos|x|$;

$$\lg|\cos x|;\ \operatorname{tg}|x|;\ |\operatorname{tg} x|;\ \lg\operatorname{tg}|x|;\ \lg|\operatorname{tg} x|;$$
$$\sin(\sin x);\ \cos(\cos x);\ \sin(\cos x);\ \cos(\sin x).$$

2. Вычислить: 1) с помощью таблиц логарифмов и
2) без таблиц логарифмов, используя другие таблицы,

а) $x = \dfrac{a^2\sqrt[4]{-\operatorname{tg} 2\alpha}}{\cos\alpha}$, при $a = 0{,}02044$ и $\alpha = 62°34'$;

б) $S = \dfrac{2}{3} h^2 \sin^3\alpha \cos\dfrac{\alpha}{2}(\sqrt{3} + 2\cos\alpha)$, при $h = 14{,}08$ и $\alpha = 50°36'$;

в) $x = \pi a^2\sqrt[3]{3 - 4\cos^2\alpha}$, при $a = 2{,}704$ и $\alpha = 27°40'$.

Указание. В примерах б) и в) выражения преобразовать к виду, удобному для логарифмирования.

ГЛАВА VIII

ОБРАТНЫЕ КРУГОВЫЕ ФУНКЦИИ

§ 35. Понятие об обратной функции к данной функции

Площадь круга в зависимости от его радиуса выражается функцией $S = \pi r^2$ или $y = \pi x^2 \approx 3{,}14\ x^2$.

На графике этой функции (рис. 110) видим, что при равномерном увеличении радиуса площадь круга возрастает неравномерно, а ускоренно.

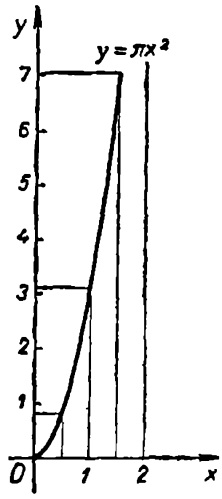


Рис. 110.

Если из данной функции выразить радиус в зависимости от площади круга, то получим новую функцию —

$$r = \sqrt{\frac{s}{\pi}} \text{ или } y = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \approx$$

$$\approx \sqrt{0{,}318\ x} \approx 0{,}564 \sqrt{x},$$

график которой изображен на рисунке 111.

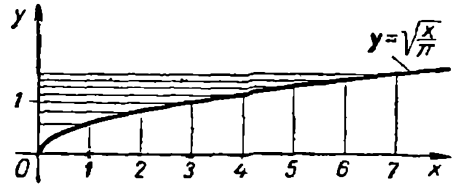


Рис. 111.

Видим, что при равномерном увеличении площади круга радиус возрастает неравномерно, а замедленно.

Функция $r = \sqrt{\frac{s}{\pi}}$ называется обратной к функции $s = \pi r^2$.

В практике приходится иметь дело с двумя взаимно обратными задачами:

1) по данным значениям аргумента находить соответствующие значения функции;

2) по данным значениям функции находить соответствующие значения аргумента; первую задачу называют прямой, а вторую — обратной.

Так, для функции $S = \frac{gt^2}{2}$ прямая задача состоит в отыскании отрезков пути S, проходимых свободно падающим телом в данные промежутки времени t; в обратной задаче находят промежутки времени t, за которое тело может пройти данные отрезки пути S.

Понятно, что при решении обратной задачи приходится переменную t выражать через переменную S в явном виде: $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$; полученное выражение называют обратной функцией к данной функции $y = \frac{gt^2}{2}$. Смысл этого названия ясен; переменные S и t меняются ролями.

В прямой задаче переменная S выражается через t, т. е. является функцией времени t; в обратной задаче переменная t определяется в зависимости от S, т. е. является функцией пути S.

Необходимость обращения функции вызывается потребностями практической деятельности людей. Так, например, функция $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$, обратная функции $S = \frac{gt^2}{2}$, используется весьма часто в физике, в механике, в артиллерии при изучении законов свободного падения тел.

Для функции $h = h_0(1 + \alpha t)$, где h_0 и α — const, обратная функция выразится равенством $t = \frac{h - h_0}{h_0 \alpha}$. В первой из них передана зависимость высоты h столбика ртути в термометре от температуры ртути t; эта зависимость используется при изготовлении шкалы термометра. В обратной функции выражена зависимость температуры t от высоты столбика ртути h; именно такая зависимость имеется в виду, когда судят о температуре t по высоте столбика ртути в термометре. Задача нахождения обратных функций для некоторых данных функций является весьма простой. Так, например, для функции $y = x^3$ обратной функцией будет $x = \sqrt[3]{y}$. Однако в большинстве слу-

чаев операция обращения функций весьма сложна, а иногда и вообще не может быть передана конечным числом алгебраических действий.

С такой трудностью приходилось встречаться в курсе алгебры при обращении показательной функции $y = 10^x$; зависимость x от y в этом случае Джон Непер (1550—1617) вынужден был передать условным значком: $x = \lg y$. Такого рода трудности нам придется преодолеть и при обращении круговых функций.

§ 36. Связь между графиками прямой и обратной функции

В математике принято обозначать аргумент прямой и обратной функции одной и той же буквой, обычно буквой x, а функцию, как прямую, так и обратную, буквой y. Это оказывается весьма удобным при построении графиков функций и использовании графиков при изучении характера изменения функций.

Процесс обращения данной функции $y=f(x)$ состоит из следующих двух шагов.

Прием 1:

1-й шаг. Выражают аргумент x в явном виде через y, получают новое соотношение $x = F(y)$.

2-й шаг. Меняют в этом соотношении x на y, а y на x и получают обратную функцию к данной в виде $y = F(x)$.

Прием 2:

1-й шаг. Меняют в данном соотношении x на y, а y на x и получают соотношение $x = f(y)$, в котором y является искомой обратной функцией, заданной неявно от x.

2-й шаг. Выражают обратную функцию y явно через x и получают соотношение $y = F(x)$.

Рассмотрим обращение данных функций первым и вторым приемами

Данная функция	Получение обратной функции к данной:			
	первым приемом		вторым приемом	
	1-й шаг: выражение x через y	2-й шаг: замена x на y и y на x	1-й шаг: замена x на y и y на x	2-й шаг: выражение y через x
1) $y = 2x + 1$	$x = \frac{y-1}{2}$	$y = \frac{x-1}{2}$	$x = 2y + 1$	$y = \frac{x-1}{2}$
2) $y = x^2$	$x = \pm\sqrt{y}$	$y = \pm\sqrt{x}$	$x = y^2$	$y = \pm\sqrt{x}$
3) $y = 10^x$	$x = \lg y$	$y = \lg x$	$x = 10^y$	$y = \lg x$
4) $y = f(x)$	$x = F(y)$	$y = F(x)$	$x = f(y)$	$y = F(x)$

Замечаем, что в обратных функциях совершаются операции, обратные тем операциям, которые осуществлялись над аргументом в прямых функциях.

При изучении функций, обратных к данным функциям, большую пользу оказывает следующая теорема.

Графики данной функции $y = f(x)$ и обратной ей функции $x = f(y)$ или $y = F(x)$ симметричны относительно биссектрисы I *и* III *координатных углов.*

Доказательство.

Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$ (рис. 112), а потому имеем $y_0 = f(x_0)$ (*)

Построим точку $M_1(x_1, y_1)$, симметричную точке M относительно биссектрисы координатного угла xOy. Из равенства треугольников MOC и M_1OC имеем:

$$OM = OM_1 \text{ и } \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2.$$

Но $\sphericalangle 4 = 45° - \sphericalangle 1$ и $\sphericalangle 3 = 45° - \sphericalangle 2$, следовательно, $\sphericalangle 4 = \sphericalangle 3$, а потому треугольники MOP и M_1OP_1 равны (по гипотенузе и острому углу).

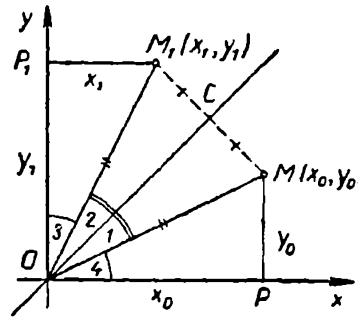


Рис. 112.

Из равенства этих треугольников получаем:

$$OP = OP_1 \text{ и } PM = P_1M_1, \text{ или } x_0 = y_1 \text{ и } y_0 = x_1.$$

Подставляя найденные значения x_0 и y_0 в равенство (*), получаем $x_1 = f(y_1)$.

А это значит, что точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на графике функции $x = f(y)$, обратной данной функции $y = f(x)$.

Так как точка $M(x_0, y_0)$ была взята произвольно, то выведенная нами связь справедлива для всех точек графиков прямой и ей обратной функции.

Доказанная теорема дает возможность получать график обратной функции зеркальным отражением графика прямой функции относительно биссектрисы I—III координатных углов. Таким зеркальным отражением получены на рисунке 113 графики прямых и обратных им функций, рассмотренных в начале этого параграфа.

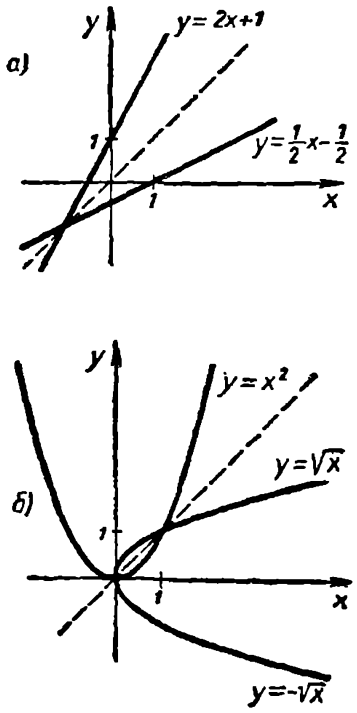


Рис. 113.

Быстрое развитие естествознания требовало дальнейшего развития математического аппарата, в частности теории обратных круговых функций. Швейцарский математик Даниил Бернулли (1700—1782), являвшийся академиком Петербургской Академии наук, в 1729 году рассматривал обратную функцию относительно $y = \sin x$, а немного позднее, в 1736 году, Леонард Эйлер рассматривает обратную функцию относительно $y = \operatorname{tg} z$; а дальше стали изучаться и остальные обратные круговые функции.

§ 37. Арксинус — функция, обратная синусу

1. Функция, обратная $y = \sin z$

Из определения синуса известно, что функцией $y = \sin z$ выражается ордината y той точки числовой окружности, которая соответствует данному числу z. Иначе говоря, знаком $\sin z$ коротко передается совокупность двух следующих операций:

1) отыскание на числовой окружности точки M, соответствующей данному числу z (или построение дуги $AM = z$ радиан) (рис. 114);

2) определение ординаты этой точки $PM = y$.

Найти функцию, обратную $y = \sin z$, это значит выразить z в зависимости от y; точнее: указать те операции, которые надо производить над данными значениями величины y, чтобы получать соответствующие им значения z. Нетрудно понять, что таких операций также две, а именно:

1) построение на оси Oy отрезка $OQ = y$ (рис. 115) и проведение через точку Q прямой, параллельной оси Ox, до пересечения с окружностью в точках M и M';

2) определение чисел z, соответствующих на числовой окружности точкам M и M' (т. е. нахождение радианной меры дуг AM и AM').

Оказывается, совокупность этих двух операций (так же, как и первых двух, определяющих синус) невозможно передать с помощью алгебраических действий над числом y, поэтому ее обозначили особым знаком «Arc sin y», после чего функцию, обратную $y = \sin z$, стали записывать равенством $z = \operatorname{Arcsin} y$, которое читается так: z равен арксинусу y.

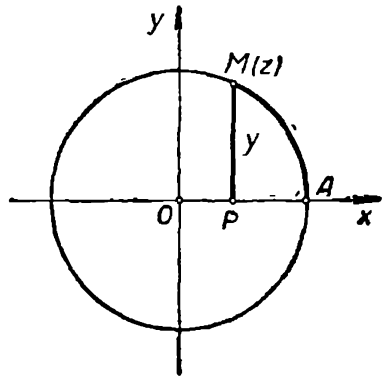


Рис. 114.

Оперативный знак Arc sin при числе y образован из двух частиц Arc и sin, которые являются сокращениями латинских слов: Arcus (аркус) — дуга ($\smile AM$; $\smile AM'$) и sinus — обозначающее полухорду ($MP = \frac{1}{2} MK$). Таким образом, запись

$$z = \operatorname{Arc}\sin y$$

означает, что z есть дуга, синус которой равен y. Это вполне соответствует определению функции $y = \sin z$, если ее аргументом считать дугу z. Если же аргументом синуса является отвлеченное число z, то запись $z = \operatorname{Arc}\sin y$ означает, что z есть такое число, синус которого равен числу y.

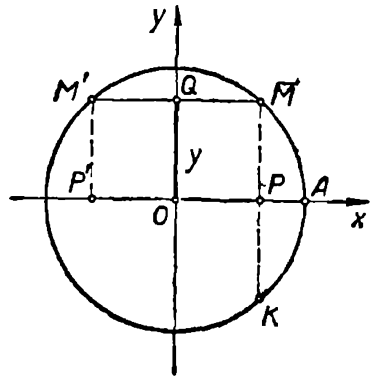


Рис. 115.

Обозначим аргументы синуса и арксинуса буквой x, а сами функции буквой y, будем иметь:

$$y = \sin x \text{ (прямая функция);}$$

$$y = \operatorname{Arc}\sin x \text{ (обратная функция).}$$

Итак, $y = \operatorname{Arc}\sin x$ есть функция, обратная синусу; эта функция принимает такие значения, синус которых равен x, т. е. $\sin y = x$ или $\sin(\operatorname{Arc}\sin x) \equiv x$.

Короче: *арксинусом действительного числа x, принадлежащего промежутку $[-1; +1]$, называют такое число (и дугу), синус которого (которой) равен x.*

В этом определении указывается, что аргументу x в функции $y = \operatorname{Arc}\sin x$ можно давать только такие значения,

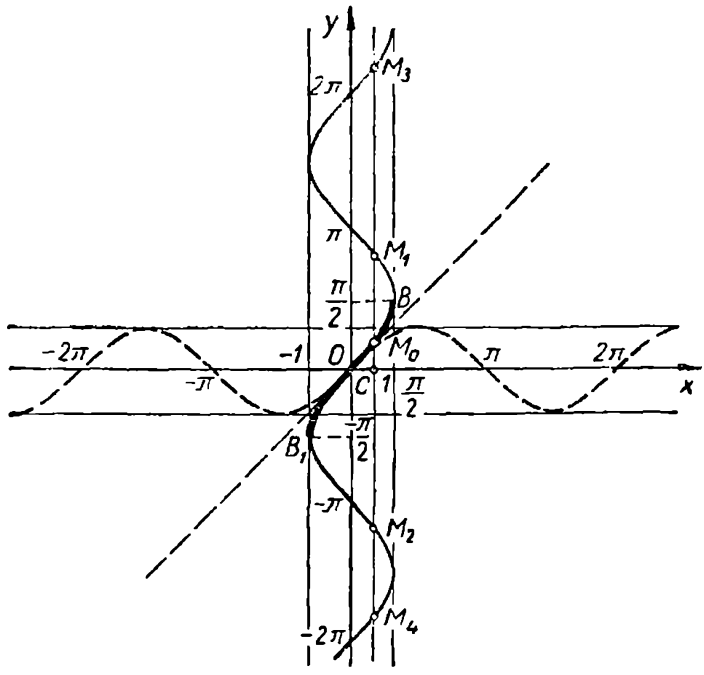


Рис. 116.

которые принимает синус, т. е. $-1 \leqslant x \leqslant +1$; при других значениях x эта функция не имеет смысла в области действительных чисел.

2. График $\operatorname{Arc}\sin x$ и выделение главного значения $\operatorname{Arc}\sin x$

На основании теоремы о графиках прямой и обратной функции (см. § 36) график функции $y = \operatorname{Arc}\sin x$ можно получить зеркальным отражением синусоиды $y = \sin x$ относительно биссектрисы координатных углов *I* и *III*, как это сделано на рисунке 116.

На графике легко усматриваются некоторые свойства функции $y = \operatorname{Arc}\sin x$ и прежде всего то, что эта функция многозначная (и даже имеет бесконечное множество значений).

В самом деле, возьмем на оси абсцисс какую-нибудь точку $x = c$ и проведем через нее прямую, параллельную оси Oy. Если $|c| \leqslant 1$, то эта прямая пересечет график арксинуса в бесконечном множестве точек M_0, M_1, M_2, ..., а ординаты этих точек y_0, y_1, y_2, ... будут значениями функции $y = \operatorname{Arc}\sin x$ при $x = c$, т. е.

$$\operatorname{Arc}\sin c = y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots$$

В многозначности функции, обратной синусу, можно убедиться и непосредственно на числовой окружности. С этой целью примем прежние обозначения для синуса

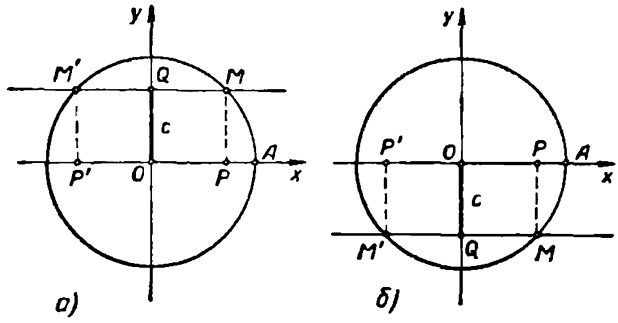


Рис. 117.

и его аргумента: $y = \sin z$, тогда обратная функция запишется равенством: $z = \operatorname{Arc}\sin y$. Положим, $y = c$, где $|c| \leqslant 1$, и выполним на числовой окружности (рис. 117) те операции, которые обозначены знаком «$\operatorname{Arc}\sin y$» (см. пункт 1 данного параграфа), а именно:

1) На оси Oy откладываем отрезок $OQ = y = c$ (на рисуике 117,*а* $c > 0$, 117,*б* $c < 0$) и проводим через точку Q прямую, параллельную оси Ox; эта прямая пересечет окружность в точках M и M', так как ее расстояние от центра окружности не больше радиуса ($R = 1$).

2) Определяем числа z, соответствующие точкам M и M'.

Пусть $AM = z_0$ радиан — кратчайшая из всех дуг, оканчивающихся в точке M, тогда дуга $AM' = (\pi - z_0)$ радиан. Прибавляя к числам z_0 и $\pi - z_0$ по $2\pi k$, где k —

произвольное целое, получим все числа, соответствующие точкам M и M', а именно:
точке M соответствуют числа $z_0 + 2k\pi$,
точке M' » » $-z_0 + (2k+1)\pi$;
все эти числа можно записывать одной формулой:

$$z = (-1)^n z_0 + \pi n, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Действительно, если $n = 2k$ — четное, то

$$z = (-1)^{2k} z_0 + \pi\, 2k = z_0 + 2\pi k,$$

если же $n = 2k+1$ — нечетное, то

$$z = (-1)^{2k+1} z_0 + (2k+1)\pi = -z_0 + (2k+1)\pi.$$

Итак, мы нашли бесконечное множество чисел z, синусы которых равны c. Действительно, если какое-либо из чисел z изображается в точке M, то $\sin z = PM = c$, а если в точке M', то $\sin z = P'M' = c$; как видим, в обоих случаях $\sin z = c$, следовательно, по определению арксинуса имеем:

$$z = \operatorname{Arc}\sin c, \text{ т. е.}$$

$$\operatorname{Arc}\sin c = (-1)^n z_0 + \pi n, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad (46)$$

Давая параметру n значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, мы получим всевозможные значения арксинуса:

$$\operatorname{Arc}\sin c = \begin{cases} z_0,\ z_0 \pm 2\pi,\ z_0 \pm 4\pi,\ z_0 \pm 6\pi, \ldots \\ -z_0 \pm \pi,\ -z_0 \pm 3\pi,\ -z_0 \pm 5\pi, \ldots \end{cases}$$

Только одно из этих значений z_0 принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; его называют главным значением $\operatorname{Arc}\sin c$ и обозначают через $\operatorname{arc}\sin c$ (прежний знак, но с малой буквой «а»); через него выражаются все остальные значения арксинуса формулой (46). Положив в этой формуле $z_0 = \operatorname{arc}\sin c$, получим:

$$\operatorname{Arc}\sin c = (-1)^n \operatorname{arc}\sin c + \pi n, \quad (46а)$$

где n — произвольное целое число и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc}\sin c \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Пример. Найдем значения функции $\operatorname{Arc}\sin x$ при $x = -\frac{1}{2}$.

По формуле (46 а) имеем:

$$\operatorname{Arc}\sin\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)^n \operatorname{arc}\sin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,$$

где $\operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{1}{2}\right)=z_0$ — есть такое число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $-\frac{1}{2}$. Таким числом, очевидно, будет $-\frac{\pi}{6}$, поэтому получим:

$$\operatorname{Arc\,sin}\left(-\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

где $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$

3. Функция $y=\operatorname{arc\,sin} x$

Мы установили, что при всяком допустимом значении аргумента x функция $\operatorname{Ars\,sin} x$ принимает бесконечное множество значений, из которых одно принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и называется главным значением арксинуса.

Если при любом значении аргумента x брать только главное значение $\operatorname{Ars\,sin} x$, т. е. то, которое принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, то мы получим однозначную функцию, которую обозначают через $\operatorname{arc\,sin} x$ и называют главным значением функции $\operatorname{Arc\,sin} x$.

Итак, $\operatorname{arc\,sin}\ x$, *где* x *— любое число на отрезке* $[-1;\ +1]$, *есть такое число* (*или дуга*) *в промежутке* $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$, *синус которого* (*которой*) *равен* x.

Короче:

$$\left.\begin{array}{c}-\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{asc\,sin} x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ \sin(\operatorname{ars\,sin} x)\equiv x\end{array}\right\} \qquad (47)$$

Например, $\operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$, так как $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, причем число $\frac{\pi}{3}$ лежит в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Основные свойства функции $y=\operatorname{arc\,sin} x$

По определению $-\frac{\pi}{2}\leqslant\operatorname{arc\,sin} x\leqslant\frac{\pi}{2}$, следовательно, взяв на оси Oy (рис. 116) отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, мы выделим на графике функции $y=\operatorname{Arc\,sin} x$ ту дугу B_1OB, которая и будет графиком функции $y=\operatorname{arc\,sin} x$.

Рассматривая этот график (на рисунке он выделен жирной линией), можно обнаружить важнейшие свойства $\arcsin x$:

1) Выше установлено (см. п. 2), что через $\arcsin x$ выражаются все значения функции $\operatorname{Arc}\sin x$ формулой:

$$\operatorname{Arc}\sin x = (-1)^n \arcsin x + \pi n, \qquad (46а)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

Так на рисунке 116 для значения $x = OC \approx 0{,}68$ имеем:

$$\operatorname{Arc}\sin x = \begin{cases} CM_0 = (-1)^0 \arcsin x + \pi \cdot 0 \approx 0{,}68 \\ CM_1 = (-1)^1 \arcsin x + \pi \cdot 1 \approx -0{,}68 + \\ \qquad +3{,}14 = 2{,}46 \\ CM_2 = -1^{-1} \arcsin x + \pi(-1) \approx -0{,}68 - \\ \qquad -3{,}14 = -3{,}82 \\ CM_3 = (-1)^2 \arcsin x + \pi \cdot 2 \approx 0{,}68 + 6{,}28 = \\ \qquad = 6{,}96 \text{ и т. д.} \end{cases}$$

2) Всякая прямая, параллельная оси Oy и отстоящая от нее на расстоянии $|c| \leqslant 1$, пересекает кривую B_1OB только в одной точке; это подтверждает наглядно однозначность функции $y = \arcsin x$.

3) На графике видим, что $\arcsin x$ — функция монотонно возрастающая; с изменением аргумента x от -1 до $+1$ $\arcsin x$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

4) Симметрия кривой B_1OB относительно начала координат свидетельствует о нечетности функции $\arcsin x$, т. е.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \qquad (48)$$

В справедливости этого можно убедиться также и на основании определения функции.

В самом деле, положим $\arcsin(-x) = y$, тогда по определению (47) имеем:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\sin y = -x.$$

Умножив на -1 каждое из этих соотношений, получаем:

$$\frac{\pi}{2} \geqslant -y \geqslant -\frac{\pi}{2} \text{ и } -\sin y = x$$

или $\sin(-y) = x$, следовательно, $-y = \arcsin x$, откуда $y = -\arcsin x$.

Подставив это значение y в исходное равенство, получаем соотношение (48).

Пример. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$.

Рассмотренные нами свойства $\arcsin x$ можно установить и на числовой окружности (рис. 118,*а*), но при этом удобнее арксинус обозначить буквой z, а его аргумент — буквой y, т. е. писать: $z = \arcsin y$. По определению (47) эта запись эквивалентна следующей: $y = \sin z$, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Проследим, например, как изменяется радианная мера z дуги AM при изменении y — ординаты точки M.

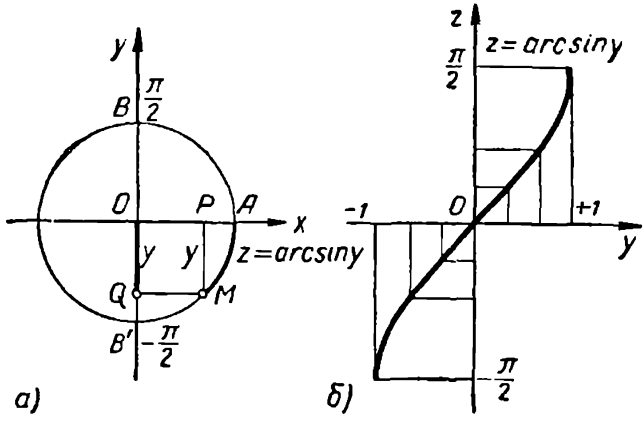


Рис. 118.

Пусть Q — проекция точки M на ось Oy и, следовательно, $OQ = PM = y$.

Пока Q поднимается по оси y от B' до B, точка M описывает полуокружность $B'AB$, а дуга AM изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. А это значит, что с изменением $y = OQ$ от -1 до $+1$ функция $z = \arcsin y$ возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Нетрудно заметить, что равномерному движению точки Q на оси y соответствует на окружности неравномерное движение точки $M(z)$ по закону: $z = \arcsin y$. Это показано и на рисунке 118,*б*, где y изменяется равномерно от -1 до $+1$, а z при этом изменяется неравномерно.

Еще проще на числовой окружности доказать нечетность функции $z = \arcsin y$.

Рекомендуем читателям сделать это самим.

5. Сравнение процессов, выражаемых функциями $s = \sin t$ и $s = \arcsin t$

В § 6 и 22 мы рассматривали механизм, на котором происходило преобразование вращательного движения в прямолинейное, что схематически передавалось на рисунке 14.

Именно: колесо вместе с пальцем M вращалось, а рамка, увлекаемая пальцем M, двигалась прямолинейно вверх и вниз, а вместе с ней прямолинейно двигался шток BE. Рассмотрим две закономерности наблюдаемого движения:

I

Пусть колесо вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 1 \frac{\text{радиан}}{\text{сек}}$, тогда шток (любая его точка) будет двигаться прямолинейно неравномерно по закону

$S = OQ = MP = y = \sin t$,

что передано наглядно на графике (рис. 119);

а) вращение колеса равномерное;

б) шток движется прямолинейно неравномерно — сначала замедленно, когда t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а потом ускоренно, когда t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до π.

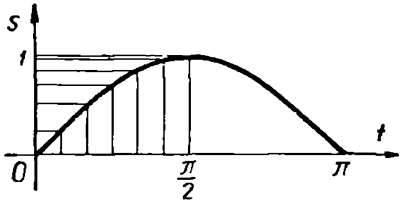


Рис. 119.

II

Пусть шток движется прямолинейно равномерно со скоростью $y = 1 \frac{R}{\text{сек}}$, тогда обод колеса будет вращаться неравномерно по закону

$S = MA = z = \arcsin t$,

что на графике выражается наглядно (рис. 120):

а) движение штока равномерное прямолинейное;

б) вращение обода неравномерное — сперва замедленное, когда t изменяется от -1 до 0, а потом ускоренно, когда t изменяется от 0 до 1.

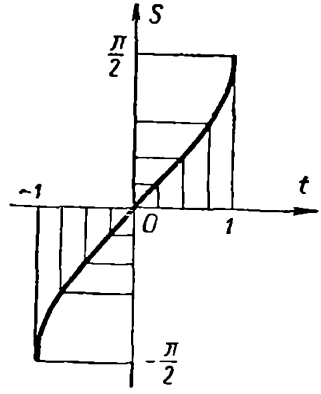


Рис. 120.

§ 38. Арккосинус — функция, обратная косинусу

1. Функция, обратная $y = \cos x$

Из равенства $y = \cos x$ нельзя выразить переменную x в явном виде через y с помощью алгебраических операций, поэтому приходится так же, как и при обращении синуса, удовлетворяться условной записью такого выражения

$$x = \operatorname{Arc}\cos y,$$

которую читают так: *x равен арккосинусу y*, или, подробнее: *x есть число, косинус которого равен y.*

Поменяв местами буквы x и y, получают запись функции, обратной косинусу:

$$y = \operatorname{Arc}\cos x.$$

При такой записи буквой y выражается число, косинус которого равен x, т. е.

$$\cos y = x, \text{ или } \cos(\operatorname{Arc}\cos x) \equiv x.$$

Итак, *арккосинусом действительного числа x, принадлежащего промежутку $[-1; +1]$, называют такое число (или дугу), косинус которого (которой) равен x.*

Понятно, что функция $y = \operatorname{Arc}\cos x$ определена только в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant +1$ потому, что все значения косинуса принадлежат этому промежутку.

2. График $\operatorname{Arc}\cos x$ и выделение главного значения $\operatorname{Arc}\cos x$

В соответствии с теоремой о графиках прямой и обратной функций (§ 36) график функции $y = \operatorname{Arc}\cos x$ получается зеркальным отражением косинусоиды $y = \cos x$ относительно биссектрисы I и III координатных углов, как это показано на рисунке 121. На графике легко усматриваются некоторые свойства функции $y = \operatorname{Arc}\cos x$ и прежде всего то, что эта функция многозначная.

В самом деле, возьмем на оси абсцисс какую-либо точку $x = c$ ($|c| \leqslant 1$) и проведем через нее прямую параллельно оси Oy. Эта прямая пересечет график арккосинуса в бесконечном множестве точек M_0, M_1, M_2, ..., ординаты которых y_0, y_1, y_2... будут значениями функции $y = \operatorname{Arc}\cos x$ при $x = c$, т. е.

$$\operatorname{Arc}\cos c = y_0,\ y_1,\ y_2 \ldots .$$

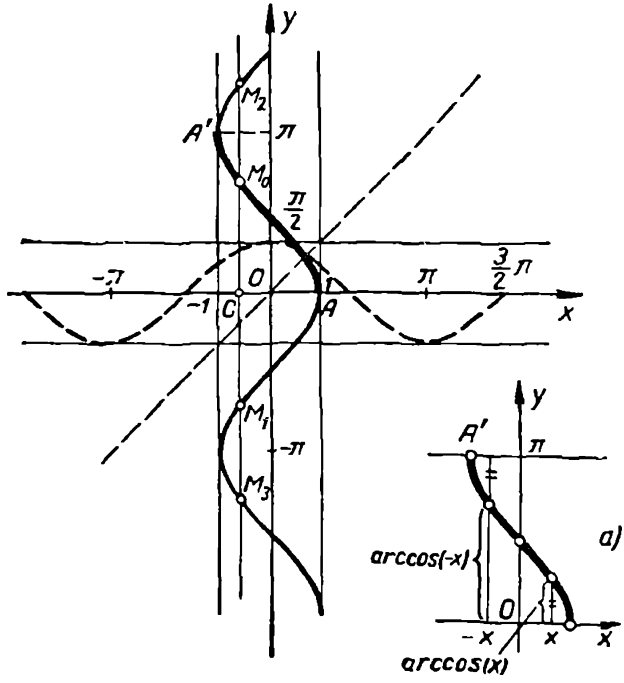


Рис. 121.

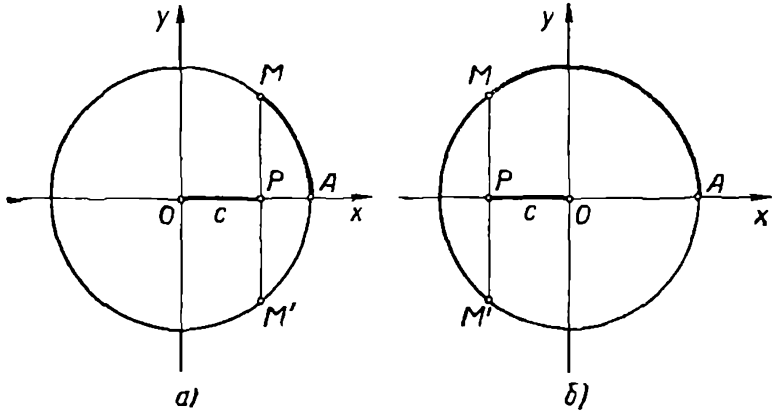


Рис. 122.

В многозначности функции, обратной косинусу, можно убедиться и непосредственно на числовой окружности (рис. 122). С этой целью вернемся к прежним обозначениям косинуса и его аргумента:

$x = \cos z$, тогда обратная функция запишется равенством: $z = \operatorname{Arc}\cos x$. Отложим на оси Ox (рис. 122) отрезок $OP = x = c\ (|c| \leqslant 1)$ и проведем через точку P прямую, перпендикулярную оси Ox, до встречи ее с окружностью в точках M и M' [на рис. 122,*а*) $c > 0$, на рис. 122,*б*) $c < 0$]; если $|c| = 1$, то точки M и M' сольются. Найдем числа z, соответствующие точкам M и M'.

Пусть $AM = z_0$ радиан — кратчайшая из всех дуг, оканчивающихся в точке M, тогда дуга $AM' = -z_0$ радиан. Прибавим к числам z_0 и $-z_0$ по $2\pi k$, где k — произвольное целое, получим все числа, соответствующие точкам M и M', а именно:

точке M соответствуют числа $z_0 + 2\pi k$,

точке M' » » $-z_0 + 2\pi k$;

все эти числа можно записать и одной формулой:

$$z = \pm z_0 + 2\pi k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Итак, мы нашли бесконечное множество чисел z, косинусы которых равны c. Действительно, по определению косинуса для всякого числа z, изображающегося в точке M или M', имеем: $\cos z = OP = c$, следовательно, по определению арккосинуса можно записать:

$$z = \operatorname{Arc}\cos c, \text{ т. е.}$$

$$\operatorname{Arc}\cos c = \pm z_0 + 2\pi k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \quad (49)$$

Давая параметру k значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, мы найдем всевозможные значения арккосинуса:

$$\operatorname{Arc}\cos c = \begin{cases} z_0, & z_0 + 2\pi, & z_0 + 4\pi, \ldots \\ -z_0, & -z_0 + 2\pi, & -z_0 + 4\pi \ldots \end{cases}$$

Одно и только одно из этих значений z_0 принадлежит промежутку $[0; \pi]$, его называют главным значением $\operatorname{Arc}\cos c$ и обозначают через $\arccos c$ (прежний знак, но с малой буквой «а»), через него выражаются все остальные значения арккосинуса формулой (49). Положив в этой формуле $z_0 = \arccos c$, будем иметь:

$$\operatorname{Arc}\cos c = \pm \arccos c + 2\pi k, \quad (49\,а)$$

где k — произвольное целое число и $0 \leqslant \arccos c \leqslant \pi$.

Пример. Найдем значения функции $\operatorname{Arc}\cos x$ при $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

По формуле (49 а) имеем:

$$\operatorname{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k,$$

где $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = z_0$ — есть число в промежутке $[0; \pi]$, косинус которого равен $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Таким числом, очевидно, будет $\frac{3}{4}\pi$, так как $\frac{3}{4}\pi$ лежит в промежутке $[0; \pi]$ и $\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; следовательно,

$$\operatorname{Arc}\cos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi k, \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

3. Функция $y = \arccos x$

Мы установили, что при всяком допустимом значении x функция $\operatorname{Arc}\cos x$ принимает бесконечное множество значений, из которых одно принадлежит промежутку $[0; \pi]$, и называется главным значением.

Если при любом значении аргумента x брать только главное значение функции $\operatorname{Arc}\cos x$, принадлежащее промежутку $[0; \pi]$, то придем к однозначной функции, которую обозначают через $\arccos x$ и называют главным значением $\operatorname{Arc}\cos x$.

Итак даем определение:

$\arccos x$, где x любое число на отрезке $[-1; +1]$, есть такое число (или дуга) из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого (которой) равен x;

иначе:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \\ \cos(\arccos x) \equiv x \end{array}\right\} \qquad (50)$$

4. Основные свойства функции $y = \arccos x$

1) Все значения функции $\operatorname{Arc}\cos x$ связаны с главным ее значением равенством:

$$\operatorname{Arc}\cos x = \pm \arccos x + 2\pi k \ (k \text{ — целое}). \qquad (49\,б)$$

Так, на рисунке 121 для значения $x = OC \approx -0{,}63$ имеем:

$$\operatorname{Arc}\cos x = \begin{cases} CM_0 = \operatorname{arc}\cos x \approx 2{,}25 \\ CM_1 = -\operatorname{arc}\cos x \approx -2{,}25 \\ CM_2 = -\operatorname{arc}\cos x + 2 \cdot 1 \cdot \pi \approx -2{,}25 + 6{,}28 = 4{,}03 \\ CM_3 = \operatorname{arc}\cos x + 2(-1)\pi \approx 2{,}25 - 6{,}28 = -4{,}03 \text{ и т. д.} \end{cases}$$

2) По определению функции $y = \operatorname{arc}\cos x$ имеем $0 \leqslant y \leqslant \pi$, поэтому, взяв на оси Oy отрезок $[0; \pi]$, мы выделим на графике $\operatorname{Arc}\cos x$ ту дугу AA', которая и будет графиком функции $y = \operatorname{arc}\cos x$. Рассматривая этот график (на рисунке он выделен жирной линией), замечаем, что функция $\operatorname{arc}\cos x$ принимает только неотрицательные значения, а именно, с изменением аргумента x от -1 до $+1$ $\operatorname{arc}\cos x$ монотонно убывает от π до 0.

3) График функции $y = \operatorname{arc}\cos x$ не симметричен ни относительно оси Oy, ни относительно начала координат, а потому эта функция не принадлежит к классу четных и нечетных функций. Что же касается симметрии графика $\operatorname{arc}\cos x$ относительно точки $\frac{\pi}{2}$ на оси Oy, то она подсказывает нам следующее интересное свойство этой функции:

$$\operatorname{arc}\cos(-x) + \operatorname{arc}\cos x = \pi,$$

или

$$\operatorname{arc}\cos(-x) = \pi - \operatorname{arc}\cos x. \qquad (51)$$

В самом деле, как легко видеть на графике (см. рис. 121, *а*) что у точек M и M' с абсциссами x и $-x$ ординаты $\operatorname{arc}\cos x$ и $\operatorname{arc}\cos(-x)$ дают в сумме π.

В справедливости этого свойства $\operatorname{arc}\cos x$ можно убедиться и другим путем. Действительно, примем обозначение $\operatorname{arc}\cos(-x) = y$, тогда по определению имеем:

$$-x = \cos y \text{ и } 0 \leqslant y \leqslant \pi,$$

откуда $x = -\cos y = \cos(\pi - y)$ и $0 \leqslant \pi - y \leqslant \pi$.

Обращая соотношение $x = \cos(\pi - y)$, получим:

$$\pi - y = \operatorname{arc}\cos x,$$

откуда $\pi = y + \operatorname{arc}\cos x = \operatorname{arc}\cos(-x) + \operatorname{arc}\cos x$.

Это свойство облегчает нахождение значения арккосинуса для отрицательного аргумента.

Пример. Найти $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Р е ш е н и е. По формуле (49 б) имеем:

$$\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k.$$

Но по формуле (51) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$, следовательно, $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$ (k — целое число).

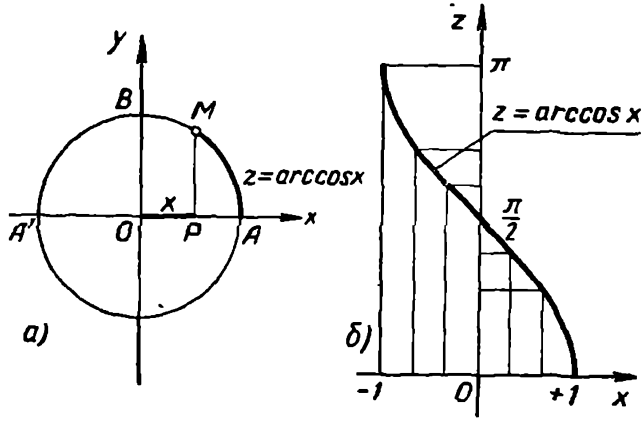


Рис. 123.

Примечание. Рассмотренные нами свойства $\arccos x$ можно обнаружить и на числовой окружности (рис. 123, *а*) Проследим, например, как изменяется z — радианная мера дуги AM — при изменении абсциссы точки M, т е. отрезка $OP = x = \cos z$.

Пусть точка P движется по оси Ox от A' к A, тогда точка M будет двигаться по верхней полуокружности $A'BA$ от A' к A. Это показывает, что с возрастанием x от -1 до $+1$ функция $z = \arccos x$ убывает от π до 0. Понятно, что при равномерном движении точки P по оси Ox точка M будет совершать неравномерное движение по полуокружности $A'BA$ по закону $\smile AM = z = \arccos x$, что видно и на графике (рис. 123, *б*).

§ 39. Арктангенс — функция, обратная тангенсу

1. Функция, обратная $y = \operatorname{tg} x$

При обращении функции $y = \operatorname{tg} x$ приходится также удовлетвориться условной записью

$$x = \operatorname{Arctg} y,$$

так как с помощью алгебраических операций невозможно выразить x через y. Эта запись означает, что x есть число (дуга), тангенс которого (которой) равен y, а читается так: x равен арктангенсу y.

Поменяем местами буквы x и y, получим следующую запись функции, обратной тангенсу:

$$y = \operatorname{Arctg} x.$$

При такой записи буквой y выражается число, тангенс которого равен x, т. е.

$$\operatorname{tg} y = x \text{ или } \operatorname{tg}(\operatorname{Arctg} x) \equiv x.$$

Итак, *арктангенсом любого действительного числа x называют число (или дугу), тангенс которого (которой) равен x.*

Функция $y = \operatorname{Arctg} x$ определена при любом действительном значении x, так как тангенс принимает всевозможные действительные значения.

2. График $\operatorname{Arctg} x$ и выделение главного значения $\operatorname{Arctg} x$

График функции $y = \operatorname{Arctg} x$ получается зеркальным отражением тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 124) относительно биссектрисы I и III координатных углов (см. теорему § 36). Так же, как и тангенсоида, график $y = \operatorname{Arctg} x$ состоит из бесконечного множества отдельных ветвей. Любая прямая, перпендикулярная оси Ox, пересекает каждую из ветвей графика, следовательно, функция $y = \operatorname{Arctg} x$ многозначная; при любом значении x она принимает бесконечное множество значений: $y_0, y_1, y_2, \ldots$.

В многозначности арктангенса можно убедиться и непосредственно на числовой окружности (рис. 125), только при этом удобнее пользоваться прежними обозначениями тангенса и его аргумента: $y = \operatorname{tg} z$, тогда $z = \operatorname{Arctg} y$.

Отложим на касательной отрезок $AT = y = c$ [на рис. 125, *а*) $c > 0$, на рис. 125, *б*) $c < 0$] и проведем прямую

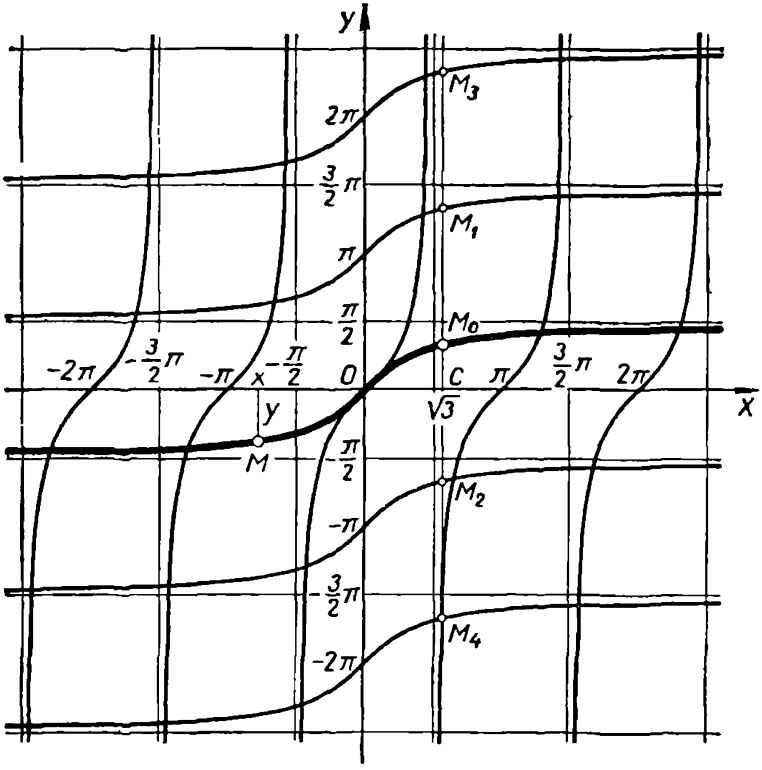


Рис. 124.

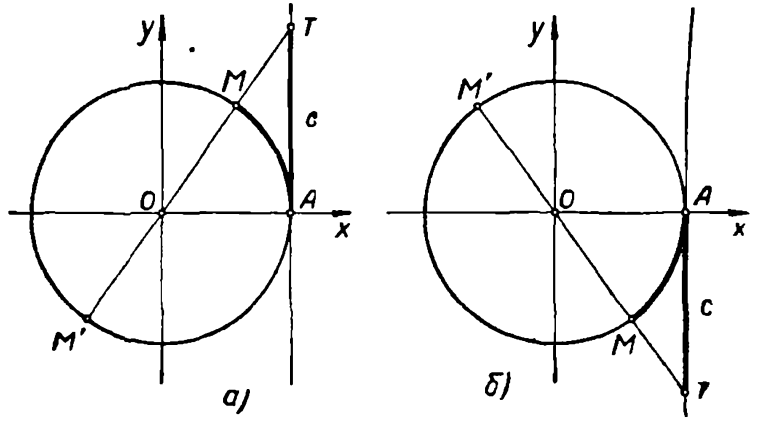


Рис. 125.

OT до встречи с окружностью в точках M и M'. Найдем числа z, соответствующие точкам M и M'.

Пусть $AM = z_0$ радиан — кратчайшая из дуг, оканчивающихся в точке M, тогда дуга $AM' = z_0 + \pi$ радиан. Прибавим к числам z_0 и $z_0 + \pi$ по $2\pi k$ (k — произвольное целое), получим все числа, соответствующие точкам MM', а именно:

точке M соответствуют числа $z_0 + 2\pi k$;
точке M' соответствуют числа $z_0 + \pi + 2\pi k = z_0 + (2k + 1)\pi$.

Очевидно, все эти числа можно записать одной формулой:

$$z = z_0 + \pi n, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Итак, мы нашли бесконечное множество чисел z, тангенсы которых равны c. Действительно, по определению тангенса для любого из чисел z, изображенных в точке M или M', имеем: $\operatorname{tg} z = AT = c$, следовательно, по определению арктангенса можно записать:

$$z = \operatorname{Arctg} c, \text{ т. е.}$$

$$\operatorname{Arc\,tg} c = z_0 + \pi n, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \qquad (52)$$

Давая параметру n значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, будем получать всевозможные значения арктангенса:

$$\operatorname{Arc\,tg} c = z_0, \quad z_0 + \pi, \quad z_0 - \pi, \quad z_0 + 2\pi, \quad z_0 - 2\pi, \ldots,$$

но только одно из этих значений z_0 находится в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; его называют главным значением $\operatorname{Arctg} c$ и обозначают через $\operatorname{arc\,tg} c$ (прежний знак, но с маленькой буквой «а»); через него выражаются по формуле (52) все значения арктангенса. Положив в этой формуле $z_0 = \operatorname{arc\,tg} c$, будем иметь:

$$\operatorname{Arctg} c = \operatorname{arctg} c + \pi n, \qquad (52\,\text{а})$$

где n — произвольное целое число и $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} c < \frac{\pi}{2}$.

Найдем, например, значение функции $\operatorname{Arctg} x$, при $x = \sqrt{3}$. По формуле (52 а) имеем

$$\operatorname{Arctg} \sqrt{3} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n;$$

но $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ и число $\frac{\pi}{3}$ принадлежит промежутку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; следовательно, $\operatorname{Arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}+\pi n$, где n — произвольное целое число.

На рисунке 124 значения $\operatorname{Arctg} x$ при $x=\sqrt{3}$ переданы ординатами точек M_0, M_1, M_2, ..., в которых график арктангенса пересекается перпендикуляром к оси Ox, проведенным через точку C с абсциссой $x=\sqrt{3}$, а именно:

$$CM_0=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},\quad CM_1=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi;$$

$$CM_2=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2}{3}\pi,\ CM_3=\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7}{3}\pi,$$

$$CM_4=\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5}{6}\pi \text{ и т. д.}$$

3. Функция $y=\operatorname{arctg} x$ и ее свойства

Мы установили выше, что при всяком значении x функция $\operatorname{Arctg} x$ принимает бесконечное множество значений, из которых одно принадлежит промежутку $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ и называется главным значением.

Если при любом значении аргумента x брать только главное значение $\operatorname{Arctg} x$, то мы придем к однозначной функции, которую обозначают через $\operatorname{arctg} x$ и называют главным значением функции $y=\operatorname{Arctg} x$.

Итак, даем определение:

$\operatorname{arctg} x$ есть такое число (или дуга) в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого (которой) равен x;

иначе:

$$\left.\begin{aligned} -\tfrac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\tfrac{\pi}{2}\\ \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\equiv x\end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

Установленная выше формула (52 а) показывает, что функция $\operatorname{arctg} x$ связана с $\operatorname{Arctg} x$ соотношением:

$$\operatorname{Arctg} x=\operatorname{arctg} x+\pi n, \qquad (52\ а')$$

где $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$

Графиком функции $y = \operatorname{arctg} x$ будет служить та ветвь графика $\operatorname{Arctg} x$ (рис. 124), которая заключена между прямыми, параллельными оси Ox и отсекающими на оси ординат отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (на рисунке эта ветвь выделена жирной линией).

На графике можно обнаружить важные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$, а именно: 1) однозначность, 2) монотонность возрастания от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и 3) нечетность.

Действительно:

1) любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, пересекает кривую $y = \operatorname{arctg} x$ только в одной точке;

2) при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ кривая $y = \operatorname{arctg} x$ плавно поднимается вверх так, что ордината y текущей точки изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, не принимая этих крайних значений;

3) нечетность функции $y = \operatorname{arctg} x$ следует из симметрии ее графика относительно начала координат.

В нечетности $\operatorname{arctg} x$ можно убедиться и другим путем. В самом деле, положим $\operatorname{arc\,tg}(-x) = y$, тогда по определению имеем:

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ и } -x = \operatorname{tg} y.$$

Умножим на -1 эти соотношения, получим:

$$\frac{\pi}{2} > -y > -\frac{\pi}{2} \text{ и } x = -\operatorname{tg} y$$

$$\text{или } -\frac{\pi}{2} < -y < \frac{\pi}{2} \text{ и } x = \operatorname{tg}(-y);$$

отсюда по определению главного значения арктангенса имеем:

$$-y = \operatorname{arctg} x, \text{ или } y = -\operatorname{arctg} x.$$

Итак,

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \tag{54}$$

т. е. $\operatorname{arctg} x$ есть нечетная функция.

Пример. $\operatorname{arc\,tg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

В качестве упражнения рекомендуем читателям доказать установленные выше свойства $\operatorname{arctg} x$ непосредственно на числовой окружности аналогично тому, как это мы делали для $\arcsin x$ и $\arccos x$.

§ 40. Арккотангенс — функция, обратная котангенсу

1. Функция, обратная $y = \operatorname{ctg} x$

Рассуждая так же, как и при обращении других круговых функций, приходим к равенству $y = \operatorname{Arcctg} x$, выражающему обратную функцию для котангенса.

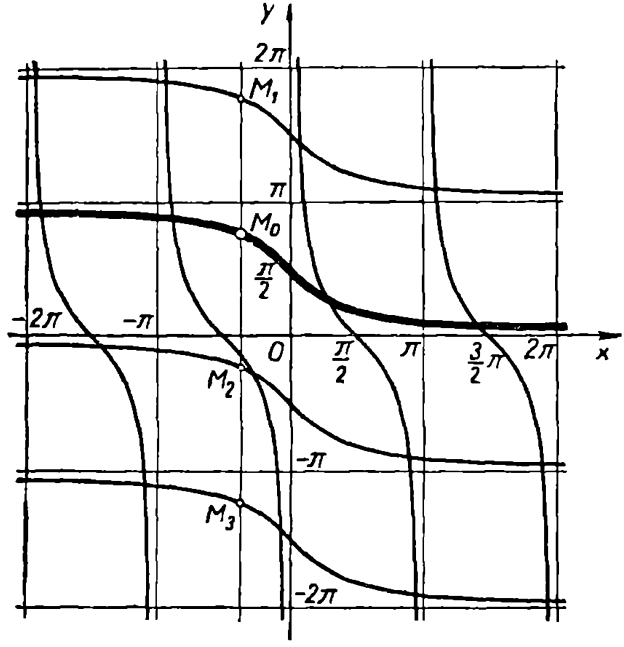


Рис. 126.

Определение. $y = \operatorname{Arcctg} x$ — *есть функция, обратная котангенсу, эта функция принимает такие значения, котангенс которых равен* x, *т. е.* $\operatorname{ctg} y = x$ или $\operatorname{ctg}(\operatorname{Arcctg} x) \equiv x$.

Определена эта функция при всех значениях x, так как котангенс принимает всевозможные действительные значения.

2. График Arcctg x и выделение главного значения Arcctg x

График $\operatorname{Arcctg} x$ (как и других аркфункций) получаем отражением котангенсоиды $y = \operatorname{ctg} x$ относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 126). Всякая прямая, параллельная оси Oy, пересекает этот гра-

фик в бесконечном множестве точек M_0, M_1, M_2, ..., ординаты которых y_0, y_1, y_2, ... являются значениями арккотангенса. Таким образом, арккотангенс, как и другие аркфункции, есть функция бесконечнозначная.

Убедиться в многозначности арккотангенса можно и на числовой окружности (рис. 127), только удобнее при этом пользоваться прежними обозначениями котангенса и его аргумента: $x = \operatorname{ctg} z$, тогда $z = \operatorname{Arcctg} x$.

Отложим на касательной отрезок $BK = x = c$ [(на рис. 127, *а*) $c > 0$, на рис. 127 *б*) $c < 0$)] и проведем прямую OK до встречи с окружностью в точках M и M'. Найдем числа z, соответствующие точкам M и M'.

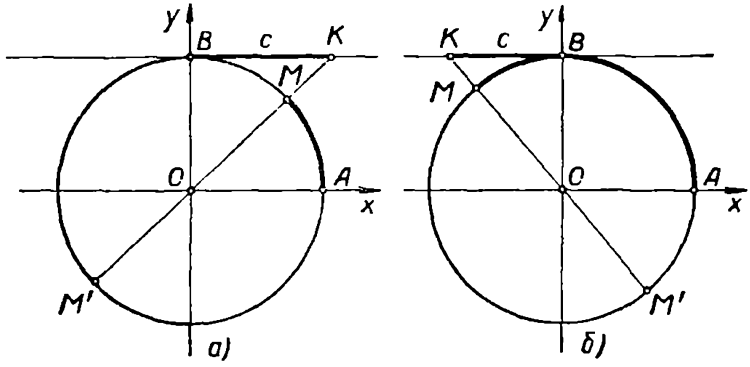


Рис. 127.

Пусть $AM = z_0$ радиан — кратчайшая из дуг, оканчивающихся в точке M тогда дуга $AM' = (z_0 + \pi)$ радиан. Прибавим к числам z_0 и $z_0 + \pi$ по $2\pi k$ (k — произвольное целое), получим все числа, соответствующие точкам M и M', а именно:

точке M соответствуют числа $z_0 + 2\pi k$,

точке M' » » $(z_0 + \pi) + 2\pi k = z_0 + (2k + 1)\pi$.

Все эти числа можно записать одной формулой:

$$z = z_0 + \pi n, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Итак, мы нашли бесконечное множество чисел z, котангенсы которых равны c. Действительно, по определению котангенса для любого из чисел z, изображенных

в точках M и M', имеем: $\operatorname{ctg} z = BK = c$, следовательно, по определению арккотангенса можно записать:

$$z = \operatorname{Arcctg} c,$$

т. е.

$$\operatorname{Arcctg} c = z_0 + \pi n, \tag{55}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Давая параметру n значение $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, будем получать всевозможные значения арккотангенса:

$$\operatorname{Arcctg} c = z_0,\ z_0 + \pi,\ z_0 - \pi,\ z_0 + 2\pi, \ldots$$

Одно и только одно из этих значений z_0 находится в промежутке $(0; \pi)$; его называют главным значением $\operatorname{Arcctg} c$ и обозначают через $\operatorname{arcctg} c$ (прежний знак, но с малой буквой «а»). Положив в формуле (55) $z_0 = \operatorname{arcctg} c$, получим соотношение

$$\operatorname{Arcctg} c = \operatorname{arcctg} c + \pi n, \tag{55 а}$$

где n — произвольное целое и $0 < \operatorname{arcctg} c < \pi$.
Это соотношение показывает, что все значения арккотангенса выражаются через главное его значение.

Найдем, например, значение $\operatorname{Arcctg} x$ при $x = -1$.

По формуле (55 а) имеем:

$$\operatorname{Arcctg}(-1) = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n,$$

но $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$, так как $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1$ и число $\frac{3}{4}\pi$ принадлежит промежутку $(0; \pi)$, следовательно,

$\operatorname{Arcctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi + \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ и ее свойства

Мы установили, что функция $\operatorname{Arcctg} x$ бесконечнозначная, но если при всяком значении x брать только главное значение $\operatorname{Arcctg} x$, то мы придем к однозначной функции, которую обозначают через $\operatorname{arcctg} x$ и называют главным значением функции $\operatorname{Arcctg} x$.

Итак, *$\operatorname{arcctg} x$ есть такое число или дуга в промежутке* $(0; \pi)$, *котангенс которого (которой) равен* x; иначе:

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi \\ \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) \equiv x \end{array}\right\} \tag{56}$$

Ясно, что все значения $\operatorname{Arcctg} x$ выражаются через главное значение формулой:

$$\operatorname{Arcctg} x \equiv \operatorname{arcctg} x + \pi n \quad (n \text{ — целое}) \ldots \quad . \quad (56\ б)$$

Графиком функции $y = \operatorname{arcctg} x$ служит та ветвь графика $y = \operatorname{Arcctg} x$ (рис. 126), которая расположена между осью абсцисс и параллелью к этой оси, отсекающей на оси ординат отрезок π. Рассматривая график (на рис. 126 он выделен жирной линией), замечаем, что функция $y = \operatorname{arcctg} x$ принимает только положительные значения, а именно, пока аргумент x пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$ $\operatorname{arctg} x$ монотонно убывает от π до 0, не принимая этих крайних значений.

График $\operatorname{arcctg} x$ не симметричен ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат, следовательно, эта функция не принадлежит к классу четных и нечетных функций. Что же касается симметрии графика $\operatorname{arcctg} x$ относительно точки $\frac{\pi}{2}$ на оси Oy, то она подсказывает нам следующее важное свойство этой функции:

$$\operatorname{arcctg}(-x) + \operatorname{arcctg} x = \pi$$

или

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \qquad (57)$$

Для доказательства этого свойства положим $\operatorname{arcctg}(-x) = y$, тогда по определению арккотангенса будем иметь:

$$-x = \operatorname{ctg} y \quad \text{и} \quad 0 < y < \pi;$$

откуда $x = -\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg}(\pi - y)$ и $0 < \pi - y < \pi$.

Из равенства $x = \operatorname{ctg}(\pi - y)$ получаем:

$$\pi - y = \operatorname{arcctg} x, \text{ т. е. } \pi = \operatorname{arcctg}(-x) + \operatorname{arcctg} x.$$

Пример. $\operatorname{arc\,ctg}(-1) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi.$

Рекомендуем читателю убедиться в справедливости рассмотренных свойств $\operatorname{arc\,ctg} x$ на числовой окружности.

Примечание. Ради краткости все обратные круговые функции называют обычно аркфункциями.

Упражнения.

1. Выразить все значения z с помощью обратных круговых функций в следующих равенствах:

$$\text{а) } \sin z = 0{,}27;\ \text{б) } \cos z = -\frac{3}{7};\ \text{в) } \operatorname{tg} 3z = 2;$$

$$\text{г) } \operatorname{ctg}\left(z + \frac{\pi}{7}\right) = -0{,}73;\quad \text{д) } \sin(2z - 1) = \frac{1}{3}.$$

2. Указать область определения функций:

$$\text{а) } \operatorname{Arc}\sin 5x;\ \text{б) } \operatorname{Arc}\cos\frac{x}{2};\ \text{в) } \operatorname{Arc}\operatorname{tg} 10x;$$

$$\text{г) } \arcsin(x - 1);\ \text{д) } \arccos\frac{x+1}{2};\ \text{е) } \sqrt{\arcsin x}.$$

3. Найти: 1) без таблиц:

$$\text{а) } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \text{б) } \arccos(-1);\ \text{в) } \operatorname{arc}\operatorname{tg} 0;$$

$$\text{г) } \operatorname{Arc}\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \text{д) } \operatorname{Arc}\cos(-1);\ \text{е) } \operatorname{Arc}\operatorname{tg} 0;$$

2) по таблицам:

$$\text{а) } \arcsin 0{,}5340;\ \text{б) } \arccos 0{,}2348;$$

$$\text{в) } \operatorname{arc}\operatorname{tg}(-1{,}025);\ \text{г) } \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}.$$

4. Изобразить на числовой окружности и на графиках:

$$\text{а) } \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right);\ \text{б) } \arccos\left(-\frac{2}{3}\right);\ \text{в) } \operatorname{arc}\operatorname{tg} 2;\ \text{г) } \operatorname{arc}\operatorname{ctg}(-1{,}5).$$

5. Представить z как функцию от y:

$$\text{а) } y = \arcsin 3z;\ \text{б) } y = 2\arccos\frac{z}{3};\ \text{в) } y = 3\operatorname{arc}\operatorname{tg}(z - 1),$$

$$\text{г) } y = 1 + \operatorname{arc}\operatorname{ctg}\sqrt{z}.$$

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

$$\text{а) } y = 5\arcsin\frac{x}{3};\qquad \text{в) } y = 1 + 3\operatorname{arc}\operatorname{tg} x;$$

$$\text{б) } y = 2\pi - \arccos(x + 1);\quad \text{г) } y = \frac{\pi}{3} + 2\operatorname{arc}\operatorname{ctg} 3x.$$

7. Проверить равенства:

$$\text{а) } \arcsin 1 = 3\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{б) } \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{3}\arccos 0 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3};$$

$$\text{в) } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\pi.$$

8. Известно, что $\sin\pi = 0$; можно ли на этом основании утверждать, что $\pi = \arcsin 0$?

9. Известно, что $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$; можно ли на этом основании записать, что $-\frac{\pi}{3}=\arccos\frac{1}{2}$?

10. Построить графики следующих функций:

а) $y = \sin(\operatorname{Arc}\sin x)$; б) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x)$; в) $y = \arcsin(-x)$;
г) $y = \arccos(-x)$; д) $y = |\arcsin x|$; е) $y = |\operatorname{arc\,tg} x|$;
ж) $y = 2\arcsin x$; з) $y = \arcsin 2x$.

§ 41. Тригонометрические операции над аркфункциями

Так как значениями аркфункций являются действительные числа, то с аркфункциями можно производить те же операции, что и с действительными числами, т. е. сложение, вычитание, умножение, деление, возвышение в степень, извлечение корня, логарифмирование и взятие круговых функций. Чтобы избежать трудности, возникающие при выполнении операций над многозначными функциями, мы будем в дальнейшем рассматривать только главные значения аркфункций, сохраняя ради кратности и для них общее название а р к ф у н к ц и й.

В этом параграфе мы остановимся на операциях, связанных с взятием круговых функций от аркфункций.

Простейшие случаи таких операций даны в самих определениях аркфункций, а именно:

$$\sin(\arcsin x)\equiv x \text{ и } \cos(\arccos x)\equiv x$$

в промежутке $-1\leqslant x\leqslant+1$, а также

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)\equiv x \text{ и } \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)\equiv x$$

при всех значениях x.

С помощью этих тождеств и известных нам формул тригонометрии круговые функции от любых аркфункций легко приводятся к алгебраическим выражениям. Покажем это на нескольких примерах.

1. Используя формулу $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ и предыдущие равенства, находим:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Так как $\arccos x$ изменяется в промежутке от 0 до π, то $\sin(\arccos x)$ — число неотрицательное, а потому корень квадратный надо брать только с одним знаком $+$.

2. Аналогично находим:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Так как $\arcsin x$ изменяется в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то $\cos(\arcsin x)$ есть число неотрицательное, а потому надо брать квадратный корень только с положительным знаком:

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| \neq 1);$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)} = \frac{1}{x} \qquad (x \neq 0).$$

3. Используя теорему сложения

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

получим:

$$\cos(\arcsin x + \arcsin y) = \cos(\arcsin x)\cos(\arcsin y) -$$

$$-\sin(\arcsin x)\sin(\arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy.$$

4. Аналогично находим:

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2};$$

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} x)} = \frac{2x}{1-x^2} \qquad (|x| \neq 1);$$

$$\cos^2\frac{1}{2}(\arccos x) = \frac{1+\cos(\arccos x)}{2} = \frac{1+x}{2}.$$

5. Используем формулы приведения и другие, находим:

$$1+\sin(2\arccos a - 1{,}5\pi) = 1+\sin\left(2\arccos a + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 1+\cos(2\arccos a) = 2\cos^2(\arccos a) = 2a^2.$$

Примечание. Не следует удивляться тому, что при выполнении над числом a двух взаимно обратных тригонометрических операций (например, взятие арксинуса, затем синуса) мы получали опять число a; это обстоятельство имеет место для любых взаимно обратных операций.

Так, имеем:

1) $(a+b)-b\equiv a$; $(a-b)+b\equiv a$;

2) $(a\cdot b):b\equiv a$; $(a:b)\cdot b\equiv a$, где $b\neq 0$;

3) $\sqrt[n]{a^n}\equiv a$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\equiv a$, где $a\geqslant 0$ и корень имеет арифметическое значение;

4) $b^{\lg_b a}\equiv a$; $\lg_b b^a\equiv a$, где $a>0$, $b>0$ и $b\neq 1$;

5) $\sin(\arcsin a)\equiv a$ при $|a|\leqslant 1$; $\arcsin(\sin a)\equiv a$ при $|a|\leqslant\frac{\pi}{2}$;

6) $\cos(\arccos a)\equiv a$ при $|a|\leqslant 1$; $\arccos(\cos a)\equiv a$ при $0\leqslant a\leqslant\pi$;

7) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)\equiv a$ при любом a; $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} a)\equiv a$ при $-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$.

§ 42 Простейшие зависимости между аркфункциями

1. Зависимости между аркфункциями одного и того же аргумента

$$\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2};\quad (|x|\leqslant 1) \tag{58}$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x\equiv\frac{\pi}{2}. \tag{59}$$

Для доказательства первого из этих соотношений положим $\arcsin x=z$, тогда по определению арксинуса имеем:

$$\sin z=x \text{ и } -\frac{\pi}{2}\leqslant z\leqslant\frac{\pi}{2},$$

или

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=x \text{ и } \frac{\pi}{2}\geqslant -z\geqslant -\frac{\pi}{2}.$$

Прибавим к каждой части неравенства по $\frac{\pi}{2}$, получим: $\pi\geqslant\frac{\pi}{2}-z\geqslant 0$, т. е. число $\frac{\pi}{2}-z$ принадлежит промежутку $[0;\ \pi]$, а потому соотношение $\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=x$ можно записать так: $\frac{\pi}{2}-z=\arccos x$, откуда $\frac{\pi}{2}=z+\arccos x$, или $\frac{\pi}{2}=\arcsin x+\arccos x$.

Справедливость соотношения (58) усматривается и на графике (рис. 128), а именно:

1) при $x = OA$ имеем:

$$\left.\begin{array}{l}\arccos x = AB \\ \arcsin x = AB_1\end{array}\right\} \text{ отрезки } AB \text{ и } AB_1 \text{ — направленные}$$

$$\arccos x + \arcsin x = AB + AB_1 = AB - B_1A =$$

$$= AB - CB = AC = \frac{\pi}{2};$$

2) при $x = 0$ имеем:

$$\begin{array}{l}\arccos x = OD \\ \arcsin x = 0;\end{array}$$

$$\arcsin x + \arccos x = OD + O = OD = \frac{\pi}{2};$$

3) при $x = OE$ имеем:

$$\begin{array}{l}\arccos x = EF \\ \arcsin x = EF\end{array}$$

$$\arccos x + \arcsin x = EF + EF = EF + FG = EG = \frac{\pi}{2}.$$

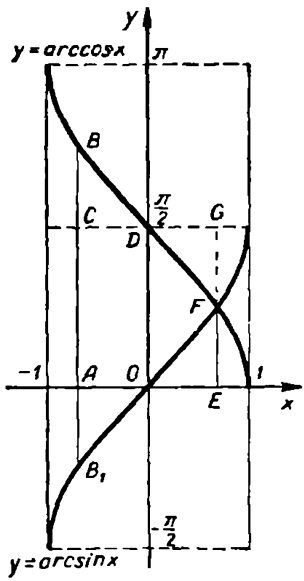


Рис. 128.

Аналогично доказывается справедливость соотношения (59). Рекомендуем провести доказательство самостоятельно.

2. Выражение одной аркфункции через другую с измененным аргументом

Используя известные алгебраические зависимости между круговыми функциями, можно любую аркфункцию выразить через все остальные.

Покажем это на конкретных примерах.

1. Пусть требуется выразить $\arcsin x$ через арктангенс.

Находим $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| \neq 1)$.

Замечаем, что данное равенство допускает обращение, так как $\arcsin x$ принадлежит промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а потому, обращая его, находим:

$$\arcsin x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| \neq 1).$$

2. Аналогично рассуждая, приходим к равенствам:

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Несколько сложнее переход от аркфункции к другой аркфункции, если области их значений не совпадают.

Пусть, например, надо выразить $\arcsin x$ через арккосинус.

Находим

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}. \qquad (*)$$

Но области значений арксинуса и арккосинуса не совпадают: $\arcsin x$ изменяется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, арккосинус изменяется от 0 до π, поэтому обращение равенства (*) при всяком x недопустимо.

Однако при $x \geqslant 0$ имеем: $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и $0 \leqslant \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}$, следовательно, в этом случае равенство (*) дает:

$$\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} \quad (x \geqslant 0). \qquad (**)$$

Если же $x < 0$, то $-x > 0$; пользуясь свойством нечетности арксинуса, получаем:

$$\arcsin x = -\arcsin(-x).$$

Теперь функция $\arcsin(-x)$ имеет положительный аргумент $(-x)$, а потому к ней применима предшествующая формула (**):

$$\arcsin(-x) = \arccos \sqrt{1-(-x)^2} = \arccos \sqrt{1-x^2}.$$

Итак, окончательно имеем:

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ -\arccos\sqrt{1-x^2} & \text{при } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Пример. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arccos\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} =$

$$= -\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6}.$$

4. Пусть требуется выразить $\arccos x$ через арксинус. Находим: $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

При $x \geqslant 0$ $\arccos x$ принадлежит промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а потому, обращая данное соотношение, получаем:

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} \quad (x \geqslant 0). \qquad (***)$$

Если $x < 0$, то $-x > 0$. Используя свойство арккосинуса (51), имеем:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

откуда $$\arccos x = \pi - \arccos(-x).$$

У функции $\arccos(-x)$ аргумент $(-x) > 0$, а потому, применив к ней формулу (***), получим:

$$\arccos(-x) = \arcsin\sqrt{1-(-x)^2} = \arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

Итак, имеем:

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2} & \text{при } x \geqslant 0; \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

5. Установите самостоятельно справедливость формул:

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{при } 0 < x \leqslant 1; \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{при } -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$$

и

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, & \text{если } x > 0; \\ \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

3. Выражение суммы или разности аркфункции через одну аркфункцию

Иногда при исследовании функции и решении уравнений бывает целесообразно заменить сумму или разность двух аркфункций одной какой-либо аркфункцией. Покажем на примерах, как это делается.

1. Пусть требуется сумму

$$\gamma = \arcsin x + \arcsin y$$

выразить через одну аркфункцию, например через арккосинус.

Рассмотрим случаи, когда x и y одного знака;

1) $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

Находим косинус суммы:

$$\cos\gamma = \cos(\arcsin x + \arcsin y) = \cos(\arcsin x)\cos(\arcsin y) -$$

$$- \sin(\arcsin x)\sin(\arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy.$$

Итак, $\cos\gamma = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy.$ (*)

По условию $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, а потому

$$\begin{array}{r} 0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ + \\ 0 \leqslant \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \hline 0 \leqslant \gamma \leqslant \pi \end{array}$$

Как видим, равенство (*) возможно обратить, т. е.

$$\gamma = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right). \qquad (**)$$

2) Если $x < 0$ и $y < 0$, то $-x > 0$ и $-y > 0$.

$$\begin{array}{r} \arcsin x = -\arcsin(-x) \\ + \\ \arcsin y = -\arcsin(-y), \end{array}$$

откуда $\gamma = -[\arcsin(-x) + \arcsin(-y)]$.

Применив формулу (**) к сумме аркфункций $\arcsin(-x)+\arcsin(-y)$, получим:

$$\gamma = -\arccos\left[\sqrt{1-(-x)^2}\ \sqrt{1-(-y)^2}-(-x)(-y)\right] =$$
$$= -\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2}-xy\right).$$

Итак, имеем:

$$\gamma = \arcsin x+\arcsin y = \begin{cases} \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\right), \\ \text{если } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ -\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\right), \\ \text{если } x<0,\ y<0. \end{cases}$$

2. Пусть требуется заменить разность двух аркфункций

$$\gamma = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y$$

одной аркфункцией, например арктангенсом.

Берем тангенс этой разности:

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y) = \frac{x-y}{1+xy}.$$

Допустим, что $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, тогда

$$0\leqslant \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2};$$

$$0\leqslant \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2};$$

или

$$0\leqslant \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{\pi}{2} < -\operatorname{arctg} y \leqslant 0,$$

сложив почленно два последних соотношения, получим

$$-\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Это показывает, что равенство $\operatorname{tg}\gamma = \frac{x-y}{1+xy}$ допускает обращение:

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}.$$

Итак, при $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$

$$\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}.$$

Пример. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=$

$$=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}.$$

Упражнения.

1. Построить графики функций $y=x$ и $y=\sin(\arcsin x)$ и на графиках показать различие этих функций.
2. То же для $y=x^2$ и $y=\cos(\arccos x^2)$.
3. Показать на числовой окружности справедливость тождеств:

а) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(|x|\leqslant 1)$;

б) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}(|x|\leqslant 1)$.

4. Найти:

а) $\cos(\arcsin 0{,}8)$, б) $\operatorname{tg}\left[\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$.

5. Вычислнть, ие пользуясь таблицами:

а) $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)+\arcsin\frac{20}{29}\right]$;

б) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$;

в) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin 0{,}3\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin 0{,}3\right)$;

г) $1-\cos\left(2\arcsin\frac{5}{7}\right)$;

д) $\cos\left(3\arcsin\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)$.

6. Проверить справедливость соотношений:

а) $\operatorname{tg}(\arcsin x)\cos(\arcsin x)=x\ (|x|<1)$;

б) $\sin 2(\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2}\ (|x|\leqslant 1)$;

в) $\operatorname{arc\,ctg}x=\begin{cases}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x\geqslant 0;\\ \pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x<0;\end{cases}$

г) $\arcsin x=\begin{cases}\operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0<x\leqslant 1.\\ \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\pi, & \text{если } -1\leqslant x<0.\end{cases}$

7. Выразить: 1) $\operatorname{arc\,ctg} x$ через арккосинус;

2) $\operatorname{arc\,tg} x$ через арксинус.

8. Сумму аркфункций выразить через одну какую-либо аркфункцию:

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0).$$

9. Проверить равенства:

а) $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} \frac{1}{7} = \frac{3}{8}\pi$;

б) $\arcsin x + \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ при $|x|<1$.

в) $\frac{\pi}{6} + \arcsin x = \arcsin \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{3})$,

если $-1 \leqslant x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. Показать, что $a+b+c=abc$, если

$$\operatorname{arcctg} \frac{1}{a} + \operatorname{arcctg} \frac{1}{b} + \operatorname{arcctg} \frac{1}{c} = \pi.$$

11. Найти:

а) $\arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)$;

б) $\arcsin\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$;

в) $\arccos\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right)$:

г) $\arccos(\cos 3\pi)$;

д) $\arccos(\sin 15°)$;

е) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 1)$.

12. Решить уравнения:

а) $3\arcsin x - \pi = 0$,

б) $2\arccos x + 1 = 0$;

в) $4\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \pi = 0$;

г) $(\arcsin x)^2 - 5\arcsin x + 2 = 0$;

д) $4\operatorname{arctg} x - 6\operatorname{arcctg} x = \pi$;

е) $\arcsin x = \arccos x$;

ж) $(\arcsin x)^2 + 2{,}5\arccos x = 1{,}25\pi - 1$.

13. Решить неравенства:

а) $4\arcsin 3x - \pi < 0$;

б) $\arccos(2x-1) < \arccos 0{,}4$;

в) $(\operatorname{arctg} x)^2 < \frac{\pi}{12}\operatorname{arcctg} x$.

ГЛАВА IX

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, РАССМАТРИВАЕМЫЕ В ТРИГОНОМЕТРИИ

§ 43. Тригонометрические уравнения и их решения

Уравнение называют тригонометрическим, если в нем: 1) неизвестные содержатся только под знаками круговых функций; 2) аргументами круговых функций являются линейные[1] функции от неизвестных и 3) над круговыми функциями выполняются только алгебраические операции.

Приведем примеры тригонометрических уравнений с одним и несколькими неизвестными:

$$\cos^2 x - 3\sin 2x + 1{,}75 = 0;$$
$$\sin(2x - 1) = \cos(3 + 7x);$$
$$\operatorname{tg}(ax + b)\cdot\operatorname{ctg}(cx + d) = 1.$$
$$\operatorname{tg}(ax + by + cz) = d;$$
$$\frac{\sin(x + y)}{\cos(x - y)} = \frac{3}{4}.$$

Понятно, что (при данном выше определении) уравнения

$$\sin(1 - 3x + x^2) = 1;\quad \cos\left(\sqrt{x - \pi}\right) = \sin x;$$
$$\sin(\pi\cos x) = b;\qquad \operatorname{tg}(2x + 1)\cdot\cos\frac{\pi}{x} = \frac{1}{2};$$
$$\operatorname{arctg}(x + 1) = \frac{\pi}{3};\qquad \lg(\sin x) = a;$$

нельзя считать тригонометрическими.

[1] Линейными функциями называют целые алгебраические функции первой степени, а именно: $ax + b$; $ax + by + c$; $ax + by + cz + d$ и т. д., где x, y, z — аргументы, a, b, c, d — числовые или параметрические коэффициенты.

Как известно, всякое нетождественное алгебраическое уравнение либо совсем не имеет решений, либо имеет их конечное множество.

Среди тригонометрических уравнений также встречаются такие, у которых нет решений, например, $\sin x = 3$. Но если тригонометрическое уравнение имеет решения, то их непременно бесконечное множество.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\sin 2x = \frac{1}{2}.$$

Положив $2x = z$, будем иметь:

$$\sin z = \frac{1}{2},$$

откуда (см. § 37, п. 2).

$$z = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Возвращаясь к неизвестному x, получаем:

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

или $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Итак, данное уравнение имеет бесконечное множество решений.

Формулу $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$, содержащую все решения данного уравнения, называют **общим решением**. Если в общем решении давать параметру n конкретные целые значения, то будут получаться отдельные решения этого уравнения, которые принято называть **частными решениями**.

Так, например, положив $n = 0$, получим наименьшее положительное частное решение:

$$x_1 = (-1)^0 \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} \cdot 0 = \frac{\pi}{12},$$

при $n = -6$ получим другое частное решение:

$$x_2 = (-1)^{-6} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(-6) = -\frac{35}{12}\pi.$$

К тригонометрическим уравнениям применим также и графический прием решения уравнений, позволяющий находить приближенные значения корней с небольшой точностью. Поясним этот прием на рассмотренном уже нами уравнении:

1) Отмечаем, что уравнение

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

представляет возможное равенство функций:

$$y = \sin 2x \text{ и } y = \frac{1}{2}.$$

2) Строим графики этих функций (рис. 129).

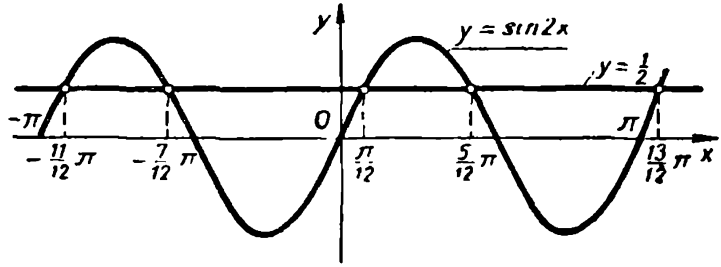


Рис. 129.

3) Находим абсциссы точек пересечения графиков $y = \sin 2x$ и $y = \frac{1}{2}$, получаем числа $-2{,}9$. $-1{,}8$; 0,26; 1,3; 3,4, представляющие приближенные значения искомых корней уравнения.

На рисунке указаны точные значения тех же корней, найденные выше аналитическим путем, а именно:

решения I класса при $n = -2$; 0 и 2: $x_1 = -\frac{11}{12}\pi$, $\frac{\pi}{12}$ и $\frac{13}{12}\pi$;

решения II класса при $n = -1$; 1 и 3: $x = -\frac{7}{12}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$ и $\frac{17}{12}\pi$;

остальные решения на графике не показаны.

Несобственные корни уравнения

Решая уравнение

$$f(x) = \varphi(x) \qquad (1)$$

мы находим его корни, т. е. такие значения аргумента x, при которых функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ принимают равные значения. Но при исследовании некоторых вопросов представляют интерес и такие значения аргумента x, при которых функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ (или одна из них) теряют смысл, т. е. не определены, но пределы этих функций существуют и равны между собой. Если при $x = a$ теряет смысл хотя бы одна из функций, представляющих левую и правую части уравнения (1), но

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \varphi(x),$$

то число a называют предельным или несобственным корнем уравнения (1).

Выясним смысл этого определения на решении следующего уравнения:

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Перенеся $\frac{1}{2}$ в левую часть и выполнив вычитание, получим:

$$\frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x} = 0.$$

Приравниваем числитель нулю:

$$2\sqrt{1+x}-2-x = 0$$

или

$$2\sqrt{1+x} = 2+x;$$

возводим обе части в квадрат:

$$4(1+x) = 4+4x+x^2,$$

откуда $x = 0$

Подставляя число 0 в данное уравнение, получаем в левой части выражение $\frac{0}{0}$, не имеющее смысла, а в правой части $\frac{1}{2}$, следовательно, 0 не есть корень данного уравнения. Однако нетрудно убедиться, что при $x \to 0$ функция, представляющая левую часть уравнения, стремится к $\frac{1}{2}$

Действительно

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Предел правой части уравнения равен также $\frac{1}{2}$ следовательно, число 0 есть предельный (несобственный) корень данного уравнения.

Некоторые виды тригонометрических уравнений также имеют предельные (несобственные) решения.

Так, уравнение $\frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} = 2$ имеет бесконечное множество несобственных корней вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Действительно, при подстановке любого из чисел $\frac{\pi}{2} + \pi n$ в уравнение левая его часть обращается в выражение $\frac{0}{0}$, не имеющее смысла, а правая равна 2.

Но при

$$x \to \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$$

$$\lim \frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} = \lim \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim 2 \sin^2 x = 2,$$

т. е.

$$\lim \frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg} x} = \lim 2, \text{ при } \quad x \to \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$

§ 44. Классификация тригонометрических уравнений с одним неизвестным

Необходимость в классификации уравнений вызывается невозможностью найти общий метод их решений.

Известно, что целые алгебраические уравнения по крайней мере со времен Декарта (1596—1650) классифицируются по степени уравнения; чем выше степень таких уравнений, тем сложнее взаимная связь неизвестного с коэффициентами уравнения и тем труднее найти это неизвестное в зависимости от коэффициентов. Но уже дробные и иррациональные алгебраические уравнения не классифицируются по степени; тем более не классифицируются по степени трансцендентные уравнения и, в частности, тригонометрические. Далее мы убедимся, например, в том, что уравнение 2-й степени

$$a \cos^2 x + b \sin x + c = 0$$

решается более просто, чем уравнение 1-й степени:

$$a \cos x + b \sin x + c = 0.$$

В тригонометрии приходится создавать свою специфическую классификацию уравнений.

К первому основному типу отнесем тригонометрические уравнения вида:

$$\left.\begin{array}{l} a\sin(bx+c)=d \\ a\cos(bx+c)=d \\ a\,\mathrm{tg}\,(bx+c)=d \\ a\,\mathrm{ctg}\,(bx+c)=d \end{array}\right\}$$

или в общем виде: $aT(bx+c)=d$, где знак T — характеристика любой круговой функции.

Ко второму основному типу отнесем уравнения:

$$\begin{array}{l} \sin(ax+b)=\sin(cx+d); \\ \cos(ax+b)=\cos(cx+d); \\ \mathrm{tg}\,(ax+b)=\mathrm{tg}\,(cx+d): \\ \mathrm{ctg}\,(ax+b)=\mathrm{ctg}\,(cx+d), \end{array}$$

или в общем виде: $T(ax+b)=T(cx+d)$,
где T — знак любой из круговых функций.

Эти два типа уравнений мы назвали основными потому, что к ним будут сводиться в процессе решения всякие тригонометрические уравнения, решаемые элементарными методами.

Как будет далее показано, наиболее просто сводятся ко второму основному типу уравнения вида

$$\begin{array}{l} \sin(ax+b)=\cos(cx+d); \\ \mathrm{tg}\,(ax+b)=\mathrm{ctg}\,(cx+d); \\ \sec(ax+b)=\csc(cx+d), \end{array}$$

короче: $T(ax+b)=T_s(cx+d)$, где T_s — знак круговой функции, соименной с функцией T; такие уравнения мы относим к третьему (уже не основному) типу.

Четвертый тип образуют уравнения, в которых совершаются некоторые алгебраические действия над какой-нибудь одной круговой функцией одного аргумента. Такие уравнения сводятся к уравнениям I типа. В краткой записи они имеют вид:

$$f[T(ax+b)]=0,$$

где знак f — характеристика алгебраических действий над одной и той же круговой функцией $T(ax+b)$ с аргументом $ax+b$.

Например:

$$5\sin^3(3x+1)+14\sin^2(3x+1)-10\sin(3x+1)=0.$$

Пятый тип, сводимый к четвертому, образуют уравнения, левая часть которых есть произведение функций вида левой части уравнений IV типа, т. е.

$$f_1[T_1(a_1x+b_1)]\cdot f_2[T_2(a_2x+b_2)]\cdot\ldots f_k[T_k(a_kx+b_k)]=0.$$

Например,

$$\left(\sin^2 2x+\frac{5}{6}\sin 2x+\frac{1}{6}\right)\left(\cos^3 3x-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\cos 3x\right)|5\operatorname{tg}(4-1)+17|=0.$$

Шестой тип уравнений, сводимых к одному из предшествующих, образуют уравнения, в которых совершаются какие-либо алгебраические действия над несколькими круговыми функциями с одним и тем же аргументом. Такой тип уравнения можно записать в виде:

$$f[\sin(ax+b);\ \cos(ax+b);\ \operatorname{tg}(ax+b);\ \operatorname{ctg}(ax+b);$$
$$\sec(ax+b);\ \ \operatorname{csc}(ax+b)]=0,$$

где знак f — характеристика выполняемых алгебраических действий над указанными функциями.

Например, $\sin 2x-\cos 2x=1,$

$$\sin x+\cos^2 x=\operatorname{tg} x.$$

Седьмой тип уравнений, сводимых к одному из предшествующих, образуют уравнения, в которых совершаются какие-либо алгебраические действия над одной функцией, взятой от разных аргументов, что передадим короче в виде:

$$f[T(a_1x+b_1);\ T(a_2x+b_2);\ T(a_3x+b_3)]=0.$$

Например, $\cos 2x+\cos^3 x=0;$

$$\sin 3x+\sin 2x-\sin x=0.$$

Восьмой тип уравнений, сводимых к одному из предшествующих, образуют уравнения, в которых совершаются какие-либо алгебраические действия над несколькими круговыми функциями, взятыми от различных аргументов, что короче запишем в виде:

$$f[T_1(a_1x+b_1);\ T_2(a_2x+b_2);\ T_3(a_3x+b_3)]=0.$$

Например, $\cos 2x-3\sin x=0;$

$$\sin 3x-\cos 2x+\sin x=1.$$

Следует отметить, что с формальной стороны данная классификация имеет недостаток, заключающийся в том, что всякое уравнение второго основного типа подходит также и под определение уравнения VII типа, а уравнение III типа можно отнести к уравнениям VIII типа. Но если иметь в виду нашу главную задачу — подыскание соответствующих методов решения тригонометрических уравнений, — то данная классификация является весьма удобной и целесообразной, в чем мы убедимся в дальнейшем.

§ 45. Тригонометрические уравнения I основного типа: $AT(ax+b)=c$

Уравнения данного типа решаются непосредственно на основе следующих формул, установленных нами в предыдущей главе:

1) если $\sin z = c$ и $|c| \leqslant 1$,

$$\text{то } z = (-1)^n \arcsin c + \pi n = \begin{cases} \arcsin c + \pi \cdot 2k \\ -\arcsin c + \pi(2k+1); \end{cases} \quad (46,а)$$

2) если $\cos z = c$ и $|c| \leqslant 1$,

$$\text{то } z = \pm \arccos c + 2\pi n = \begin{cases} \arccos c + 2\pi n \\ -\arccos c + 2\pi n; \end{cases} \quad (49,а)$$

3) если $\operatorname{tg} z = c$, то $z = \operatorname{arc\,tg} c + \pi n$; (52,а)

4) если $\operatorname{ctg} z = c$, то $z = \operatorname{arc\,ctg} c + \pi n$; (55,а)

причем параметры n и k везде принимают всевозможные целые значения: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Полезно заметить, что для уравнений вида $\sin z = c$, при $c = 1$ и $c = -1$ формула решения (46,а) может быть записана в более кратком виде, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} \text{при } c = 1,\ z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \text{при } c = -1,\ z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right\} \quad (46,б)$$

Действительно, при $c = 1$ формула (46,а) дает:

$$z = (-1)^n \arcsin 1 + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

отсюда при четном $n=2k$, $z=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot 2k$ и при нечетном $n=2k+1$, $z=-\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1)=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot 2k$.

Если же $c=-1$, то по формуле (46,а) имеем:

$$z=(-1)^n \arcsin(-1)+\pi n=(-1)^n\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\pi n;$$

отсюда при четном $n=2k$, $z=-\frac{\pi}{2}+\pi\cdot 2k$, при нечетном $n=2k-1$, $z=\frac{\pi}{2}+\pi(2k-1)=-\frac{\pi}{2}+\pi\cdot 2k$.

Такой же результат можно получить непосредственно по определению синуса на числовой окружности (стр. 123, рис. 16), заметив, что $\sin z=1$ только в точке B, где изображаются числа $z=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, а $\sin z=-1$ только в точке B', где изображаются числа $z=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

Аналогичными рассуждениями убеждаемся через формулу (49,а) и непосредственно на числовой окружности, что решение уравнения $\cos z=1$ можно записать в виде $z=2\pi k$, а решение уравнения $\cos z=-1$ в виде $z=\pi(2k+1)$.

Технику решения выясним на частных примерах и в общем виде.

1

Пусть имеется функция $I=10\cdot\sin(50t+1)$, где I — сила переменного тока. Определить такие моменты времени t, когда сила тока I равна 2,0 амперам?

Решение. Условие задачи записываем уравнением: $10\sin(50t+1)=2{,}0$, или $\sin(50t+1)=0{,}20$, откуда, по формуле (46,а), $50t+1=(-1)^n \arcsin 0{,}20+\pi n$ или $50t_1+1\approx 0{,}20+2k\pi$ и

Пусть дано уравнение в общем виде:

$$a\sin(bx+c)=d.$$

Последовательно решаем его:

1) $\sin(bx+c)=\frac{d}{a}$.

2) Если $\left|\frac{d}{a}\right|>1$, то уравнение не имеет решений; если же $\left|\frac{d}{a}\right|\leqslant 1$, то по формуле (46,а) получаем: $bx+c=(-1)^n \arcsin\frac{d}{a}+\pi n$, откуда находим общее решение:

$50t_2 + 1 \approx -0{,}20 + (2k+1)\pi$,

так как $\arcsin 0{,}20 \approx 0{,}20$ (по таблице),

Окончательно имеем:
$t_1 \approx -0{,}016 + 0{,}04\ k\pi$,
$t_2 \approx -0{,}024 + 0{,}02\,(2k+1)\pi$,
где k — любое целое число.
На рисунке 130 корни этого уравнения являются абсциссами точек пересечения графиков функций:
$I = 10\sin(50t + 1)$ и $I = 2{,}0$.

$$x = \frac{1}{b}\left[(-1)^n \arcsin\frac{d}{a} + \right.$$
$$\left. + \pi n - c\right];$$

его можно разбить на два класса решений:

$$x_I = \frac{1}{b}\left[(-1)^{2k}\arcsin\frac{d}{a} + \right.$$
$$\left. + 2k\pi - c\right],$$

$$x_{II} = \frac{1}{b}\left[(-1)^{2k+1}\arcsin\frac{d}{a} + \right.$$
$$\left. + (2k+1)\pi - c\right],$$

или

$$x_I = \frac{1}{b}\left[\arcsin\frac{d}{a} + \right.$$
$$\left. + 2k\pi - c\right],$$

$$x_{II} = \frac{1}{b}\left[-\arcsin\frac{d}{a} + \right.$$
$$\left. + (2k+1)\pi - c\right].$$

На рисунке 129 передан графический прием решения данного уравнения при $a = 2$, $b = 2$, $c = 0$ и $d = 1$.

II

Силы переменных токов, протекающих в двух проводниках, выражаются соответственно функциями
$I_1 = 10\sin 50t$ и
$I_2 = 20\sin 50\,(t + 0{,}0314)$.
Определить моменты времени t, в которые силы токов в обоих проводниках принимают равные значения.

Решение. Записываем условие задачи уравнением:
$10\sin 50t =$
$= 20\sin 50\,(t + 0{,}0314)$, или
$\sin 50t \approx 2\sin\left(50t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть дано уравнение в общем виде:

$$a\operatorname{tg}(bx + c) = d.$$

Последовательно решаем его:

1) $\operatorname{tg}(bx + c) = \frac{d}{a}$.

2) По формуле (52,a) имеем:

$$bx + c = \operatorname{arc\,tg}\frac{d}{a} + \pi n,$$

откуда находим общее решение данного уравнения

$$x = \frac{1}{b}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{d}{a} + \right.$$
$$\left. + \pi n - c\right],$$

состоящее из одного класса решений.
На рисунке 131 передан

По формуле сведéния получим $\sin 50t \approx 2\cos 50t$, или $\operatorname{tg} 50t \approx 2$, откуда, по формуле (52,а), $50t \approx \approx \operatorname{arc\,tg} 2 + \pi n \approx 1{,}11 + \pi n$. Следовательно, $t \approx 0{,}022 + + 0{,}02\pi n$, где n — целое.

графический прием решения данного уравнения при условии, когда $a = 1$; $b = 2$; $c = 0$ и $d = 1$, т. е.

$$\operatorname{tg} 2x = 1.$$

Корнями уравнения служат абсциссы общих точек графиков: $y = \operatorname{tg} 2x$ и $y = 1$.

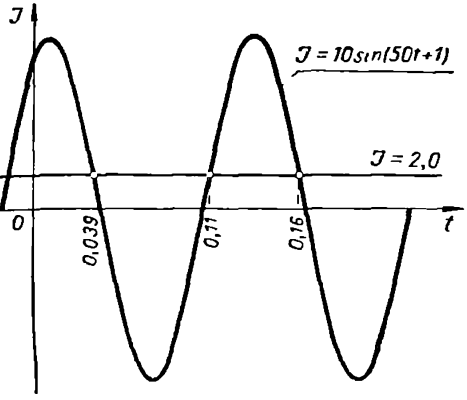


Рис. 130.

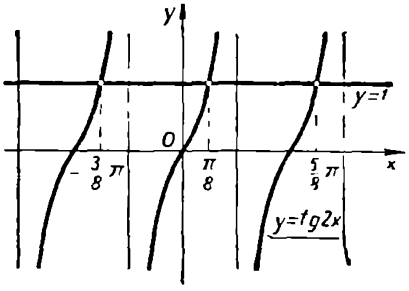


Рис. 131.

Представляем самому читателю решить уравнение:

$$a\operatorname{ctg}(bx + c) = d.$$

В результате отметим, что уравнения

$$a\operatorname{tg}(bx + c) = d \quad \text{и} \quad a\operatorname{ctg}(bx + c) = d$$

всегда имеют по одному классу решений, а уравнения

$$a\sin(bx + c) = d \quad \text{и} \quad a\cos(bx + c) = d$$

разрешимы при условии, если $\left|\frac{d}{a}\right| \leqslant 1$, причем дают по два класса решений.

Упражнения.

1. Решить следующие уравнения:

а) $5\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 3 = 0$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$.

2. В каких точках график функции $y = 1 + 2\cos\left[\frac{2}{3}\pi(x-1)\right]$ пересекает ось Ox?

3. Дана функция $f(x) = \sin x + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Найти:

а) период этой функции;

б) значения аргумента, обращающие функцию в нуль;

в) значения аргумента, при которых функция принимает наибольшее значение.

Указание. Предварительно преобразовать сумму в произведение (§ 31).

4. Дана функция $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$. Доказать, что эта функция периодическая, найти ее период и определить те значения аргумента x, при которых функция принимает наибольшее и наименьшее значение.

Указание. Предварительно преобразовать произведение синусов в сумму (§ 31).

5. По проводнику идет переменный ток силой $I = 0{,}3\sin(50t + 1)$ ампер. Определить моменты времени t, когда:

а) сила тока достигает максимума?

б) сила тока равна 0,1?

6. Шар скатывается по наклонной плоскости в 125 *м* длиной и приобретает в конце движения скорость 42 *м/сек*. Как велик угол наклона плоскости?

7. Две точки A и B удалены друг от друга на 15 *см*; перед ними находится плоское зеркало на расстоянии 5 *см* от A и 7 *см* от B. Как велик угол падения луча, идущего от A и отброшенного зеркалом в направлении к B?

§ 46. Тригонометрические уравнения II основного типа $T(ax + b) = T(a_1x + b_1)$, где левые и правые части суть одноименные круговые функции

Решение уравнений данного типа основано на следующих теоремах:

I. Для выполнения равенства $\sin u = \sin v$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:*

$$u = v + \pi \cdot 2n \quad \text{и} \quad u = -v + \pi(2n + 1).$$

II. *Для выполнения равенства* $\cos u = \cos v$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:*

$$u = v + 2\pi n \quad \text{и} \quad u = -v + 2\pi n.$$

III. *Для выполнения любого из равенств:*

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$$

$$\text{и} \quad \operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$$

необходимо и достаточно чтобы $u = v + \pi n$ *и чтобы числа* u *и* v *были допустимыми значениями аргументов тех функций, которые входят в данное равенство.*

Параметр n во всех случаях является произвольным целым числом.

Доказательство I.

а) Необходимость условия.

Пусть $\sin u = \sin v$,

тогда $$\sin u - \sin v = 0$$

или $$2 \sin \frac{u-v}{2} \cos \frac{u+v}{2} = 0, \quad \text{[формула (41)]}$$

а это возможно в том случае, если

$$\sin \frac{u-v}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{u+v}{2} = 0.$$

Первое из этих равенств дает:

$$\frac{u-v}{2} = \pi n, \quad \text{и} \quad u - v = 2\pi n, \quad \text{откуда} \quad u = v + \pi \cdot 2n;$$

второе дает:

$$\frac{u+v}{2} = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad \text{и} \quad u + v = \pi(2n+1),$$

$$\text{откуда} \quad u = -v + \pi(2n+1).$$

б) Достаточность условия.

Пусть $u = v + \pi \cdot 2n$,

тогда $\sin u = \sin(v + \pi \cdot 2n) = \sin v$.

Пусть $u = -v + \pi(2n+1)$, тогда

$$\sin u = \sin[-v + \pi(2n+1)] = \sin(-v + \pi) = \sin v.$$

В обоих случаях получаем: $\sin u = \sin v$.

Доказательство II.

а) Необходимость условия. Пусть $\cos u = \cos v$, тогда $\cos u - \cos v = 0$,

или $$-2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2} = 0, \quad \text{[по формуле (43)]}$$

а это возможно в том случае, когда

$$\sin \frac{u+v}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \sin \frac{u-v}{2} = 0.$$

Первое из этих равенств дает:

$$\frac{u+v}{2}=\pi n \quad \text{и} \quad u+v=2\pi n, \quad \text{откуда} \quad u=-v+2\pi n;$$

второе равенство дает:

$$\frac{u-v}{2}=\pi n \quad \text{и} \quad u-v=2\pi n, \quad \text{откуда} \quad u=v+2\pi n.$$

б) Достаточность условия. Пусть $u=\pm v+2\pi n$, тогда $\cos u=\cos(\pm v+2\pi n)=\cos(\pm v)=\cos v$, т. е. $\cos u=\cos v$.

Доказательство III.

а) Необходимость условия.

Пусть $\operatorname{tg} u=\operatorname{tg} v$,

тогда

$$\operatorname{tg} u-\operatorname{tg} u=0,$$

или

$$\frac{\sin(u-v)}{\cos u\cos v}=0.$$

Но это возможно в том случае, если $\sin(u-v)=0$ и, следовательно, $u-v=\pi n$, откуда $u=v+\pi n$.

б) Достаточность условия. Пусть u и v — допустимые значения для аргумента тангенса, причем $u=v+\pi n$, тогда

$$\operatorname{tg} u=\operatorname{tg}(v+\pi n)=\operatorname{tg} v.$$

т. е.

$$\operatorname{tg} u=\operatorname{tg} v.$$

Вторую часть этой теоремы (для котангенсов) рекомендуется доказать самому читателю.

Применим данные теоремы на решении уравнений типа:

$$T(ax+b)=T(a_1x+b_1).$$

1. Решаем уравнение: $\sin(ax+b)=\sin(a_1x+b_1)$.

По теореме I имеем:

$$ax+b=(a_1x+b_1)+\pi\cdot 2n,$$

$$\text{и } ax+b=-(a_1x+b_1)+\pi(2n+1),$$

$$\text{откуда } x_1=\frac{2\pi n+b_1-b}{a-a_1}, \qquad \text{если } a-a_1\neq 0;$$

$$x_{11}=\frac{\pi(2n+1)-(b_1+b)}{a+a_1}, \qquad \text{если } a+a_1\neq 0.$$

2. Решаем уравнение: $\cos(ax+b)=\cos(a_1x+b_1)$.
По теореме II имеем:

$$ax+b=\pm(a_1x+b_1)+2\pi n,$$

откуда: $x_{\text{I}}=\dfrac{2\pi n+b_1-b}{a-a_1}$, если $a-a_1\neq 0$;

$$x_{\text{II}}=\frac{2\pi n-(b_1+b)}{a+a_1},\qquad \text{если } a+a_1\neq 0.$$

3. Уравнения $\operatorname{tg}(ax+b)=\operatorname{tg}(a_1x+b_1)$
и $\operatorname{ctg}(ax+b)=\operatorname{ctg}(a_1x+b_1)$
рекомендуем решить читателю самостоятельно.

4. Решим следующую задачу.

Две силы P и Q приложены к материальной точке. Найти угол между этими силами, если известно, что длина их равнодействующей не изменится, если этот угол увеличить в два раза.

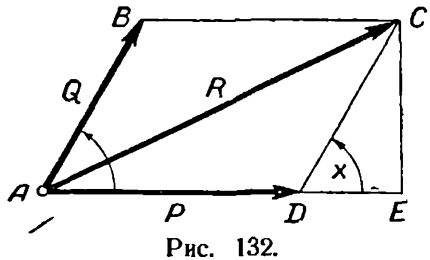


Рис. 132.

Дадим геометрическое изображение сил P и Q и их равнодействующей R (рис. 132). Искомый угол (P, Q) обозначим через x, тогда $\sphericalangle EDC=x$, так как $CD \parallel AB$.

Из прямоугольного треугольника ACE имеем:

$$AC^2=AE^2+EC^2.$$

Но $AC=R$, $EC=DC\cdot\sin x=Q\cdot\sin x$,

$$AE=AD+DE=P+DC\cdot\cos x=P+Q\cos x,$$

следовательно,

$$R^2=(P+Q\cos x)^2+Q^2\sin^2 x$$

или
$$R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos x. \qquad (*)$$

По условию длина равнодействующей сил P и Q не изменится, если угол между ними увеличить в два раза, следовательно,

$$R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos 2x. \qquad (**)$$

Из соотношений (*) и (**) получаем уравнение:

$$P^2+Q^2+2PQ\cos x=P^2+Q^2+2PQ\cos 2x,$$

или $\cos x=\cos 2x$.

По теореме II имеем:

$$2x = \pm x + 2\pi n,$$

откуда

$$x_I = 2\pi n; \qquad x_{II} = \frac{2}{3}\pi n.$$

В частности, при $n = 0$ и 1, получаем $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2}{3}\pi$, т. е. $x_1 = 0°$ и $x_2 = 120°$.

Упражнения.

1. Решить следующие уравнения:

1) $\cos 5x = \cos(5 + x)$;

2) $\operatorname{tg}(-3x + 2) = \operatorname{tg}(x - 1)$;

3) $\operatorname{ctg} \pi x + \operatorname{ctg} \frac{x}{\pi} = 0$.

2. Существуют ли общие точки у графиков функций $y = \operatorname{tg} 2x$ и $y = \operatorname{tg} 3x$?

§ 47. Тригонометрические уравнения III типа $T(ax + b) = T_s(a_1x + b_1)$, в которых левые и правые части суть соименные круговые функции

Уравнения данного типа сводятся непосредственно ко II основному типу по формулам приведения (§ 19). Покажем это на конкретных примерах.

1. Пусть требуется решить уравнение:

$$\sin(ax + b) = \cos(a_1x + b_1).$$

Выразим синус через косинус по формуле приведения (19), получаем:

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (ax + b)\right] = \cos(a_1x + b_1).$$

По теореме II предыдущего параграфа имеем:

$$\frac{\pi}{2} - (ax + b) = \pm(a_1x + b_1) + 2\pi n,$$

откуда $$x_1 = \frac{b + b_1 + 2\pi n - \frac{\pi}{2}}{-(a + a_1)}, \text{ если } a + a_1 \neq 0;$$

$$x_2 = \frac{b - b_1 + 2\pi n - \frac{\pi}{2}}{a_1 - a}, \text{ если } a_1 - a \neq 0.$$

2. В уравнении $\operatorname{tg}(ax+b)=\operatorname{ctg}(a_1x+b_1)$ выразим, например, котангенс через тангенс по формуле приведения (20):

$$\operatorname{tg}(ax+b)=\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-(a_1x+b_1)\right];$$

откуда $$ax+b=\frac{\pi}{2}-(a_1x+b_1)+\pi n,$$

$$x=\frac{\pi n-(b+b_1)+\frac{\pi}{2}}{a+a_1},\ \text{если}\ a+a_1\neq 0.$$

Так как в уравнение входят функции тангенс и котангенс, которые не определены при некоторых значениях их аргументов, то следует исключить из множества полученных значений x такие значения, при которых теряет смысл хотя бы одна из частей уравнения, а именно значения x, удовлетворяющие условию

$$ax+b=\frac{\pi}{2}+\pi m,\quad \text{и}\quad a_1x+b_1=\pi m,$$

где m—произвольное целое число.

3. Уравнение $\operatorname{tg}(ax+b)\cdot\operatorname{tg}(cx+d)=1$ сводится также к данному типу, а именно, заметив, что в данном случае ни один из множителей левой части не может быть нулем, разделим уравнение на один из них, получим

$$\operatorname{tg}(ax+b)=\frac{1}{\operatorname{tg}(cx+d)},\quad \text{или}\quad \operatorname{tg}(ax+b)=\operatorname{ctg}(cx+d).$$

Упражнения.

1. Решить следующие уравнения:

1) $\sin 2x-\cos(2+x)=0$;

2) $\operatorname{tg}(x+1)+\operatorname{ctg}(2x-1)=0$;

3) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}x=1$.

2. Не выполняя построение графиков, найти координаты общих точек кривых:

$$y=3\cos(2x+1)\quad\text{и}\quad y=3\sin(3x-1).$$

§ 48. Тригонометрические уравнения IV типа $f[T(ax+b)]=0$, в которых совершаются алгебраические операции только над одной круговой функцией с одним и тем же аргументом

Предварительно рассмотрим этот тип уравнений на частных примерах.

Поставим следующие вопросы:

Могут ли принимать равные значения функции:

$y=\sin^2 x$ и $y=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{8}$?

Составляем тригонометрическое уравнение:

$$\sin^2 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{8}.$$

Внесем обозначение $\sin x=z$, получим алгебраическое уравнение:

$$z^2-\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}=0,$$

откуда

$$z_1=\frac{1}{2},\quad z_2=\frac{1}{4}.$$

Обратная замена дает уравнения I основного типа:

$$\sin x_1=\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\sin x_2=\frac{1}{4};$$

откуда по формуле (46, а) получаем:

$$x_1=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

$$x_2=(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+$$

$$+\pi n\approx(-1)^n\cdot 0{,}253+\pi n.$$

Могут ли принимать равные значения функции:

$y=a\sin^2(kx+l)+$
$+b\sin(kx+l)+c$
и $y=a_1\sin^2(kx+l)+$
$+b_1\sin(kx+l)+c_1$?

Составляем тригонометрическое уравнение:

$$a\sin^2(kx+l)+b\sin(kx+l)+c=a_1\sin^2(kx+l)+$$
$$+b_1\sin(kx+l)+c_1,$$

или, после преобразования,

$$(a-a_1)\sin^2(kx+l)+$$
$$+(b-b_1)\sin(kx+l)+$$
$$+(c-c_1)=0.$$

Если $a-a_1\neq 0$,

то заменой $\sin(kx+l)=z$ данное уравнение сводится к квадратному алгебраическому уравнению:

$$(a-a_1)z^2+(b-b_1)z+$$
$$+(c-c_1)=0,$$

откуда

$$z_{1,2}=\frac{b_1-b}{2(a-a_1)}\pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{(b_1-b)^2-4(a-a_1)(c-c_1)}}{2(a-a_1)}$$

Итак, мы нашли такие значения аргумента x, при которых данные функции принимают равные значения.

Графически (рис. 133) это выразилось в том, что кривые $y = \sin^2 x$ и $y = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{8}$ имеют общие точки с абсциссами x_1 и x_2.

Обозначим корни короче: $z_1 = p_1$, $z_2 = p_2$; обратная замена дает уравнение I основного типа:

$\sin(kx + l) = p_1$ и

$\sin(kx + l) = p_2$.

Если p_1 и p_2—действительные числа, не превосходящие по абсолютному значению 1, то по формуле (46, а) имеем:

$$kx_1 + l = (-1)^n \arcsin p_1 + \pi n,$$

$$kx_2 + l = (-1)^n \arcsin p_2 + \pi n;$$

откуда

$$x_1 = \frac{1}{k}[(-1)^n \arcsin p_1 + \pi n - l],$$

$$x_2 = \frac{1}{k}[(-1)^n \arcsin p_2 + \pi n - l].$$

При этих значениях аргумента данные функции принимают равные значения.

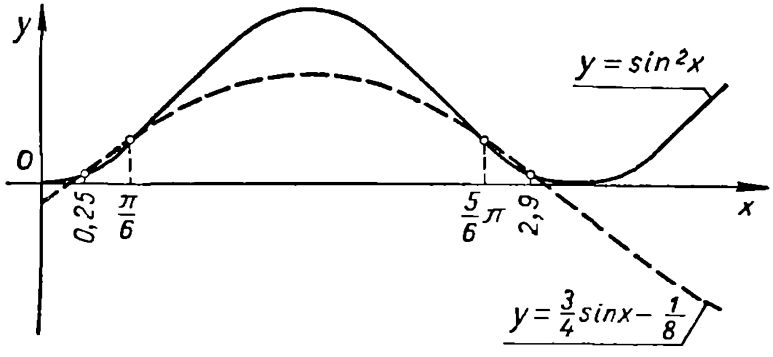


Рис. 133.

Рассмотренная задача привела нас к тригонометрическим уравнениям IV типа, которые соответствующей заменой свелись к квадратным алгебраическим уравнениям, а затем к уравнениям I основного типа.

Возьмем теперь более сложные функции:

1) $y = a_0 \operatorname{tg}^n (kx + l) + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} (kx + l) + \ldots + a_{n-1} \operatorname{tg} (kx + l) + a_n$;

2) $y = b_0 \operatorname{tg}^m (kx + l) + b_1 \operatorname{tg}^{m-1} (kx + l) + \ldots + b_{m-1} \operatorname{tg} (kx + l) + b_m$,

где $n \geqslant m$,

и поставим прежний вопрос: при каких значениях x эти функции принимают равные значения?

Для ответа на вопрос составляем уравнение:

$$a_0 \operatorname{tg}^n (kx + l) + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} (kx + l) + \ldots + a_{n-1} \operatorname{tg} (kx + l) + a_n =$$
$$= b_0 \operatorname{tg}^m (kx + l) + b_1 \operatorname{tg}^{m-1} (kx + l) + \ldots + b_{m-1} \operatorname{tg} (kx + l) + b_m.$$

После переноса всех членов в левую часть и приведения подобных членов получаем снова уравнение IV типа:

$$c_0 \operatorname{tg}^n (kx + l) + c_1 \operatorname{tg}^{n-1} (kx + l) + \ldots + c_{n-2} \operatorname{tg} (kx + l) + c_n = 0,$$

но более сложное, чем рассмотренные ранее. Заменой $\operatorname{tg} (kx + l) = z$ это уравнение сводится к алгебраическому уравнению n-й степени:

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \ldots + c_{n-1} z + c_n = 0.$$

Допустим, что мы решили это уравнение и из всех его корней отобрали действительные корни $z_1, z_2, \ldots z_p$, тогда обратная замена приведет нас к уравнениям I типа:

$$\operatorname{tg} (kx + l) = z_1 \quad \operatorname{tg} (kx + l) = z_2, \ldots, \quad \operatorname{tg} (kx + l) = z_p \quad (p \leqslant n).$$

Решая их, получаем искомые значения неизвестных:

$$kx_1 + l = \operatorname{arctg} z_1 + \pi n, \quad \text{откуда} \quad x_1 = \frac{1}{k} [\operatorname{arctg} z_1 + \pi n - l];$$

$$kx_2 + l = \operatorname{arctg} z_2 + \pi n, \quad \text{откуда} \quad x_2 = \frac{1}{k} [\operatorname{arctg} z_2 + \pi n - l];$$

$$kx_p + l = \operatorname{arctg} z_p = \pi n, \quad \text{откуда} \quad x_p = \frac{1}{k} [\operatorname{arctg} z_p + \pi n - l].$$

Аналогично решаются и другие уравнения IV типа. Понятно, что разрешимость таких уравнений зависит только от того, сумеем ли мы или нет решить те алгебраические уравнения, к которым они сводятся. Имея в виду читателя, владеющего лишь элементарной алгеброй, даем в этом курсе только простейшие уравнения данного типа.

Упражнения.

1. Решить следующие уравнения:

$$1)\ \cos 2x + \frac{1}{4\cos 2x} = 2; \qquad 2)\ \sqrt{\operatorname{tg} x + 1} - \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} = 1.$$

2. Найти угол наклона образующей конуса (прямого кругового) к плоскости основания, если известно, что объем конуса в m раз больше объема вписанного в него шара.

Указание. Задача сводится к уравнению

$$2m \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - 2m \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = 0, \quad \text{где } x \text{ — искомый угол.}$$

§ 49. Тригонометрические уравнения V типа $f_1[T_1(a_1x + b_1)] \cdot f_2[T_2(a_2x + b_2)] \ldots f_k[T_k(a_kx + b_k)] = 0$, где левая часть есть произведение функций вида левой части уравнений IV типа

Уравнение типа

$$f_1[T_1(a_1x + b_1)] \cdot f_2[T_2(a_2x + b_2)] \ldots f_k[T_k(a_kx + b_k)] = 0$$

сводится непосредственно к уравнениям IV типа.

В самом деле, произведение равняется нулю в том и только в том случае, когда по крайней мере один из сомножителей равен нулю, а другие сомножители не теряют при этом смысла. Приравнивая нулю каждый сомножитель левой части, получим k уравнений IV типа: $f_1[T_1(a_1x + b_1)] = 0$, $f_2[T_2(a_2x + b_2)] = 0, \ldots, f_k[T_k(a_kx + b_k)] = 0$. Внеся замену: $T_1(a_1x + b_1) = z_1$, $T_2(a_2x + b_2) = z_2, \ldots$, $T_k(a_kx + b_k) = z_k$, получим k алгебраических уравнений:

$$f_1(z_1) = 0, \ f_2(z_2) = 0, \ldots, f_k(z_k) = 0.$$

Предполагая, что алгебра дает средства для решения этих уравнений, находим их корни. Пусть действительными корнями оказались следующие значения аргументов:

$$z_1 = \alpha_1, \ \alpha_2, \ldots \alpha_n;$$
$$z_2 = \beta_1, \ \beta_2, \ldots \beta_m;$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$z_k = \lambda_1, \ \lambda_2, \ldots \lambda_p.$$

Совершив обратную замену:

$$T_1(a_1x+b_1)=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_n;$$
$$T_2(a_2x+b_2)=\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ \beta_m;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_k(a_kx+b_k)=\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_p;$$

получаем $n+m+\ldots+p$ уравнения I типа, рассмотренных нами в § 45.

Остановимся на некоторых вопросах, приводящих к решению уравнений V типа.

1. Найти точки, в которых график функции

$$y=(4+7\cos^3x)(2-3\sin^2 2x)[6-\sin(x+1)-$$
$$-\sin^2(x+1)]$$

пересекает ось абсцисс.

Вычерчивание графика отняло бы много времени, целесообразнее искать ответ аналитическим методом.

Известно, что у каждой точки графика, лежащей на оси абсцисс, ордината y равна 0, поэтому задача сводится к отысканию тех значений x, при которых функция $y=0$, т. е. к решению уравнения:

$(4+7\cos^3x)(2-3\sin^2 2x)[6-\sin(x+1)-\sin^2(x+1)]=0.$ (*)

Это уравнение V типа; решаем его, как указано выше:

1) $4+7\cos^3x=0;$
2) $2-3\sin^2 2x=0;$
3) $6-\sin(x+1)-\sin^2(x+1)=0$

} уравнения IV типа.

Производим замену $\cos x=z_1$, $\sin 2x=z_2$ и $\sin(x+1)=z_3$, приходим к алгебраическим уравнениям:

1) $4+7z_1^3=0$, 2) $2-3z_2^2=0$ и 3) $6-z_3-z_3^2=0.$

Решаем каждое из этих уравнений:

1) $z_1^3=-\frac{4}{7}$; $z_1=\sqrt[3]{-\frac{4}{7}}\approx-0{,}830;$

2) $z_2^2=\frac{2}{3}$; $z_2=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\approx\pm 0{,}8165;$

3) $z_3^2+z_3-6=0$; $z_3=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$;

$z_3'=\frac{-1+5}{2}=2$; $z_3''=\frac{-1-5}{2}=-3.$

Производим обратную замену, получаем уравнения I типа и решаем их:

1) $\cos x \approx -0{,}830$, откуда $x_1 \approx \pm 2{,}55 + 2\pi n$;

2) $\sin 2x \approx +0{,}8165$, откуда $2x_2 \approx 0{,}9553\,(-1)^n + \pi n$,

$$x_2 \approx 0{,}4776\,(-1)^n + \frac{1}{2}\pi n;$$

3) $\sin 2x \approx -0{,}8165$, откуда $2x_3 \approx -0{,}9553\,(-1)^n + \pi n$;

$$x_3 \approx -0{,}4776\,(-1)^n + \frac{1}{2}\pi n;$$

4) $\sin(x+1) = 2$ не имеет решений;

5) $\sin(x+1) = -3$ не имеет решений.

Все найденные нами значения x являются корнями уравнения (*), так как каждое из этих значений обращает в нуль один из сомножителей левой части этого уравнения, а другие сомножители при этом значении x не теряют смысла; последнее мы не проверяем потому, что в данном уравнении все сомножители имеют смысл (определены) при всяком значении x.

Итак, мы нашли абсциссы искомых точек:

$$x_1 \approx \pm 2{,}55 + 2\pi n,$$

$$x_{2,3} \approx \pm 0{,}4776\,(-1)^n + \frac{1}{2}\pi n, \quad \text{где } n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots,$$

следовательно, можно построить и сами точки; их будет бесконечное множество.

2) Может ли функция $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}(1+\cos x)$ принимать нулевые значения?

Чтобы ответить на этот вопрос, надо рашить уравнение:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}(1+\cos x) = 0. \qquad (*)$$

Это уравнение V типа; оно распадается на два уравнения:

$$1)\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0; \quad 2)\ 1+\cos x = 0. \qquad (**)$$

Из первого уравнения получаем $\frac{x}{2} = \pi n$, или $x_1 = 2\pi n$. Из второго: $\cos x = -1$, откуда $x_2 = \pi + 2\pi n$.

Можно ли быть уверенным, что все решения уравнений (**) будут решениями данного уравнения (*)? Нет,

так как один из сомножителей левой части уравнения есть функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, определенная не при всех значениях x. Для проверки следует подставить найденные значения x в этот сомножитель.

1) $\operatorname{tg}\frac{x_1}{2} = \operatorname{tg}\pi n = 0$, а другой сомножитель определен при всяком значении x, следовательно, $x_1 = 2\pi n$ — решение данного уравнения (*);

2) $\operatorname{tg}\frac{x_2}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ не существует, следовательно, $x_2 = \pi + 2\pi n$ не является решением уравнения (*).

Посмотрим, не будет ли это предельное (несобственное) решение?

$$\lim_{x \to x_2} \operatorname{tg}\frac{x}{2}(1 + \cos x) = \lim_{x \to x_2} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} 2\cos^2\frac{x}{2} = \lim_{x \to x_2} \sin x =$$

$= \sin x_2 = \sin(\pi + 2\pi n) = 0$ и предел правой части 0, следовательно, $x_2 = \pi + 2\pi n$ есть несобственное решение данного уравнения. Итак, данная функция принимает нулевые значения при $x = 2\pi n$ (n — произвольное целое число); а если x стремится к $\pi + 2\pi n$, то она также стремится к 0, так как $\lim\limits_{x \to (\pi + 2\pi n)} \operatorname{tg}\frac{x}{2}(1 + \cos x) = 0$.

Упражнения.

Решить следующие уравнения:

1) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 2x \sin 3x = 0$; 2) $\frac{1 - \cos x}{\sin 2x} = 0$;

3) $2\sin(1 - x)\cos(1 - x) = \cos(1 - x)$.

§ 50. Тригонометрические уравнения VI типа $f[\sin(ax + b), \cos(ax + b), \operatorname{tg}(ax + b), \operatorname{ctg}(ax + b) \sec(ax + b), \operatorname{csc}(ax + b)] = 0$, где выполняются алгебраические действия над несколькими круговыми функциями одного аргумента

а) Решим следующую задачу:

Профиль дорожной насыпи имеет форму равнобочной трапеции, у которой боковые стороны равны меньшему основанию, а высота вдвое меньше большего основания.

Определить углы этого профиля.

1. Составление уравнения

1. Допустим, задача решена—возьмем произвольный рисунок равнобочной трапеции $ABCD$ (рис. 134).

2. Обозначим через x угол профиля при большем основании, а через y — боковую сторону трапеции.

3. Выражаем через x и y высоту трапеции BB' и ее большее основание AD:

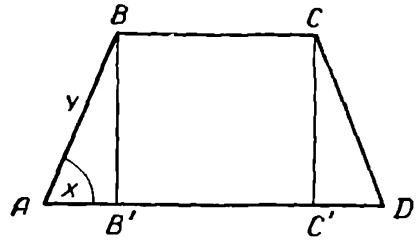


Рис. 134.

$$BB' = y \sin x;$$

$$AD = AB' + B'C' + C'D =$$

$$= 2AB' + BC = 2y \cos x +$$

$$+ y = y(2\cos x + 1).$$

4. По условию задачи имеем: $2BB' = AD$, т. е.

$$2y \sin x = y(2\cos x + 1),$$

откуда

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2}.$$

Получили уравнение VI типа с двумя круговыми функциями от одного и того же аргумента.

2. Решение уравнения через сведéние к одной функции одного аргумента

1. Выражаем синус через косинус по формуле (26):

$$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos x = \frac{1}{2}.$$

2. Уединяем радикал и возводим в квадрат:

$$1 - \cos^2 x = \cos^2 x + \cos x + \frac{1}{4},$$

или $8\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$ (уравнение IV типа).

3. Вносим замену: $\cos x = z$, получаем алгебраическое уравнение

$$8z^2 + 4z - 3 = 0,$$

откуда

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{8} \approx \frac{-2 \pm 5{,}2915}{8};$$

$$z_1 \approx 0{,}4114; \quad z_2 \approx -0{,}9114.$$

4. Обратная замена дает уравнения I типа:

$$\cos x_1 \approx 0{,}4114 \quad \text{и} \quad \cos x_2 \approx -0{,}9114,$$

откуда

$$x_1 \approx \pm 65°40' + 360°n;$$

$$x_2 \approx \pm 114°20' + 360°n.$$

5. Делаем проверку, так как при решении уравнение возвышали в квадрат.

1) $\sin x_1 - \cos x_1 = \sin(\pm 65°40') - \cos(\pm 65°40') \approx$

$$\approx \pm 0{,}911 - 0{,}411 = \begin{cases} 0{,}500 = \frac{1}{2} \\ -1{,}322 \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, числа $(-65°40' + 360°n)$ не удовлетворяют уравнению.

2) $\sin x_2 - \cos x_2 = \sin(\pm 114°20') - \cos(\pm 114°20') \approx$

$$\approx \pm 0{,}911 + 0{,}411 = \begin{cases} 1{,}322 \neq \frac{1}{2} \\ -0{,}5 \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, уравнению удовлетворяют только числа $(65°40' + 360° \cdot n)$.

6. По смыслу задачи угол x острый, поэтому из всех корней уравнения надо взять только $x \approx 66°$ — частное решение уравнения.

Полученное в задаче уравнение VI типа мы свели к уравнению IV типа с помощью формул, выражающих зависимость между круговыми функциями. Такое сведение возможно для всякого уравнения VI типа.

В самом деле, пусть дано уравнение VI типа в общем виде:

$$f[\sin(ax+b),\ \cos(ax+b),\ \operatorname{tg}(ax+b),\ \operatorname{ctg}(ax+b),$$

$$\sec(ax+b),\ \operatorname{csc}(ax+b)] = 0.$$

Ради краткости записи внесем обозначение: $ax + b = z$, получим:

$$f(\sin z,\ \cos z,\ \operatorname{tg} z,\ \operatorname{ctg} z,\ \sec z,\ \operatorname{csc} z) = 0.$$

Выражаем все функции через одну, например, $\sin z$, имеем:

$$f\left(\sin z, \pm\sqrt{1-\sin^2 z}, \frac{\sin z}{\pm\sqrt{1-\sin^2 z}}, \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sin z}, \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 z}}, \frac{1}{\sin z}\right) = 0,$$

короче:

$$F(\sin z) = 0,$$

где F также характеристика алгебраических действий, совершаемых в уравнении над $\sin z$, но она, вообще говоря, выражает более сложные операции чем прежняя характеристика f. Так, например, в уравнении

$$\sin x - \cos x - \frac{1}{2} = 0$$

характеристика f выражает только последовательное выполнение двух операций вычитания, тогда как новая характеристика F в преобразованном уравнении

$$\pm\sqrt{1-\cos^2 z} - \cos x - \frac{1}{2} = 0,$$

кроме прежних действий, выражает вычитание под корнем с последующим извлечением корня, который берется к тому же с двумя знаками.

Полученное уравнение $F(\sin z) = 0$ принадлежит к IV типу, а потому способ его решения уже изложен в § 48.

Необходимо отметить, что хотя указанный способ сведéния уравнений VI типа к IV типу применим всегда, пользоваться им в большинстве случаев невыгодно, так как получающееся при этом уравнение оказывается, как правило, очень громоздким и много иррациональным. Поэтому на практике в тех случаях, когда это возможно, используют другие приемы решения таких уравнений.

Так, например, рассмотренное нами выше уравнение

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$$

можно решить следующим образом:

$$\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2};$$

$$2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2};$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{ — (уравнение I типа),}$$

откуда $x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+\pi n$ и т. д.

В поисках таких частных приемов полезно выделение из VI типа уравнений некоторых подтипов, которые ради краткости будем обозначать через VI_1, VI_2, VI_3 и т. д.

б) К подтипу VI_1 отнесем уравнения вида:

$$R(\sin z,\ \cos z,\ \operatorname{tg} z,\ \operatorname{ctg} z,\ \sec z,\ \operatorname{csc} z)=0,$$

где $z=ax+b$, а R — характеристика только рациональных алгебраических операций над указанными круговыми функциями одного аргумента.

Такие уравнения сводятся к рациональным алгебраическим уравнениям с помощью подстановки: $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=y$.

В самом деле, используя соответствующие формулы, будем иметь:

$$\sin z=\frac{\sin 2\left(\frac{z}{2}\right)}{1}=\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2}+\sin^2\frac{z}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}=$$

$$=\frac{2y}{1+y^2};$$

$$\cos z=\frac{\cos 2\left(\frac{z}{2}\right)}{1}=\frac{\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2}+\sin^2\frac{z}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}=$$

$$=\frac{1-y^2}{1+y^2};$$

$$\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} 2\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}=\frac{2y}{1-y^2};$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z} = \frac{1-y^2}{2y}; \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{1+y^2}{1-y^2};$$

$$\operatorname{csc} z = \frac{1}{\sin z} = \frac{1+y^2}{2y}.$$

Таким образом, каждая из шести круговых функций выразилась рациональными операциями через y:

$$\left.\begin{aligned} &\sin z = \frac{2y}{1+y^2}, \quad \cos z = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{2y}{1-y^2} \\ &\operatorname{ctg} z = \frac{1-y^2}{2y}, \quad \sec z = \frac{1+y^2}{1-y^2}, \quad \operatorname{csc} z = \frac{1+y^2}{2y} \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Осуществив замену в данном уравнении, получаем уравнение

$$R\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1-y^2}, \frac{1-y^2}{2y}, \frac{1+y^2}{1-y^2}, \frac{1+y^2}{2y}\right) = 0,$$

где над аргументом y совершаются только рациональные операции, а потому его можно записать короче так:

$$R_1(y) = 0,$$

где через R_1 обозначена характеристика всех рациональных операций, производимых в уравнении над y.

Используя соответствующие методы алгебры, находим действительные корни этого уравнения:

$$y = p_1, p_2, \ldots, p_m.$$

Обратной заменой получаем уравнения I типа:

$$\operatorname{tg} \frac{ax+b}{2} = p_1, \quad \operatorname{tg} \frac{ax+b}{2} = p_2, \ldots, \operatorname{tg} \frac{ax+b}{2} = p_m.$$

Примечание. Если данное уравнение имеет корни $z = \pi(2k+1)$, то, решая уравнение с помощью подстановки $\operatorname{tg} \frac{z}{2} = y$, мы их потеряем, так как $\operatorname{tg} \frac{z}{2}$ теряет смысл при $z = \pi(2k+1)$. Чтобы избежать потери корней, надо до решения уравнения или в конце проверить, не будут ли его корнями числа $z = \pi(2k+1)$.

Пример. Применив подстановку $\operatorname{tg} \frac{z}{2} = y$ к уравнению $\sin z - \cos z = 1$, получаем: $\frac{2y}{1+y^2} - \frac{1-y^2}{1+y^2} = 1$, откуда $y = 1$, следовательно, $\operatorname{tg} \frac{z}{2} = 1$, $\frac{z}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Проверяем, не будут ли корнями уравнения числа: $z = \pi(2k+1)$, $\sin \pi(2k+1) - \cos \pi(2k+1) = 1$, следовательно, $z_2 = \pi(2k+1)$.

Решим таким способом следующее уравнение:

$$\sin x + \cos x - \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - \sec x - \csc x = 0.$$

В соответствии с подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$ заменяем слагаемые по формулам (60), получаем:

$$\frac{2y}{1+y^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2} - \frac{2y}{1-y^2} - \frac{1-y^2}{2y} - \frac{1+y^2}{1-y^2} - \frac{1+y^2}{2y} = 0.$$

После преобразований имеем:

$$3y^4 + 4y^3 + 1 = 0,$$

или

$$3y^3(y+1) + (y+1)(y^2 - y + 1) = 0;$$

$$(y+1)(3y^3 + y^2 - y + 1) = 0.$$

Откуда: 1) $y + 1 = 0$ и следовательно $y_1 = -1$;

2) $3y^3 + y^2 - y + 1 = 0.$

Умножаем на 9:

$$27y^3 + 9y^2 - 9y + 9 = 0,$$

$$(3y)^3 + (3y)^2 - 3(3y) + 9 = 0.$$

Вносим замену $3y = u$, имеем:

$$u^3 + u^2 - 3u + 9 = 0. \qquad (*)$$

Находим делители свободного члена (9): ± 1; ± 3; ± 9. Подстановкой делителей в уравнение проверяем, нет ли среди них корня. Оказывается, $u_1 = -3$ есть корень уравнения.

Делим левую часть уравнения на $u + 3$, получаем:

$$u^3 + u^2 - 3u + 9 = (u+3)(u^2 - 2u + 3).$$

Находим остальные корни из уравнения

$$u^2 - 2u + 3 = 0;$$

$$u_{2;3} = 1 \pm \sqrt{1-3} = 1 \pm \sqrt{-2}.$$

Эти корни не пригодны, так как круговые функции не принимают мнимых значений[1], следовательно, мы можем использовать только один действительный корень: $u_1 = -3$.

Совершаем обратную замену: $3y = -3$; откуда $y_2 = -1$, т. е. $y_2 = y_1 = -1$.

[1] Существует более общее понятие о круговых функциях от комплексного аргумента. Оно рассмотрено в третьей части этой книги.

Дальнейшая обратная замена дает тригонометрическое уравнение I типа:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = -1,$$

откуда $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ и $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Покажем, что полученное решение является предельным решением.

Так как $2\pi n$ — число, кратное периоду любой из круговых функций, то достаточно проверить частное решение $x = -\frac{\pi}{2}$. Подставляем его в уравнение, получаем:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) -$$

$$- \sec\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{csc}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 0 -$$

$$- \sec\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1$$

выражение, не имеющее смысла, так как тангенс и секанс не определены при $x = -\frac{\pi}{2}$.

Находим предельное значение левой части уравнения

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x - \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x - \sec x - \operatorname{csc} x) =$$

$$= \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x - \operatorname{ctg} x - \operatorname{csc} x) + \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} (-\operatorname{tg} x - \sec x) =$$

$$= 0 + \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} [\operatorname{tg}(-x) - \sec(-x)] = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2(-x) - \sec^2(-x)}{\operatorname{tg}(-x) + \sec(-x)} =$$

$$= \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{\operatorname{tg}(-x) + \sec(-x)} = 0,$$

так как знаменатель стремится в бесконечность.

Итак, при стремлении x к $-\frac{\pi}{2}$ в пределе получаем в левой и в правой частях 0.

Замечание. Несмотря на то что подстановкой $\operatorname{tg}\frac{ax+b}{2} = y$ можно свести к рациональному алгебраическому уравнению всякое тригонометрическое уравнение подтипа $1V_1$, на практике эта подстановка часто оказывается неудобной, так как приводит к уравнениям высокой степени.

Так, например, если решать уравнение

$$\cos^2 x + \frac{3}{4}\sin x - 1\frac{1}{8} = 0$$

с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$, то получаем:

$$\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 + \frac{3}{4}\cdot\frac{2y}{1+y^2} - 1\frac{1}{8} = 0$$

или после преобразования

$$7y^4 - 12y^3 + 22y^2 - 12y + 7 = 0 \text{ и т. д.}$$

А между тем это же уравнение решается весьма просто первым способом, т. е. сведением к одной функции.

В самом деле, косинус входит в уравнение в четной степени и поэтому выражается рационально через синус:

$$1-\sin^2 x + \frac{3}{4}\sin x - 1\frac{1}{8} = 0.$$

Получили уравнение второго типа:

$$\sin^2 x - \frac{3}{4}\sin x + \frac{1}{8} = 0.$$

Заменой $\sin x = y$ приводим его к квадратному уравнению

$$y^2 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{8} = 0,$$

откуда

$$y = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{1}{8}} = \frac{3}{8} \pm \frac{1}{8},$$

$$y_1 = \frac{1}{2}; \qquad y_2 = \frac{1}{4}.$$

Обратная замена дает уравнения 1 типа:

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ и } \sin x = \frac{1}{4}.$$

откуда

$$x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x_2 = (-1)^n \arcsin\frac{1}{4} + \pi n \approx (-1)^n\, 0{,}2533 + \pi n,$$

где n — любое целое число.

Понятно, что этот способ с успехом применим к таким уравнениям VI типа, которые содержат только синус и косинус, причем одну из этих функций лишь в четных степенях.

в) К подтипу VI_2 отнесем уравнения однородные, относительно синуса и косинуса одного и того же аргумента, не содержащие других функций.

Предварительно дадим определения:

I. Функцию вида $f(\sin z, \cos z)$ называют однородной относительно $\sin z$ и $\cos z$, если при любом положительном числе k выполняется соотношение:

$$f(k\sin z,\ k\cos z) = k^n \cdot f(\sin z,\ \cos z),$$

при этом показатель n называют степенью однородности функции.

Пример. Функция $f(\sin z,\ \cos z) = 5\sin z - \sqrt{\sin^2 z + 3\cos^2 z}$ является однородной относительно $\sin z$ и $\cos z$ первой степени однородности, так как

$$f(k\sin z, k\cos z) = 5k\sin z - \sqrt{(k\sin z)^2 + 3(k\cos z)^2} =$$

$$= k(5\sin z - \sqrt{\sin^2 z + 3\cos^2 z}) = k \cdot f(\sin z,\ \cos z).$$

II. Тригонометрическое уравнение вида

$$f(\sin z,\ \cos z) = 0$$

называют однородным относительно $\sin z$ и $\cos z$, если функция $f(\sin z, \cos z)$ является однородной относительно $\sin z$ и $\cos z$.

Именно такие уравнения мы относим к подтипу VI_2.

Примеры уравнений данного вида:

1) $3\sin^2 z + 2\sin z\cos z - \cos^2 z = 0$;

2) $\sin^3 z\cos z - 2\sin^2 z\cos^2 z = 3\sin z\cos^3 z - 6\cos^4 z$;

3) $3\sin z + \sqrt{\sin^2 z + 3\cos^2 z} = 5\cos z$.

Уравнения этого типа сводятся к предшествующим типам подстановкой $\operatorname{tg} z = t$ или (что то же самое) $\sin z = t\cos z$.

Покажем это на решении записанных выше уравнений.

1) Осуществляя замену $\sin z = t\cos z$ в уравнении

$$3\sin^2 z + 2\sin z\cos z - \cos^2 z = 0,$$

получаем:

$$3t^2\cos^2 z + 2t\cos^2 z - \cos^2 z = 0,$$

или

$$\cos^2 z\,(3t^2 + 2t - 1) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\cos^2 z = 0 \text{ и } 3t^2 + 2t - 1 = 0.$$

Нетрудно проверить, что в данном уравнении $\cos z$ не может равняться нулю. В самом деле, если $\cos z = 0$, то $\sin z = \pm 1$; подстановка в уравнение дает:

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot (\pm 1) \cdot 0 - 0 \neq 0.$$

Следовательно, остается решить уравнение

$$3t^2 + 2t - 1 = 0,$$

из которого находим

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3}, \quad t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = -1.$$

Обратная замена дает:

$$(\operatorname{tg} z)_1 = \frac{1}{3}, \quad z_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n \approx 0{,}321 + \pi n;$$

$$(\operatorname{tg} z)_2 = -1, \; z_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

2) Производим подстановку $\sin z = t \cos z$ в уравнение 2), получим:

$$t^3 \cdot \cos^4 z - 2t^2 \cos^4 z = 3t \cos^4 z - 6 \cos^4 z,$$

или

$$\cos^4 z (t^3 - 2t^2 - 3t + 6) = 0.$$

Уравнение распадается на два:

$$\cos^4 z = 0 \text{ и } t^3 - 2t^2 - 3t + 6 = 0.$$

Нетрудно видеть, что значение $\cos z = 0$ удовлетворяет данному уравнению поэтому $z = \frac{\pi}{2} + \pi n$ есть его решение.

Левую часть уравнения

$$t^3 - 2t^2 - 3t + 6 = 0$$

разлагаем на множители:

$$t^2 (t-2) - 3 (t-2) = 0,$$

$$(t-2)(t^2 - 3) = 0,$$

$$(t-2)\left(t - \sqrt{3}\right)\left(t + \sqrt{3}\right) = 0,$$

откуда

$$t_1 = 2, \; t_2 = \sqrt{3}, \; t_3 = -\sqrt{3}.$$

Совершаем обратную замену:

$$(\operatorname{tg} z)_1 = 2, \; (\operatorname{tg} z)_2 = \sqrt{3}, \; (\operatorname{tg} z)_3 = -\sqrt{3},$$

откуда находим:

$$z_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n \approx 1{,}065 + \pi n,$$

$$z_2 = \frac{\pi}{3} + \pi n,$$

$$z_3 = -\frac{\pi}{3} + \pi n.$$

3) Осуществляем подстановку $\sin z = t \cos z$ в уравнении

$$3 \sin z + \sqrt{\sin^2 z + 3\cos^2 z} = 5 \cos z,$$

получаем:

$$3t \cdot \cos z + \sqrt{t^2 \cos^2 z + 3\cos^2 z} = 5 \cos z,$$

или

$$\cos z \,(3t + \sqrt{t^2 + 3} - 5) = 0,$$

а это уравнение распадается на два:

(1) $\cos z = 0$;

(2) $3t + \sqrt{t^2 + 3} - 5 = 0$.

Значение $\cos z = 0$ не удовлетворяет данному уравнению; действительно, если $\cos z = 0$, то $\sin z = \pm 1$; подстановка в уравнение дает:

$$3(\pm 1) + \sqrt{1 + 3 \cdot 0} \neq 5 \cdot 0.$$

Остается решить уравнение (2):

$$\sqrt{t^2 + 3} = 5 - 3t,$$

$$t^2 + 3 = 25 - 30t + 9t^2,$$

$$4t^2 - 15t + 11 = 0;$$

откуда

$$t_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 176}}{8}, \qquad t_1 = \frac{15 + 7}{8} = \frac{11}{4},$$

$$t_2 = \frac{15 - 7}{8} = 1.$$

Так как в процессе решения возвышали уравнение в квадрат, то полученные корни следует проверить. Подстановка показывает, что уравнению (2) удовлетворяет лишь корень $t_2 = 1$.

Обратная замена дает: $\operatorname{tg} z = 1$, $z = \frac{\pi}{4} + \pi n$. Это и есть общее решение данного уравнения.

4. Некоторые виды уравнений допускают различные приемы решений. Покажем это на уравнении вида

$$a \sin z + b \cos z = c \quad (z = kx + l),$$

которое мы отнесем к подтипу VI_3.

Решение проведем:

α) На частном примере	β) В общем виде
$2 \sin x - 3 \cos x = 1$[1]	$a \sin x + b \cos x = c$[1]

Прием 1

1. Сводим уравнение к одной функции, например к косинусу:

$2\left(\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}\right) = 1 + 3 \cos x$	$a\left(\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}\right) = c - b \cos x.$

2. Освобождаемся от радикала возведением в квадрат:

$4 - 4 \cos^2 x = 1 + 6 \cos x + 9 \cos^2 x$	$a^2 - a^2 \cos^2 x = c^2 - 2bc \cos x + b^2 \cos^2 x,$

получаем уравнение IV типа:

$13 \cos^2 x + 6 \cos x - 3 = 0.$	$(a^2 + b^2) \cos^2 x - 2bc \cos x + (c^2 - a^2) = 0.$

3. Сводим уравнение к алгебраическому заменой $\cos x = y$:

$13 y^2 + 6y - 3 = 0$	$(a^2 + b^2) y^2 - 2bcy + (c^2 - a^2) = 0.$

4. Решаем полученное квадратное уравнение:

$y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 39}}{13} \approx \approx \frac{-3 \pm 6{,}9}{13},$ $y_1 \approx 0{,}30,\ y_2 \approx -0{,}76$	$y_{1,2} = \frac{bc \pm \sqrt{a^2 (a^2 + b^2 - c^2)}}{a^2 + b^2},$ если $a^2 + b^2 \geqslant c^2$, то y_1 и y_2 — действительные числа.

[1] Ради краткости записи мы взяли $z = x$. Приемы решения нисколько не изменятся, если брать $z = kx + l$.

5. Обратной заменой получаем:

$$\cos x_1 \approx 0{,}30;$$
$$x_1 \approx \pm \arccos 0{,}30 + 2\pi n;$$
$$\cos x_{II} \approx -0{,}76;$$
$$x_{II} \approx \pm \arccos(-0{,}76) + 2\pi n$$

или $x_1 \approx \pm 1{,}27 + 2\pi n$,

$x_{II} \approx \pm 2{,}43 + 2\pi n$.

$$\cos x_1 = \frac{bc + a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2};$$

$$\cos x_{II} = \frac{bc - a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2},$$

если $\left|\frac{cb \pm a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}\right| \leqslant 1$, то

$$x_1 = \pm \arccos \frac{bc + a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} + 2\pi n,$$

$$x_{II} = \pm \arccos \frac{bc - a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2} + 2\pi n.$$

6. Так как в процессе решения уравнение возводили в квадрат, то полученные корни необходимо проверить подстановкой их в данное уравнение.

Проверяем корни уравнения с числовыми коэффициентами. Подстановка x_1 дает:

$$2\sin(\pm \arccos 0{,}30 + 2\pi n) - 3\cos(\pm \arccos 0{,}30 + 2\pi n) = \pm 2\sin(\arccos 0{,}30) - 3\cos(\arccos 0{,}30) =$$

$$= \pm 2\sqrt{1 - 0{,}30^2} - 3 \cdot 0{,}30 \approx \pm 2 \cdot 0{,}95 - 0{,}90 = \begin{cases} 1 \\ -2{,}8. \end{cases}$$

Следовательно, удовлетворяет только $x_1' \approx \pm \arccos 0{,}30 + 2\pi n \approx 1{,}27 + 2\pi n$.

Аналогичным путем убеждаемся в пригодности решения

$$x_{II}'' = -\arccos(-0{,}76) + 2\pi n \approx -2{,}43 + 2\pi n.$$

Прием 2

1. Выражаем $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$ по формулам (60), получим:

$$2 \cdot \frac{2y}{1 + y^2} - 3 \cdot \frac{1 - y^2}{1 + y^2} = 1$$

или $y^2 + 2y - 2 = 0$

$$a \cdot \frac{2y}{1 + y^2} + b\,\frac{1 - y^2}{1 + y^2} = c$$

или $(c + b)\,y^2 - 2ay + (c - b) = 0$

2. Решаем полученные уравнения:

$y_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$;
$y_1 \approx 0{,}73,\ y_2 \approx -2{,}73$

$y_{1,2} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}$

3. Осуществляем обратную замену:

$\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)_1 \approx 0{,}73;\ \left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)_{II} \approx -2{,}73,$

откуда:

$\left(\dfrac{x}{2}\right)_1 \approx \operatorname{arctg} 0{,}73 + \pi n$

$\left(\dfrac{x}{2}\right)_{II} \approx \operatorname{arctg}(-2{,}73) + \pi n$

$x_1 \approx 2 \operatorname{arctg} 0{,}73 + 2\pi n \approx 1{,}27 + 2\pi n$

$x_{II} \approx 2 \operatorname{arctg}(-2{,}73) + 2\pi n \approx -2{,}44 + 2\pi n$

$\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)_{1,II} = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}$, если $a^2 + b^2 \geqslant c^2$,

откуда

$\left(\dfrac{x}{2}\right)_{1,II} = \operatorname{arctg}\dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + \pi n$

$x_1 = 2\operatorname{arctg}\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + 2\pi n,$

$x_{II} = 2\operatorname{arctg}\dfrac{a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + 2\pi n$

Прием 3

1. Сводим уравнение к виду VI_2 (к однородному) следующим образом:

$2\sin 2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 3\cos 2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1$

$4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} - 3\left(\cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}\right) = \sin^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{x}{2}$

$a\sin 2\left(\dfrac{x}{2}\right) + b\cos 2\left(\dfrac{x}{2}\right) = c \cdot 1$

$2a\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} + b\left(\cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}\right) = c\left(\sin^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{x}{2}\right)$

или	или
$\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$	$(b + c) \sin^2 \frac{x}{2} - 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + (c - b) \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$

2. Вносим замену $\sin \frac{x}{2} = t \cdot \cos \frac{x}{2}$, получаем:

$t^2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2t \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0$	$(b + c) t^2 \cos^2 \frac{x}{2} - 2at \cos^2 \frac{x}{2} + (c - b) \cos^2 \frac{x}{2} = 0,$
$\cos^2 \frac{x}{2} (t^2 + 2t - 2) = 0.$	$\cos^2 \frac{x}{2} [(b + c) t^2 - 2at + (c - b)] = 0.$
Значение $\cos \frac{x}{2} = 0$ не удовлетворяет данному уравнению, следовательно, остается: $t^2 + 2t - 2 = 0.$	Если $b + c \neq 0$, то $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ (что проверяем подстановкой в данное уравнение) и тогда имеем: $(b+c) t^2 - 2at + (c - b) = 0.$

Продолжение решения надо смотреть в предшествующем приеме.

Прием 4

(на основе введения вспомогательного угла)

1. Разделим уравнение на коэффициент при синусе (или косинусе):

$\sin x - \frac{3}{2} \cos x = \frac{1}{2}$	$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$

2. Вводим вспомогательный угол φ:

$\sin x - \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{1}{2},$	$\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x = \frac{c}{a},$
где	где
$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} 1{,}5$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$

3. Преобразуем уравнение так:

$$\sin x - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x\cos\varphi - \sin\varphi\cos x = \frac{1}{2}\cos\varphi$$

$$\sin(x-\varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi.$$

$$\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi.$$

4. Получили уравнение I типа, решаем его:

$$x - \varphi = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{2}\cos\varphi\right) + \pi n,$$

$$x = \varphi + (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{2}\cos\varphi\right) + \pi n$$

Убедимся в том, что это решение совпадает с теми, которые были получены выше другими приемами:

$$\varphi \approx \operatorname{arctg} 1{,}5 \approx 0{,}983;$$

$$\cos\varphi \approx \cos 0{,}983 \approx 0{,}555;$$

$$\frac{1}{2}\cos\varphi \approx 0{,}277;$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\cos\varphi\right) \approx$$

$$\approx \arcsin 0{,}277 \approx 0{,}281;$$

$$x \approx 0{,}983 + (-1)^n \times 0{,}281 + \pi n.$$

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right) + \pi n,$$

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right) + \pi n,$$

если $\left|\frac{c}{a}\cos\varphi\right| \leqslant 1$.

Отметим, что это требование равносильно следующему $a^2 + b^2 \geqslant c^2$.

Действительно, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, следовательно,

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2};$$

$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

При четном $n = 2k$ имеем:

$$x_I \approx 0{,}983 + 0{,}281 + 2\pi k \approx$$
$$\approx 1{,}26 + 2\pi k.$$

При нечетном $n = 2k - 1$ имеем:

$$x_{II} \approx 0{,}983 - 0{,}281 +$$
$$+ \pi(2k - 1) \approx 0{,}983 -$$
$$- 0{,}281 - 3{,}14 + 2\pi k \approx$$
$$\approx -2{,}44 + 2\pi k.$$

Итак, если $\left|\frac{c}{a}\cos\varphi\right| \leqslant 1$,

то $\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi = \frac{c^2}{a^2 + b^2} \leqslant 1$;

откуда $a^2 + b^2 \leqslant c^2$.

Обратно, если $a^2 + b^2 \geqslant c^2$,

то $\frac{c^2}{a^2 + b^2} \leqslant 1$,

а поэтому $\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \leqslant 1$

и $\left|\frac{c}{a}\cos\varphi\right| \leqslant 1$

Расхождение на 0,01 с предшествующими результатами объясняется только неточностью вычислений.

С уравнениями типа VI$_3$ приходится иметь дело всем, изучающим различные колебательные гармонические процессы, электротехникам, физикам и механикам.

Решим, например, следующую задачу:

Скорость течения реки v *м/сек*, а скорость моторной лодки в стоячей воде v_1 *м/сек*.

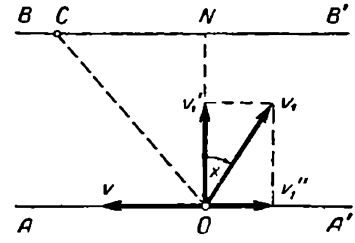


Рис. 135.

Под каким углом к направлению, перпендикулярному течению, должна двигаться лодка, чтобы, совершив прямолинейный путь, пристать к такому пункту противоположного берега, который расположен на l метров ниже по течению? Ширина реки h метров.

Изобразим схематически берега реки параллельными прямыми AA' и BB' (рис. 135), место отправления лодки обозначим через O, пункт, к которому лодка должна пристать, — через C, скорость течения изобразим вектором v, собственную скорость лодки — вектором v_1.

Вектор v_1 разложим на составляющие векторы v_1' и v_1'' по направлению, перпендикулярному течению и противоположному течению.

Обозначив через x искомый угол и через t время, за которое лодка совершит путь, будем иметь:

$$v_1' = v_1 \cos x, \qquad v_1'' = v_1 \sin x,$$

$$NC = l = (v - v_1'')\, t = (v - v_1 \sin x)t,$$

$$ON = h = v_1' t = v_1 \cos xt.$$

Чтобы исключить t, разделим одно из этих равенств на другое по частям, получим:

$$\frac{l}{h} = \frac{v - v_1 \sin x}{v_1 \cos x},$$

откуда $$h \sin x + l \cos x = h \cdot \frac{v}{v_1}.$$

Получили уравнение типа VI_3.

Решая его через введение вспомогательного угла φ, получаем:

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin\left(\frac{v}{v_1}\cos\varphi\right) + \pi n \text{ при условии,}$$

что $\left|\frac{v}{v_1}\cos\varphi\right| \leqslant 1$, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{h}$.

Если положить $v_1 = 2v$, $l = 1{,}5\ h$, то будем иметь:

$$\operatorname{tg}\varphi = 1{,}5; \qquad \varphi \approx 56°,$$

$$x \approx -56° + (-1)^n 16° + 180° n,$$

$$x_1 \approx -40° + 180° \cdot 2k,$$

$$x_{11} \approx -72° + 180°\ (2k + 1),$$

Условию задачи удовлетворяет только одно частное решение $x \approx -40°$. Отрицательный знак угла x показывает, что при заданных условиях направление лодки будет на 40° левее перпендикуляра ON.

Если предположить, что скорость течения $v = 0$, то получим:

$$x = -\varphi + \pi n;$$

частное решение при $n = 0$ будет $x_1 = -\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{h} = \frac{NC}{h}$. Как видим, в этом случае направление лодки будет совпадать с гипотенузой OC прямоугольного треугольника ONC, т. е. лодка будет направлена прямо на пункт C.

Упражнения.

1. Решить следующие уравнения:

1) $\dfrac{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \cos x} = \dfrac{9}{4}$;

2) $\sin^4 x + \cos^4 x = a^2$;

3) $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{csc} x + 2 = 0$;

4) $4 \sin (2x + 1) + 3 \cos (2x + 1) = 2$;

5) $23{,}0 \cos x + 14{,}3 \sin x = 26{,}1$;

6) $\sin x - \cos x + 4 \cos^2 x \sin x = 4 \sin^3 x$.

2. Тело M скользит вниз по наклонной плоскости под действием собственного веса (рис. 136). Коэффициент трения равен k. Каков должен быть угол наклона плоскости к горизонту, чтобы ускорение движения тела было в n раз меньше ускорения свободного падения?

Указание. $N = P \cos x$ — нормальное давление,
$T = kN = kP \cos x$ — сила трения,
$F = P \sin x$ — движущая сила (без наличия трения).

Следовательно, тело движется по плоскости под действием силы $f = F - T = P \sin x - k P \cos x = mg (\sin x - k \cos x)$, так как $P = mg$. По закону Ньютона $f = ma$, где a — ускорение движения тела, следовательно,

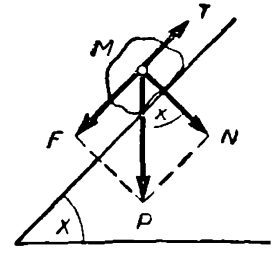


Рис 136

$$ma = mg (\sin x - k \cos x),$$

или $\dfrac{1}{n} = \sin x - k \cos x$, так как по условию $\dfrac{a}{g} = \dfrac{1}{n}$.

Найти решения уравнения при $k = 0{,}5$ и $n = 2$.

3. Человек, прилагая силу F, тяиет при помощи веревки тело веса P, находящееся на горизонтальной плоскости (рис. 137). Направление веревки проходит через центр тяжести O этого тела. Какой угол с горизонтом должна образовать сила F, чтобы тело двигалось равномерно, если коэффициент трения равен k?

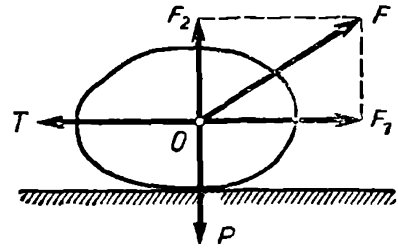


Рис. 137.

Указание. Разложим силу F на горизонтальную и вертикальную составляющие F_1 и F_2, тогда $F_1 = F \cos x$, $F_2 = F \sin x$. Для равномерного движения необходимо равенство силы F_1 и силы трения T. Но сила $T = kN$, где N — нормальное давление тела на плоскость; $N = P - F_2 = P - F \sin x$, следовательно,

$$T = k (P - F \sin x).$$

Таким образом, равенство $F_1 = T$ запишется так:

$$F \cos x = kP - kF \sin x .$$

Найти решение этого уравнения при $P = 50$ *кг*, $F = 20$ *кг* и $k = 0{,}4$.

4. Тело привязано к шнуру длиной l *м* (рис. 138). Шнур описывает коническую поверхность и совершает при этом n оборотов в минуту. Какой угол образует шнур с горизонтом?

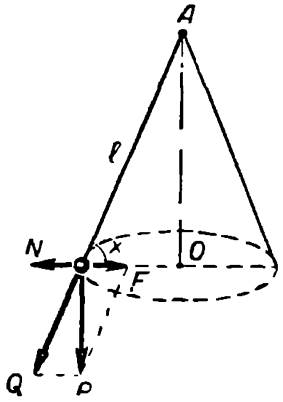


Рис. 138.

Указание. Вес тела $P = mg$ разлагаем на две составляющие силы: Q и F, где Q — сила растяжения шнура, а F — горизонтальная сила, уравновешивающаяся центробежной силой $N = \frac{mv^2}{R}$, где R — радиус окружности, описываемой центром тяжести тела, а v — линейная скорость вращения тела.

Так как $R = l \cos x$ и $v = \omega R$, то $N =$

$$= \frac{m \omega^2 R^2}{R} = m \omega^2 R.$$

Сила $F = P \operatorname{ctg} x = mg \operatorname{ctg} x$, поэтому равенство $F = N$ дает уравнение:

$$mg \operatorname{ctg} x = m \omega^2 l \cdot \cos x,$$

или $g \operatorname{ctg} x = \omega^2 l \cos x$ где $\omega = \frac{2 \pi n}{60}$ — угловое ускорение.

Найти решение этого уравнения при $n = 60$ и $l = 40$ *см*.

5. В прямоугольном треугольнике отношение суммы катетов к гипотенузе равно m. Найти острые углы треугольника.

§ 51. Тригонометрические уравнения VII типа $f[T(a_1x + b_1), T(a_2x + b_2), T(a_3x + b_3)] = 0$, где производятся какие-либо алгебраические действия над одной и той же круговой функцией с различными аргументами

Рассмотрим следующий вопрос:

По проводнику идет трехфазный ток с переменной силой, выраженной функцией:

$$I = 2 \sin 100t + 2 \sin \left(100t + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin \left(100t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Существуют ли такие моменты времени t, когда сила тока в проводнике достигает 4 ампер?

Ответ на этот вопрос сводится к решению уравнения:

$$2\sin 100t + 2\sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) = 4,$$

или

$$\sin 100t + \sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Это уравнение V типа; его можно свести к уравнению II типа следующим образом:

$$\left[\sin 100t + \sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right)\right] + \sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) = 2,$$

откуда, применив формулу (40), получаем:

$$2\sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} + \sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

Полученное уравнение сводим к I типу:

$$\sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right)\left(2\cos\frac{\pi}{4} + 1\right) = 2,$$

откуда

$$\sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2} + 1};$$

$$100t + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\frac{2}{\sqrt{2} + 1} + \pi n \approx$$

$$\approx (-1)^n \arcsin 0{,}8285 + \pi n \approx (-1)^n \cdot 0{,}9765 + \pi n;$$

$$t \approx 0{,}01\left[(-1)^n 0{,}9765 + \pi n - \frac{\pi}{4}\right] -$$

общее решение, состоящее из двух классов решений:

$$t_1 \approx 0{,}01\left[0{,}9765 + \pi \cdot 2k - \frac{\pi}{4}\right],$$

$$t_2 \approx 0{,}01\left[-0{,}9765 + \pi\,(2k+1) - \frac{\pi}{2}\right].$$

Итак, мы нашли те моменты времени t, когда сила тока в проводнике достигает 4 ампер.

Понятно, что рассмотренное уравнение разрешилось легко только потому, что аргументы синуса были соответствующим образом подобраны. Стоит только внести в

эти аргументы незначительные изменения, например взять

$$\sin 100t + \sin\left(99\frac{1}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(98t + \frac{\pi}{2}\right) = 2,$$

и полученное уравнение становится уже несводимым к предшествующим типам и вообще неразрешимым аналитическим методом (в конечном виде).

К уравнениям VII типа приводят многие задачи из физики и механики. Рассмотрим, например, следующую задачу.

При равновесии ломаного рычага BAC (рис. 139) на концы его отрезков AB и AC действуют силы R и Q. Длина $AB = l_1$, длина $AC = l_2$. Определить углы, образованные отрезками рычага с горизонтальной плоскостью, если один из этих углов в n раз больше другого. Вес рычага не учитывается.

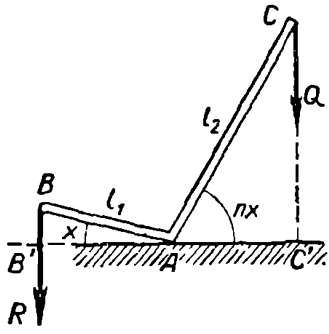


Рис. 139.

Обозначим один из искомых углов через x, тогда другой угол nx. Как известно из механики, для равновесия рычага необходимо равенство моментов, вращающих рычаг против часовой стрелки и по часовой стрелке.

Так как A — точка опоры рычага, AB' и AC' — плечи сил R и Q, приложенных к концам рычага, то моменты сил, вращающих рычаг, выразятся произведениями $R \cdot AB'$ и $Q \cdot AC'$ и по условию равновесия будем иметь:

$$R \cdot AB' = Q \cdot AC',$$

но $AB' = l_1 \cos x$, $AC' = l_2 \cos nx$, следовательно,

$$Rl_1 \cos x = Q\, l_2 \cos nx. \qquad (*)$$

Получили уравнение VII типа, разрешимое аналитическим методом только при некоторых значениях параметра n.

При натуральном значении n это уравнение сводится к целому алгебраическому уравнению n-й степени относительно $\cos x$, т. е. к типу IV.

Так, при $n = 3$ имеем: $\cos 3x = \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin^2 x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$;

уравнение (*) в этом случае примет вид:

$$Rl_1 \cos x = Ql_2 (4\cos^3 x - 3\cos x).$$

При $n = 2$ получаем уравнение:

$$Rl_1 \cos x = Ql_2 \cos 2x,$$

или

$$Rl_1 \cos x = Ql_2 (2\cos^2 x - 1).$$

Положив $\cos x = y$, получим

$$Rl_1 y = Ql_2 (2y^2 - 1),$$

или

$$2Ql_2 y^2 - Rl_1 y - Ql_2 = 0.$$

Откуда

$$y_{1,2} = \frac{Rl_1 \pm \sqrt{R^2 l_1^2 + 8Q^2 l_2^2}}{4Ql_2},$$

или $\cos x = \dfrac{Rl_1 \pm \sqrt{R^2 l_1^2 + 8Q^2 l_2^2}}{4Ql_2}$, если $|y_{1,2}| \leqslant 1$.

В частности, при $l_2 = 4l_1$ и $R = 2Q$ имеем:

$$\cos x = \frac{2Ql_1 \pm \sqrt{4Q^2 l_1^2 + 128Q^2 l_1^2}}{16Ql_1} = \frac{2 \pm \sqrt{132}}{16}.$$

$(\cos x)_1 \approx 0{,}8431$; $x_1 \approx 32°30'$; $(\cos x)_2 \approx -0{,}5306$; $x_2 \approx 122°$ — не удовлетворяет условию задачи, так как угол x — острый.

Следует отметить, что уравнение (*) возможно свести к IV типу тригонометрических уравнений и в том случае, когда n — число дробное.

Пусть, например, $n = \frac{17}{13}$, т. е.

$$Rl_1 \cos x = Ql_2 \cos \frac{17}{13} x.$$

Положив $\frac{1}{13} x = z$, получим:

$$Rl_1 \cos 13z = Ql_2 \cos 17z.$$

Остается теперь выразить $\cos 13z$ и $\cos 17z$ через $\cos z$ (что возможно повторным применением теоремы сложения) и получится алгебраическое уравнение 17-й степени относительно $\cos z$, т. е. уравнение IV типа.

Если алгебра даст нам средства для решения такого уравнения, то мы найдем значения $\cos z$ и, следовательно, определим z и $x = 13z$.

Нетрудно понять, что указанным преобразованием аргументов можно сводить к рассмотренным ранее типам уравнений такие тригонометрические уравнения VII типа, в которых аргументы круговых функций имеют «общее кратное». Если же такого «кратного» нет, то уравнение вообще неразрешимо аналитическим методом.

Так, например, никакими преобразованиями нельзя свести к предшествующим типам уравнение (*) при $n = \sqrt{5}$, т. е.

$$Rl_1 \cos x = Ql_2 \cos \sqrt{5}\, x.$$

Такое уравнение можно решить графическим методом, разумеется, при конкретных числовых значениях параметров.

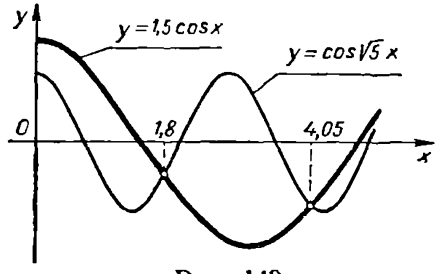


Рис. 140.

На рисунке 140 графическим методом решено уравнение

$$1{,}5 \cos x = \cos \sqrt{5}\, x$$

и получены приближенные значения его наименьших положительных корней: $x_1 \approx 1{,}8$, $x_2 \approx 4{,}05$.

Эти числа являются абсциссами точек пересечения графиков $y = 1{,}5 \cos x$ и $y = \cos \sqrt{5}\, x$ в той их части, которая изображена на рисунке.

Упражнения.

1. Решить следующие уравнения:

1) $\cos 3x = 4 \cos^2 x$;

2) $\cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x$;

3) $\operatorname{tg}(x + a) \operatorname{tg}(x - a) = m$;

4) $\sin x \sin 3x = 0{,}5$;

5) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

6) $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$;

7) $\sin(ax + b_1) \pm \sin(ax + b_2) = c$;

8) $\dfrac{\sin(ax+b_1)}{\sin(ax+b_2)} = m \ (m \neq 1)$ (применить производную пропорцию);

9) $\dfrac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x} = 2$ То же

10) $2\sin(1-x) = 3\sin(2-x)$ » »

11) $\sin(ax+b_1)\sin(ax+b_2) = c$;

12) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

2. В прямоугольный треугольник вписан круг, причем гипотенуза треугольника разделилась точкой касания в отношении $m:n$. Найти углы треугольника.

Указание. Задача сводится к уравнению

$$m \operatorname{tg} \frac{x}{2} - n \operatorname{tg}\left(45° - \frac{x}{2}\right) = 0, \quad \text{где}$$

x — один из острых углов треугольника.

3. Определить углы равнобедренного треугольника, у которого боковая сторона в n раз больше отрезка, соединяющего центр вписанного круга с вершиной угла при основании.

Указание. Задача сводится к уравнению:

$$\cos \frac{x}{2} - n \cos x = 0, \text{ где } x \text{ — угол при}$$

основании треугольника.

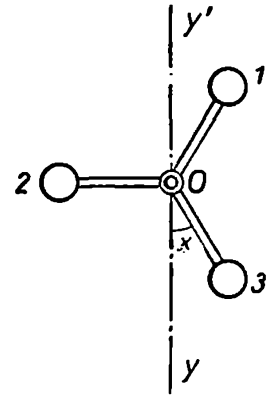


Рис. 141.

4. На оси O (рис. 141) может свободно вращаться система, состоящая из трех одинаковой длины невесомых стержней, образующих между собой попарно углы в 120°, и из грузов в 1 *кг*, 2 *кг* и 3 *кг*, прикрепленных к концам этих стержней.

При каком значении угла x между третьим стержнем и вертикалью YY' система будет в равновесии?

Указание. Задача сводится к уравнению:

$$3\sin x - 2\sin(60° + x) + \sin(60° - x) = 0.$$

§ 52. Тригонометрические уравнения VIII типа $f[T_1(a_1x+b_1),\ T_2(a_2x+b_2),\ T_3(a_3x+b_3)] = 0$ с алгебраическими действиями над несколькими круговыми функциями с различными аргументами

Уравнения данного типа, решаются так же, как и уравнения VII типа, при этом встречаются те же трудности. В учебной литературе обычно даются лишь простейшие уравнения данного типа, легко сводимые к

предшествующим типам I—VI. Рассмотрим задачу, сводимую к такому уравнению.

Требуется установить, существует ли правильная четырехугольная пирамида, у которой совпадают центры вписанного и описанного (относительно пирамиды) шаров.

Предположим, что такая пирамида существует (рис. 142).

Обозначим плоский угол при вершине пирамиды через x, а боковое ребро через l. Если точка O есть центр вписанного и описанного шара, а SLM — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту SH перпендикулярно ребру AB, то имеем следующие равенства:

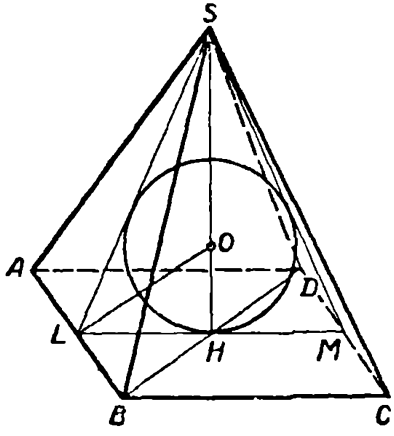


Рис. 142.

$$ML = 2HL = 2LB = 2l \sin\frac{x}{2}.$$

$$2)\ SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{l^2 - 2 \cdot LB^2} = \sqrt{l^2 - 2l^2 \sin^2\frac{x}{2}} = l\sqrt{\cos x}.$$

3) Обозначив $\angle SBH$ через B, имеем:

$$\sin B = \frac{SH}{SB} = \frac{l\sqrt{\cos x}}{l} = \sqrt{\cos x}.$$

4) Радиус описанного шара R равен радиусу круга, вписанного около треугольника SBD, поэтому

$$R = SO = \frac{\frac{1}{2}l}{\sin B} = \frac{l}{2\sqrt{\cos x}}.$$

5) Радиус вписанного шара r равен радиусу круга, вписанного в треугольник SML, поэтому

$$r = OH = \frac{\text{пл. } \Delta SML}{P} = \frac{\frac{1}{2} ML \cdot SH}{\frac{1}{2}(ML + 2SL)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2l \sin \frac{x}{2} \cdot l \sqrt{\cos x}}{l \sin \frac{x}{2} + l \cos \frac{x}{2}} = \frac{l \sin \frac{x}{2} \sqrt{\cos x}}{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}.$$

6) LO — биссектриса угла HLS в треугольнике SHL, поэтому

$$\frac{SO}{OH} = \frac{SL}{HL},$$

иначе

$$\frac{R}{r} = \frac{l \cos \frac{x}{2}}{l \sin \frac{x}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

7) Подставив в полученное соотношение значения R и r из 4) и 5) шагов, будем иметь

$$\frac{l}{2 \sqrt{\cos x}} : \frac{l \sin \frac{x}{2} \sqrt{\cos x}}{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2},$$

или

$$\frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{2 \cos x \sin \frac{x}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}. \qquad (*)$$

Итак, получили тригонометрическое уравнение с тремя различными круговыми функциями (синус, косинус, котангенс) и двумя различными аргументами $\left(x \text{ и } \frac{1}{2} x \right)$. т. е. уравнение VIII типа.

Решаем это уравнение следующим образом:

1-й шаг. Сводим к уравнению с одним аргументом $\frac{x}{2}$, используя тождество: $\cos x \equiv \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$, имеем:

$$\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right)} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

2-й шаг. Сокращаем на $\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

3-й шаг. Так как по смыслу задачи $\sin\frac{x}{2}\neq 0$, то умножим обе части уравнения на $\sin\frac{x}{2}$, получим:

$$\frac{1}{2\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=\cos\frac{x}{2},$$

или

$$\frac{1-2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=0.$$

4-й шаг. Приравниваем нулю числитель:

$$1-2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0,$$

или

$$1-2\cos^2\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}=0,$$

или

$$-\cos x+\sin x=0.$$

Так как по смыслу задачи $\sin x\neq 0$, то, разделив обе части уравнения на $\sin x$, получим:

$$-\operatorname{ctg}x+1=0,\text{ или }\operatorname{ctg}x=1.$$

5-й шаг. Решаем полученное уравнение I типа, находим

$$x=45^\circ+180^\circ\cdot n.$$

6-й шаг. Подстановкой убеждаемся, что найденное значение x не обращает знаменателя уравнения 3-го шага в нуль, следовательно, это значение и будет искомым решением исходного уравнения (*), эквивалентного уравнению 3-го шага.

Так как плоский угол x при вершине правильной четырехугольной пирамиды всегда меньше 90° и не может быть отрицательным, то условию задачи удовлетворяет

только одно частное решение $x_1 = 45°$, получающееся из общего при $n = 0$.

Итак, рассмотренная задача имеет решение, и притом единственное (с точностью до подобия фигур). Рекомендуется учащимся построить развертку искомой пирамиды и склеить модель пирамиды.

Упражнения.

1. Решить следующие уравнения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$;

3) $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$;

4) $2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$;

5) $\cos^2 x - \sin x \cos 4x - \cos^2 4x = \frac{1}{4}$;

6) $\cos 3x \sin 5x = \cos 7x \sin 9x$;

7) $\sin(1 - x)\cos(2 + x) = 0{,}25$;

8) $\left[\sin\left(ax + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - ax\right)\right]^2 = 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$;

9) $\sin^2\left(ax + \frac{1}{3}\pi\right) + \sin^2\left(ax + \frac{2}{3}\pi\right) = 1{,}25$.

У к а з а н и е. Применить формулу $2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$.

10) $\sin^6 x + \cos^6 x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

У к а з а н и е. Произведение косинуса на синус представить в виде суммы по формуле (39, а); для упрощения суммы первых двух членов возвести в куб сумму $\sin^2 x + \cos^2 x$.

11) $\frac{1}{\sin x} - \frac{\sqrt{3}}{\cos x} = 4$;

12) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{18} + x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{9} - x\right) = 1{,}5$.

У к а з а н и е 1. Выразить функции через синус и косинус, а затем составить производную пропорцию.

2. Найти отклонение светового луча при входе в воду, если угол его падения на поверхность воды $\alpha \approx 42°$. Коэффициент преломления воды $n \approx \frac{4}{3}$.

3. Найти угол при основании равнобедренного треугольника, если известно, что площадь этого треугольника в m раз больше площади вписанного в него круга.

У к а з а н и е. Задача сводится к уравнению: $\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} x = \pi m$, где x — искомый угол Найти приближенное решение уравнения при $m = \frac{20}{\pi}$.

§ 53. Трансцендентные уравнения, сводимые к тригонометрическим уравнениям

Ограничимся рассмотрением нескольких примеров таких уравнений.

1. $2 \cos (5 + 2 \lg x) = \sqrt{2}$.

Вносим обозначение: $5 + 2 \lg x = z$, получаем:

$$2 \cos z = \sqrt{2}, \quad \cos z = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Совершаем обратную замену:

$$5 + 2 \lg x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

откуда $\lg x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n - \frac{5}{2}$; $x = 10^{\frac{1}{8}(8\pi n \pm \pi - 20)}$

(n — целое).

2. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

По условию равенства тангенсов (§ 46) имеем:

$$x = \sqrt{x} + \pi n, \text{ где } n \text{ — целое.}$$

Решаем полученное уравнение: $x - \pi n = \sqrt{x}$.

Так как в области действительных чисел берется только арифметическое (неотрицательное) значение $\sqrt{x}$, то и левая часть уравнения должна быть неотрицательна, т. е. $x \geqslant \pi n$. При таком условии возводим уравнение в квадрат, получаем $(x - \pi n)^2 = x$, или $x^2 - (2\pi n + 1)\, x + \pi^2 n^2 = 0$, откуда

$$x_1 = \frac{2\pi n + 1 + \sqrt{4\pi n + 1}}{2}, \quad x_2 = \frac{2\pi n + 1 - \sqrt{4\pi n + 1}}{2}.$$

Исследования показывают, что условиям $x \geqslant 0$ и $x \geqslant \pi n$ удовлетворяют x_1 при $n \geqslant 0$, а x_2 только при $n = 0$, т. е. $x_2 = 0$.

3. $\lg \sin 2x + \lg \cos x = \lg \sin x$.

Прежде всего отметим условие существования логарифмов:

1) $\sin 2x > 0$, 2) $\cos x > 0$ и 3) $\sin x > 0$.

Потенцируем уравнение, получаем:

$$\sin 2x \cdot \cos x = \sin x,$$

или

$$2 \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x = 0,$$

$$\sin x \ (2 \cos^2 x - 1) = 0.$$

Так как $\sin x$ не может равняться нулю (см. условие 3), то остается рассмотреть уравнение:

$$2 \cos^2 x - 1 = 0,$$

из которого имеем:

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Но отрицательное значение косинуса не удовлетворяет условию 2), следовательно, остается только

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$$

или $x_{\text{I}} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ и $x_{\text{II}} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

Однако второй класс решений не удовлетворяет условию (1), так как $\sin 2x_{\text{II}} = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi n\right) = -1 < 0$.

Первый класс решения удовлетворяет всем условиям (1), (2) и (3) и данному уравнению:

$$\lg \sin 2\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) + \lg \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) = \lg 1 + \lg \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \lg \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$\lg \sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)=\lg \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. в левой и правой частях уравнения получаем равные числа.

4. $\sin(\pi\cos x)=\cos(\pi\sin x)$.

Переходим в левой части к косинусу:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\cos x\right)=\cos(\pi\sin x).$$

По условию равенства косинусов (§ 46) имеем:

$$\frac{\pi}{2}-\pi\cos x=\pm\pi\sin x+2\pi n,$$

откуда $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}-2n,$ (1)

$$\sin x-\cos x=2n-\frac{1}{2}. \quad (2)$$

Решаем уравнение (1):

$$\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{2}-2n,$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-4n}{2},$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-4n}{2\sqrt{2}}.$$

Это возможно, если

$$-1\leqslant\frac{1-4n}{2\sqrt{2}}\leqslant+1,$$

откуда $n=0$.

Итак,

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}};\ x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi k.$$

Решаем уравнение (2):

$$\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2n-\frac{1}{2},$$

$$2\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4n-1}{2},$$

откуда $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4n-1}{2\sqrt{2}}$, что возможно также только при $n=0$.

Итак, $$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}};$$

$$x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\pi n;$$

$$x_{\text{I}}=\frac{\pi}{4}-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi\cdot 2k;$$

$$x_{\text{II}}=\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi(2k+1)\ (k\text{ — целое}).$$

Упражнения.

Решить следующие уравнения:

1) $\operatorname{tg}(x^2-2x)=\sqrt{3}$;

2) $\cos\frac{\pi x}{2(x-1)}=1$;

3) $\operatorname{tg}(x^2+3x-1)=\operatorname{tg}(7x+9)$,

4) $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg}x)=\operatorname{ctg}(\pi\operatorname{ctg}x)$;

5) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\cos\pi x\right)=\frac{1}{2}$;

6) $(\cos x)^{1-\sin 2x}=1$;

7) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{x}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\sqrt{x}\right)=0{,}5$.

§ 54. Трансцендентные уравнения, содержащие неизвестные под знаками круговых функций, но не сводимые к тригонометрическим уравнениям

Рассмотрим простейшие из таких уравнений, имеющие вид:

$$f[x,\ T(ax+b)]=0, \qquad (*)$$

где f — характеристика алгебраических действий, а T — знак любой из круговых функций.

Уравнения такого типа решают графическими методами, так как элементарным аналитическим путем они неразрешимы (в конечном виде).

Начнем с решения следующих задач:

1. На какую глубину погрузится плот, состоящий из двух бревен диаметром D и длиной l, скрепленных четырьмя досками длиной l_1, шириной a и толщиной b, если на него положить груз Q?

Расчет произвести при следующих данных: $D = 0{,}4$ *м*, $l = 6{,}4$ *м*, $l_1 = 2$ *м*, $a = 0{,}25$ *м*, $b = 0{,}03$ *м*, $Q = 0{,}3$ *T*, плотность древесины бревен $d = 0{,}6$, досок $d_1 = 0{,}5$.

Р е ш е н и е. Дадим схематическое изображение поперечного сечения плота и уровня воды (рис. 143).

Пусть центральный угол $MON = x$ радиан, тогда:

1) Площадь нижнего сектора сечения бревна равна

$$\frac{\frac{1}{4}\pi D^2 (2\pi - x)}{2\pi} = \frac{1}{8} D^2 (2\pi - x) \ [м^2].$$

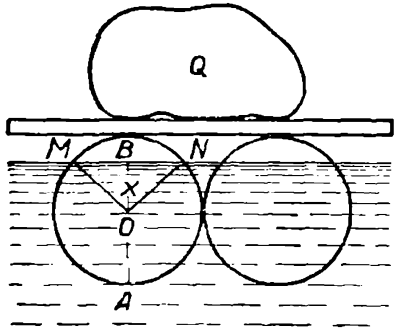


Рис. 143.

2) Площадь треугольника

$$MON = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{8} D^2 \sin x \ [м^2].$$

3) Объем вытесненной воды:

$$V = 2\left[\frac{1}{8} D^2 (2\pi - x) + \frac{1}{8} D^2 \sin x\right] l = \frac{1}{4} D^2 [2\pi - x + \sin x] l \ [м^3],$$

ее вес $P = \frac{1}{4} D^2 l [2\pi - x + \sin x]$ $[T]$.

4) Вес бревен: $P_1 = 2 \cdot \frac{\pi D^2}{4} ld = \frac{1}{2} \pi D^2 ld \ [T]$.

5) Вес досок: $P_2 = 4abl_1 d_1 \ [T]$.

6) Общий вес плота с грузом:

$$P_3 = P_1 + P_2 + Q = \frac{1}{2} \pi D^2 ld + 4abl_1 d_1 + Q. \ [T]$$

7) По закону Архимеда имеем:

$$\frac{1}{4} D^2 l (2\pi - x + \sin x) = \frac{1}{2} \pi D^2 ld + 4abl_1 d_1 + Q,$$

или $$\sin x - x = \frac{4(4abl_1 d_1 + Q)}{D^2 l} - 2\pi (1 - d).$$

8) Подставляя данные, получаем:

$$\sin x - x = \frac{4(4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}03 \cdot 2 \cdot 0{,}5 + 0{,}3)}{0{,}16 \cdot 6{,}4} - 2\pi (1 - 0{,}6)$$

или $\sin x - x \approx -1{,}2$, т. е. $\sin x \approx x - 1{,}2$.

Получили уравнение типа (*). Это уравнение неразрешимо аналитическим путем (в конечном виде). Приближенное решение его можно подобрать по таблице или найти графическим приемом. В последнем случае целесообразно перейти от уравнения к системе:

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = x - 1{,}2. \end{cases}$$

Затем построим графики функций $y = \sin x$ и $y = x - 1{,}2$ (рис. 144). Решением уравнения будет абсцисса общей точки графиков, т. е. $x \approx 2{,}1$ радиана (около 120°).

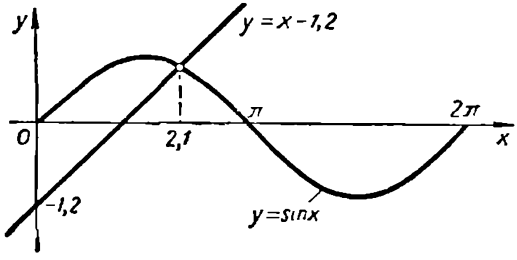


Рис. 144.

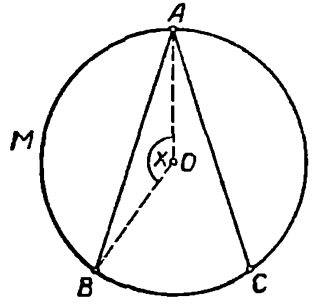


Рис. 145.

Теперь определяем глубину погружения плота

$$AB = AO + OB = R + R\cos\frac{x}{2} = R\left(1 + \cos\frac{x}{2}\right) \approx$$

$$\approx 0{,}2\,(1 + 0{,}5) \approx 0{,}3 \ [м].$$

2. Двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, разделить круг на три равновеликие части.

1. Составление уравнения:

1) Пусть AB и AC — искомые хорды (рис. 145); обозначим радианную меру угла AOB через x, тогда площадь сектора $AMBO = \frac{\pi R^2 \cdot x}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 x$;

площадь треугольника $AOB = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin x = \frac{1}{2} R^2 \sin x$,

площадь сегмента $AMB = \frac{1}{2} R^2 x - \frac{1}{2} R^2 \sin x =$

$$= \frac{1}{2} R^2 (x - \sin x).$$

2) По условию задачи площадь сегмента AMB составляет $\frac{1}{3}$ площади круга, следовательно,

$$\frac{1}{2}R^2(x-\sin x)=\frac{1}{3}\pi R^2,$$

короче:

$$x-\sin x=\frac{2}{3}\pi,$$

или

$$x-\frac{2}{3}\pi=\sin x.$$

II. Решение уравнения графическим приемом:

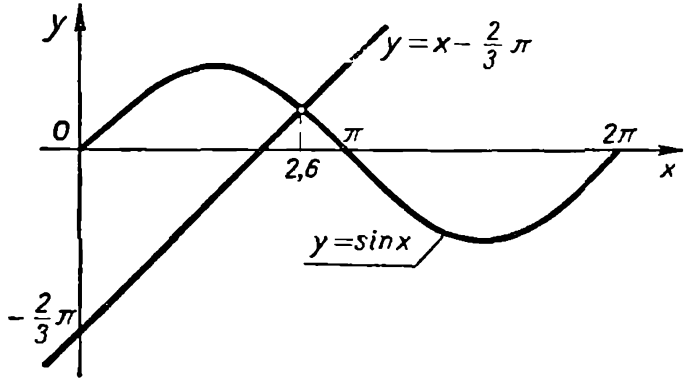


Рис. 146.

1) Переходим от уравнения к системе:

$$\begin{cases} y=x-\frac{2}{3}\pi \\ y=\sin x \end{cases}$$

2) Выполняем построение графиков функций: $y=x-\frac{2}{3}\pi$ и $y=\sin x$ (рис. 146).

3) Находим абсциссу точки пересечения графиков $x\approx 2{,}6$; это число и будет приближенным значением корня уравнения.

4) С помощью таблиц пробами уточняем полученное значение корня, имеем $x\approx 2{,}60$.

III. Построение:

1) На данной окружности возьмем произвольную точку A и соединим ее с центром O радиусом OA (рис. 145).

2) С помощью радианного транспортира[1] строим центральные углы $AOB = AOC = 2{,}60$ радиан.

3) Проводим хорды AB и AC.

3. Также графическим методом решаются и такие трансцендентные уравнения, в которых над неизвестным, помимо тригонометрических операций, совершаются и другие неалгебраические операции.

В качестве примера решим следующее уравнение такого типа:

$$\cos 2x - \lg x = 0.$$

Запишем его так:

$$\cos 2x = \lg x,$$

а затем заменим системой уравнений:

$$\begin{cases} y = \cos 2x \\ y = \lg x \end{cases}$$

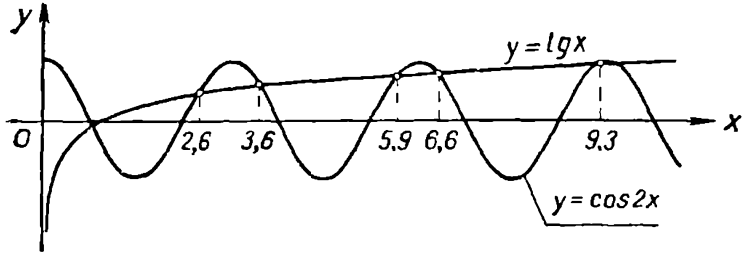


Рис. 147.

Выполнив построение графиков функций $y = \cos 2x$ и $y = \lg x$ (рис. 147), находят абсциссы их общих точек: $x_1 \approx 0{,}85$, $x_2 \approx 2{,}6$, $x_3 \approx 3{,}6$, $x_4 \approx 5{,}9$, $x_5 \approx 6{,}6$, $x_6 \approx 9{,}3$.

Упражнения.

1. Решить графическим методом (приближенно) уравнения

   а) $\sin 2x = x^2$;

   б) $x + \cos x = 1$.

2. Определить число корней уравнения: $\sin 3x = \frac{x}{\pi}$.

3. Определить число положительных корней уравнения $x \cos x = 1$ в промежутке $[0;\ 10\pi]$ и найти приближенное значение наименьшего из этих корней.

[1] Если имеется транспортир только с градусной шкалой, то предварительно по таблице выразить угол x в градусной мере.

§ 55. Уравнения, образованные аркфункциями

Если в уравнении неизвестное содержится только под знаками аркфункций, то говорят, что это уравнение образовано аркфункциями.

На практике такие уравнения встречаются весьма редко, но при исследовании некоторых видов функций с ними иногда приходится иметь дело.

Рассмотрим приемы решения важнейших типов таких уравнений.

I. Уравнения простейшего вида:

$\arcT\,(ax+b)=c$, где $\arc T$ — характеристика любой из шести аркфункций.

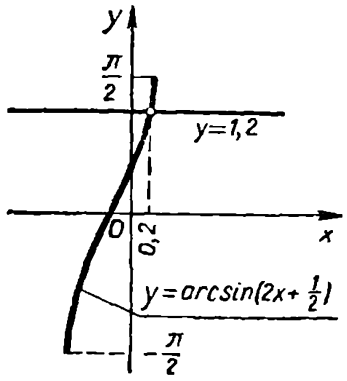


Рис. 148.

1) $\arc\sin\,(ax+b)=c$, где

$$|c|\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Решение. Берем от каждой части синус; получаем:

$$\sin\,[\arcsin\,(ax+b)\,]=\sin c,$$

или на основе известного тождества (47):

$$ax+b=\sin c,$$

откуда

$$x=\frac{\sin c-b}{a}.$$

В частности, при $a=2$, $b=\frac{1}{2}$ и $c=1{,}2$ имеем:

$$\arcsin\left(2x+\frac{1}{2}\right)=1{,}2,$$

$$x=\frac{\sin 1{,}2-\frac{1}{2}}{2}\approx\frac{0{,}932-0{,}500}{2}\approx 0{,}216.$$

На рисунке 148 дано графическое решение этого уравнения: число $x\approx 0{,}216\approx 0{,}2$ есть абсцисса точки пересечения графиков: $y=\arc\sin\left(2x+\frac{1}{2}\right)$ и $y=1{,}2$.

2) $\arccos\,(ax+b)=c$, где $0\leqslant c\leqslant\pi$.

Решение. Берем от каждой части косинус, получаем:

$$\cos\,[\arccos\,(ax+b)\,]=\cos c,$$

или на основе известного тождества (50)

$$ax + b = \cos c,$$

откуда

$$x = \frac{\cos c - b}{a}.$$

В частном случае при $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ и $c=2$ имеем:

$$\arccos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 2,$$

$$x = \frac{\cos 2 + \frac{1}{2}}{0{,}5} \approx$$

$$\approx \frac{-0{,}416 + 0{,}5}{0{,}5} \approx 0{,}168.$$

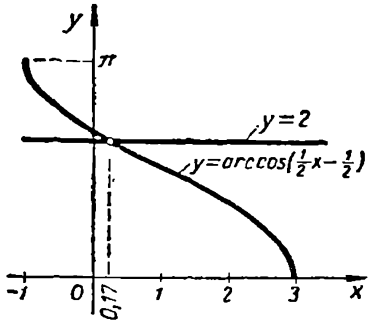


Рис. 149.

На рисунке 149 передано графическое решение этого уравнения: число $x \approx 0{,}168 \approx 0{,}17$ есть абсцисса точки пересечения графиков: $y = \arccos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)$ и $y = 2$.

3) $\operatorname{arctg}(ax + b) = c$, где $|c| < \frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. $\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(ax + b)] = \operatorname{tg} c$, или

$$ax + b = \operatorname{tg} c,$$ [тождество 53]

откуда

$$x = \frac{\operatorname{tg} c - b}{a}.$$

В частном случае при $a = 1{,}5$, $b = 4$ и $c = 1$ имеем:

$$\operatorname{arctg}(1{,}5x + 4) = 1;$$

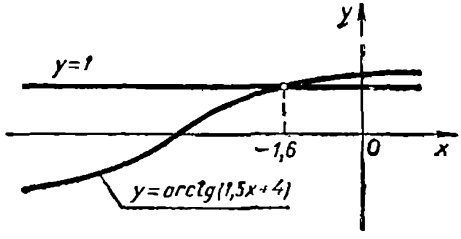


Рис. 150.

$$x = \frac{\operatorname{tg} 1 - 4}{1{,}5} \approx \frac{1{,}558 - 4}{1{,}5} \approx -1{,}63.$$

На рисунке 150 передано графическое решение данного уравнения: число $x \approx -1{,}63 \approx -1{,}6$ есть абсцисса точки пересечения кривой $y = \operatorname{arctg}(1{,}5x + 4)$ и прямой $y = 1$.

II. Уравнения вида: $f[\operatorname{arc}T(ax+b)]=0$, где f — характеристика алгебраических действий, выполняемых над одной и той же аркфункцией.

Такие уравнения сводятся к простейшим подстановкой $\operatorname{arc}T(ax+b)=y$ и решением получающегося алгебраического уравнения $f(y)=0$.

Пример. $\operatorname{arctg}^2(3x+1)+4\operatorname{arctg}(3x+1)+3=0$.

1. Вносим замену: $\operatorname{arctg}(3x+1)=y$, получаем:

$$y^2+4y+3=0,$$

откуда

$$y_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-3}=-2\pm 1;\ y_1=-1,\ y_2=-3.$$

Так как $|\operatorname{arctg}(3x+1)|<\frac{\pi}{2}=1{,}57\ldots$, то пригоден только один корень: $y_1=-1$.

2. Производим обратную замену

$$\operatorname{arctg}(3x+1)=-1$$

и решаем полученное уравнение:

$$\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(3x+1)]=\operatorname{tg}(-1);\ 3x+1\approx -1{,}558;$$

$$x\approx -0{,}853.$$

III. Уравнения вида: $f[\arcsin(ax+b), \arccos(ax+b)]=0$ и $f[\operatorname{arctg}(ax+b), \operatorname{arcctg}(ax+b)]=0$, где f — характеристика алгебраических действий над указанными аркфункциями, сводятся к предыдущему типу на основе тождеств (58) и (59), позволяющих одну из аркфункций выражать через другую, не изменяя аргумента.

Пример 1. $6(\arccos x)^2+14\arcsin x+4-7\pi=0$.

На основании тождества (58) выразим арксинус через арккосинус: $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$,

получим уравнение предыдущего вида:

$$3(\arccos x)^2-7\arccos x+2=0.$$

Вносим замену: $\arccos x=y$, получаем квадратное уравнение

$$3y^2-7y+2=0,$$

откуда

$$y_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6};\ y_1=2;\ y_2=\frac{1}{3}.$$

Совершаем обратную замену:

$$(\arccos x)_1 = 2 \text{ и } (\arccos x)_2 = \frac{1}{3},$$

откуда

$$x_1 = \cos 2 \approx -0{,}4161,$$

$$x_2 = \cos \frac{1}{3} \approx 0{,}9449.$$

Пример 2. $p \operatorname{arctg}(ax+b) + q \operatorname{arcctg}(ax+b) = c.$

Выражаем арккотангенс через арктангенс (59):

$$\operatorname{arcctg}(ax+b) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(ax+b),$$

получаем:

$$p \operatorname{arctg}(ax+b) + q\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(ax+b)\right] = c$$

или

$$(p-q)\operatorname{arctg}(ax+b) = c - q\frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\operatorname{arctg}(ax+b) = \frac{2c-\pi q}{2(p-q)}, \text{ если } p \neq q.$$

Взяв от каждой части тангенс, находим:

$$ax+b = \operatorname{tg}\frac{2c-\pi q}{2(p-q)}; \quad x = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{2c-\pi q}{2(p-q)} - \frac{b}{a}.$$

IV. Уравнения, в которых выполняются алгебраические операции над одной или несколькими аркфункциями с различными аргументами.

Решение таких уравнений связано с большими трудностями, а иногда вообще невозможно аналитическим методом. Но в учебной литературе обычно даются только такие уравнения данного вида, которые легко сводятся к алгебраическим уравнениям взятием от левой и правой части какой-либо из круговых функций.

Следует, однако, заметить, что выполнение такой операции может привести к неэквивалентным уравнениям. В самом деле, пусть дано уравнение

$$f(x) = g(x). \qquad (I)$$

Возьмем, например, синус от каждой части, получим новое уравнение

$$\sin f(x) = \sin g(x) \qquad (II)$$

Понятно, что всякий корень уравнения (I) будет также корнем уравнения (II), но обратное неверно. Действительно, по теореме (§ 46, I) уравнение (II) можно заменить следующим эквивалентным ему уравнением:

$$f(x) = (-1)^n g(x) + \pi n, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \qquad (II')$$

однако всякое решение этого уравнения при $n \neq 0$ будет посторонним для уравнения (I).

Посторонние решения могут появиться иногда и потому, что в процессе некоторых тождественных преобразований расширяется множество допустимых значений для аргумента.

Так, например, для уравнения

$$\arccos(2x^2 - x) = \arccos(4x - 2) \qquad (*)$$

множество допустимых значений аргумента x определяется условием

$$|2x^2 - x| \leqslant 1 \text{ и } |4x - 2| \leqslant 1. \qquad (**)$$

Возьмем косинус от каждой части уравнения (*), получим новое уравнение:

$$2x^2 - x = 4x - 2. \qquad (***)$$

Если это уравнение рассматривать вне связи с данным уравнением (*), то в нем множество допустимых значений для x ничем не ограничено.

Решив это уравнение, получим два корня $x_1 = 2$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, но уравнению (* удовлетворяет только один из этих корней $x_2 = \frac{1}{2}$; другой корень будет посторонним, так как он не принадлежит множеству допустимых значений x:

$$|2x_1^2 - x_1| = |2 \cdot 4 - 2| > 1.$$

Итак, если в процессе решения уравнения выполнялась какая-нибудь тригонометрическая операция над обеими частями уравнения, то полученные решения следует проверить подстановкой их в данное (исходное) уравнение с тем, чтобы обнаружить и отбросить посторонние корни.

Примечание. При выполнении некоторых тригонометрических операций над обеими частями уравнения возможна и потеря корней, если при этом множество допустимых значений для аргумента сужается.

Так, например, уравнение

$$x = \pi - x$$

имеет решение $x = \frac{\pi}{2}$. Возьмем от каждой части этого уравнения тангенс, получим:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\pi - x);$$

это уравнение имеет бесконечное множество решений.

Действительно, применив в правой части формулу приведения: $\operatorname{tg} (\pi - x) = -\operatorname{tg} x$, имеем:

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} x;\ 2 \operatorname{tg} x = 0\ \operatorname{tg} x = 0,\ \text{откуда}\ x = \pi n.$$

Но среди этих решений нет $\frac{\pi}{2}$. Произошла потеря корня, так как значение $x = \frac{\pi}{2}$ не попало во множество допустимых значений аргумента нового уравнения.

Остановимся на решении некоторых уравнений данного типа.

Пример 1. $\arcsin (2x + 0{,}6) = \arcsin (x + 0{,}8)$.

Р е ш е н и е. $\sin [\arcsin (2x + 0{,}6)] = \sin [\arcsin x + 0{,}8)]$

$$2x + 0{,}6 = x + 0{,}8;\ x = 0{,}2.$$

Пример 2. $2 \arcsin x = \arcsin (2x + 1)$.

Р е ш е н и е. $\sin [2 \arcsin x] = \sin [\arcsin (2x + 1)]$;

$$2 \sin(\arcsin x) \cos (\arcsin x) = 2x + 1;\quad 2x \sqrt{1 - x^2} = 2x + 1;$$

$$4x^2 (1 - x^2) = 4x^2 + 4x + 1;\ x^4 + x + \frac{1}{4} = 0.$$

Действительные корни этого уравнения можно найти графически. Для этого перепишем уравнение так:

$$x^4 = -x - \frac{1}{4}.$$

Заменим его системой уравнений:

$$y = x^4,$$

$$y = -x - \frac{1}{4}.$$

Построив графики функций $y = x^4$ и $y = -x - \frac{1}{4}$ (рис. 151), находим абсциссы их общих точек: $x_1 \approx -0{,}25$; $x_2 \approx -0{,}9$.

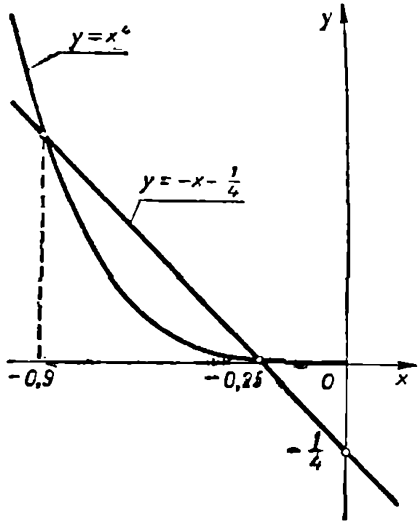


Рис. 151.

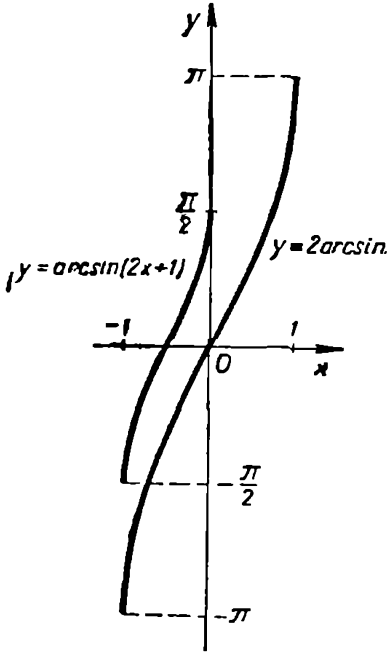


Рис. 152.

Проверяем корни подстановкой их в данное уравнение:

1) $2\arcsin x_1 \approx -2\arcsin 0{,}25 \approx -2\cdot 0{,}25 = -0{,}5 < 0$; $\arcsin(2x_1+1) \approx \arcsin 0{,}5 \approx 0{,}5 > 0$, следовательно, $x_1 = -0{,}25$ не является корнем уравнения.

2) $2\arcsin x_2 \approx -2\arcsin 0{,}9 \approx -2\cdot 1{,}1 = -2{,}2$; $\arcsin(2x_2+1) \approx \arcsin(-0{,}8) \approx -0{,}93$, следовательно, $x_2 = -0{,}9$ также не будет корнем уравнения.

Итак, уравнение не имеет решений.

Убедимся в этом иначе, т. е. графическим решением уравнения. Действительно, на рисунке 152 мы видим, что графики функций $y = 2\arcsin x$ и $y = \arcsin(2x+1)$ не пересекаются.

Пример 3.

$$2\arcsin x - \arcsin\frac{x}{2} = 0.$$

Решение.

$$2\arcsin x = \arcsin\frac{x}{2};$$

$$\sin(2\arcsin x) = \sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right);$$

$$2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = \frac{x}{2};$$

$$2x\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{2};$$

$$x(4\sqrt{1-x^2}-1)=0;\ x_1=0;$$

$$4\sqrt{1-x^2}=1,$$

$$1-x^2=\frac{1}{16},\ x^2=\frac{15}{16},\ x_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Проверка. 1) $x_1=0$ удовлетворяет уравнению.

2) $2\arcsin x_2=2\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\approx 2\arcsin 0{,}9682\approx 2{,}6360$;

$\arcsin\frac{x_2}{2}=\arcsin 0{,}4841\approx$

$\approx 0{,}5053$, следовательно,

$2\arcsin x_2\neq\arcsin\frac{x_2}{2}$, а потому $x_2=\frac{\sqrt{15}}{4}$ — посторонний корень.

3) $x_3=-\frac{\sqrt{15}}{4}$ также посторонний корень.

Это можно видеть и на графиках (рис. 153), так как кривые $y=2\arcsin x$ и $y=\arcsin\frac{x}{2}$ пересекаются только в одной точке O (0; 0).

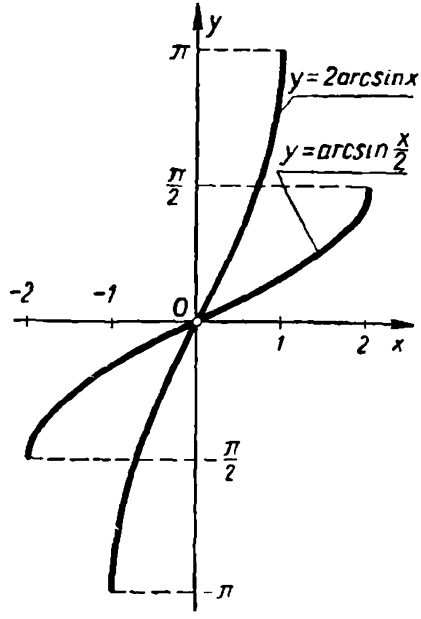


Рис. 153.

Пример 4.

$2\arcsin x=\arccos 2x$.

Решение.

$\cos(2\arcsin x)=\cos(\arccos 2x)$;

$$\cos^2(\arcsin x)-\sin^2(\arcsin x)=2x;$$

$$1-x^2-x^2=2x;\ 2x^2+2x-1=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+2}}{2},\ x_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\left|\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right|>1$, то число x_2 не может быть корнем данного уравнения. Число $x_1=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\approx$ $\approx 0{,}366$ является корнем этого уравнения, так как ко-

синусы дуг $2\arcsin x_1$ и $\arccos 2x_1$ равны, а сами дуги принадлежат промежутку $(0;\ \pi)$, в котором не существует различных дуг, имеющих одинаковый косинус.

На рисунке 154 передано графическое решение данного уравнения.

Пример 5. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\operatorname{arctg} 3x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x;$$

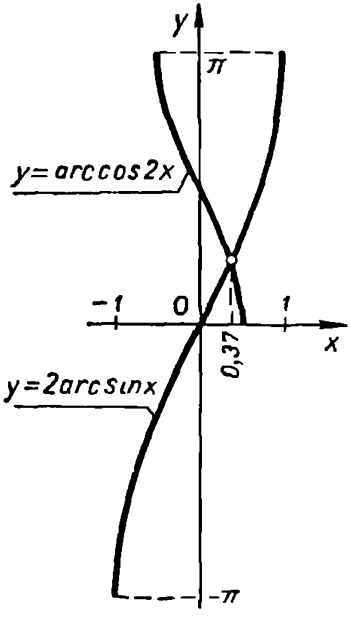


Рис. 154.

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3x) =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right);$$

$$3x = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x);$$

$$3x = \frac{1}{x};\ 3x^2 = 1;\ x_{1,2} =$$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Проверка. 1) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ есть корень данного уравнения. 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) \neq \frac{\pi}{2}$, следовательно, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ — посторонний корень, не удовлетворяющий данному уравнению.

Пример 6.

$$\arccos\frac{x}{2} - 2\operatorname{arctg}(x-1) = 0.$$

Решение.

$$\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(x-1);$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{2}\right)=\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(x-1)];$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos\left(\arccos\frac{x}{2}\right)}{1+\cos\left(\arccos\frac{x}{2}\right)}}=x-1;$$

$$\sqrt{\frac{1-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}}}=x-1;$$

$$\frac{2-x}{2+x}=(x-1)^2;$$

$$\frac{2-x-(2+x)(x-1)^2}{2+x}=0;$$

$$\frac{2x-x^3}{x+2}=0;\quad 2x-x^3=0;\quad x(2-x^2)=0;$$

откуда $x_1=0$, $x_2=\sqrt{2}$, $x_3=-\sqrt{2}$.

Проверка. 1) $\arccos 0-2\operatorname{arctg}(-1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\neq 0$, следовательно, число $x_1=0$ не может быть корнем данного уравнения.

2) Дуги $\frac{1}{2}\arccos\frac{x_2}{2}=\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\operatorname{arctg}(x_2-1)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)$ принадлежат I четверти числовой окружности и имеют равные тангенсы, следовательно, они равны, а потому $x_2=\sqrt{2}$ есть корень данного уравнения.

3) Дуга $\frac{1}{2}\arccos\frac{x^3}{2}=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{8}\pi>0$;

дуга $\operatorname{arctg}(x_3-1)=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}-1\right)=-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)<0$; следовательно, $\frac{1}{2}\arccos\frac{x^3}{2}\neq\operatorname{arctg}(x_3-1)$, а потому $x_3=-\sqrt{2}$ не может быть корнем данного уравнения.

Пример 7. $x - \arcsin\left(\cos\frac{1}{2} - \sin x\right) = 1.$

Решение. $x - 1 = \arcsin\left(\cos\frac{1}{2} - \sin x\right);$

$$\sin(x-1) = \cos\frac{1}{2} - \sin x; \quad \sin(x-1) + \sin x = \cos\frac{1}{2};$$

$$2\sin\left(x - \frac{1}{2}\right)\cos\frac{1}{2} = \cos\frac{1}{2}; \quad \sin\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2};$$

$$x = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

В соответствии с определением арксинуса должны выполняться два условия:

1) $|x-1| \leqslant \frac{\pi}{2}$;

2) $\left|\cos\frac{1}{2} - \sin x\right| \leqslant 1.$

Но $|x-1| = \left|(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$ только при $n = 0$, т. е. при $x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$;

$\left|\cos\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right| < 1$, следовательно, $x = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}$ — решение данного уравнения.

Упражнения.

1. Решить следующие уравнения

1) $2\arcsin(x^3 - 3x + 3) = \pi$;

2) $\operatorname{arctg}(2x-1) = \frac{\pi}{4} - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

3) $(\arcsin x)^2 + 2{,}5\arccos x = 1{,}25\pi - 1$;

4) $\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} = \operatorname{arctg}(3-x)$;

5) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \frac{\pi}{2}$;

6) $\arcsin(x-1) + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{3} = \arccos(1-x)$;

7) $\operatorname{arcctg}(3+\cos x)+\operatorname{arctg}(4-\cos x)=\frac{\pi}{2}$;

8) $x-\arcsin\left(\cos\frac{m}{2}-\sin x\right)=m$.

2. Не выполняя построения графиков, найти координаты общих точек кривых: $y=\arccos\frac{x}{3}$ и $y=2\operatorname{arctg}(x-1)$

3. Найти точки, в которых график функции $y=x-\arcsin(\sin x)$ пересекает ось абсцисс. Надо ли строить для этого график функции?

4. Построить графики функций:

1) $y=\arcsin(\sin x)$;

2) $y=\arccos(\cos x)$.

3) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

4) $y=-\arccos(\cos x)$;

5) $y=\arcsin(\cos x)$

§ 56. Простейшие системы тригонометрических уравнений

Системами тригонометрических уравнений принято называть такие системы уравнений, которые составлены либо только из тригонометрических уравнений, либо из тригонометрических и алгебраических уравнений.

Примеры. 1) $\begin{cases}\sin(x+y-1)=0{,}6\\ 2x-3y=4;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sin x+\cos 2y=a\\ \sin 2x+\cos y=b;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sin x+3\cos y-2\operatorname{tg} z=5\\ x+2y+z=1\\ y-3x=0\end{cases}$

Системы тригонометрических уравнений так же, как и системы алгебраических уравнений, бывают:

1) совместные, т. е. имеющие решения, и

2) несовместные, т. е. не имеющие решений

Так, например, система уравнений

$$\left.\begin{aligned}\sin x+\cos y&=1\\ x+y&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

имеет решение

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{3} - 2\pi k \end{cases} \qquad (k \text{ — целое число}),$$

следовательно, она совместная.

Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} \sin x + \cos y &= 1 \\ y &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

несовместная, так как она решений не имеет; действительно, подставив значение $y = 2$ в первое уравнение, получаем:

$$\sin x + \cos 2 = 1$$

или

$$\sin x - 0{,}416 \approx 1,$$

откуда $\sin x \approx 1{,}416 > 1$, чего быть не может ни при каком значении x.

Совместные системы уравнений бывают:

1) определенные, т. е. имеющие конечное множество классов решений, и

2) неопределенные, т. е. имеющие бесконечное множество классов решений.

Так, например, рассмотренная выше система уравнений (1) является определенной потому, что она имеет только два класса решений:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ y_1 = \frac{\pi}{3} - 2\pi k \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1) \\ y_2 = \frac{2\pi}{3} - \pi(2k+1). \end{cases}$$

Система уравнений

$$2\sin x - 3\cos y = -\frac{1}{2};$$

$$4\sin x - 6\cos y = -1$$

является неопределенной, так как она имеет бесконечное множество классов решений.

В самом деле, каждое из уравнений этой системы является следствием другого уравнения, следовательно, всякое решение одного из них будет также решением и другого.

Поэтому достаточно найти решения одного уравнения, например первого.

Внесем обозначение $\sin x = l$, где $-1 \leqslant l \leqslant +1$, получим:

$$2l - 3\cos y = -\frac{1}{2},$$

откуда $\cos y = \frac{2}{3} l + \frac{1}{6}$ и, следовательно,

$$-1 \leqslant \frac{2}{3} l + \frac{1}{6} \leqslant +1$$

или

$$-\frac{7}{4} \leqslant l \leqslant \frac{5}{4}.$$

Замечаем, что это соотношение выполняется, если взять для l прежнее ограничение: $-1 \leqslant l \leqslant +1$. Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} \sin x = l \\ \cos y = \frac{2}{3} l + \frac{1}{6}, \text{ где } -1 \leqslant l \leqslant +1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin l + \pi n \\ y = \pm \arccos\left(\frac{2}{3} l + \frac{1}{6}\right) + 2\pi n, \end{cases}$$

где l любое число из промежутка $[-1; +1]$. А так как этот промежуток содержит бесконечное множество чисел, то приходим к выводу, что данная система имеет бесконечное множество классов решений.

В соответствии с данным выше определением систем тригонометрических уравнений их можно разбить на два вида:

1. Системы, содержащие тригонометрические и алгебраические уравнения.

2. Системы, содержащие только тригонометрические уравнения.

Понятно, что решение тригонометрических систем уравнений представляет еще большие трудности, чем решение тригонометрических уравнений. Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь самых простых систем, встречающихся в различных приложениях тригонометрии.

а) Решение простейших систем I вида с двумя неизвестными, состоящих из двух уравнений: тригонометрического и алгебраического

$$\begin{cases} T(x, y) = 0 \text{ (тригонометрическое уравнение)} \\ f(x, y) = 0 \text{ (алгебраическое уравнение)} \end{cases}$$

Такая система может быть сведена к тригонометрическому уравнению с одним неизвестным, если удастся выразить в явном виде из алгебраического уравнения одно неизвестное через другое.

В самом деле, пусть из уравнения $f(x, y) = 0$ мы нашли $y = \varphi(x)$; тогда, подставив это выражение в первое уравнение, получим тригонометрическое уравнение с одним неизвестным:

$$T(x, \varphi(x)) = 0.$$

Предположим, что нам удалось найти решение этого уравнения: $x_1, x_2, \ldots, x_k$, тогда решение системы выразится следующими парами чисел (или классов):

1) $x_1, y_1 = \varphi(x_1)$; 2) $x_2, y_2 = \varphi(x_2)$ и т. д.

В алгебре такой прием решения систем уравнений называют обычно способом подстановки.

Решим этим способом систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

с которой мы уже встречались выше.

Из второго уравнения выражаем y через x:

$$y = \frac{\pi}{2} - x$$

и, подставляя в первое уравнение, будем иметь:

$$\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1,$$

или

$$2\sin x = 1,$$

откуда

$$\sin x = \frac{1}{2}, \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi \cdot 2k \\ y_1 = \frac{\pi}{2} - x_1 = \frac{\pi}{3} - \pi \cdot 2k \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1) \\ y_2 = \frac{\pi}{2} - x_2 = \frac{2\pi}{3} - \pi(2k+1) \end{cases}$$

(k — целое).

Получили два класса решений данной системы.

Некоторые системы тригонометрических уравнений I вида удается сводить к алгебраическим системам путем тождественных преобразований тригонометрического уравнения на основе различных формул тригонометрии.

Покажем это на конкретных примерах.

Пример 1. $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ x + y = b. \end{cases}$

Решение. Преобразуем в произведение левую часть первого уравнения:

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a.$$

Используя второе уравнение $x + y = b$, получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} 2\cos\frac{b}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \\ x + y = b. \end{cases}$$

В зависимости от параметров a и b возможны различные случаи.

1) Если $\cos\frac{b}{2} \neq 0$, т. е. $b \neq \pi(2k+1)$ и $\left|\frac{a}{2\cos\frac{b}{2}}\right| \leqslant 1$

то имеем:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\cos\frac{b}{2}},$$

откуда

$$\begin{cases} x-y=\pm 2\arccos\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}+4\pi k \\ x+y=b; \end{cases}$$

получили алгебраическую систему уравнений, из которой сложением и вычитанием находим общее решение данной системы:

$$\begin{cases} x=\dfrac{b}{2}\pm\arccos\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}+2\pi k \\ y=\dfrac{b}{2}\pm\arccos\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}-2\pi k \quad (k-\text{целое число}). \end{cases}$$

2) Если $\left|\dfrac{a}{2\cos\dfrac{b}{2}}\right|>1$, а также если $b=\pi(2k+1)$, но $a\neq 0$,

то система не имеет решений.

3) Если $b=\pi(2k+1)$ и $a=0$, то система неопределенна, т. е. имеет бесконечное множество классов решений. В этом случае одному из неизвестных, например x, можно давать любые значения, удовлетворяющие второму уравнению системы, т. е. $y=b-x=\pi(2k+1)-x$. Таким образом, общий вид всех решений будет следующий:

$$\begin{cases} x-\text{произвольное число} \\ y=\pi(2k+1)-x, \quad \text{где } k-\text{целое число}. \end{cases}$$

Аналогичным путем проводится решение и исследование следующих систем (что рекомендуется сделать читателю):

$$\begin{cases} \cos x-\cos y=a \\ x+y=b \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x\pm\sin y=a \\ x\pm y=b \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg}x\pm\operatorname{tg}y=a \\ x+y=b. \end{cases}$$

Пример 2. $\begin{cases} \sin x\cos y=a \\ x+y=b. \end{cases}$

. Решение. Преобразуем левую часть первого уравнения в сумму (39, а), получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]=a \\ x+y=b \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sin(x-y)=2a-\sin b \\ x+y=b. \end{cases}$$

Если $|2a-\sin b|\leqslant 1$, то получаем:

$$\begin{cases} x-y=(-1)^n \arcsin(2a-\sin b)+\pi n \\ x+y=b, \end{cases}$$

откуда сложением и вычитанием находим общее решение данной системы:

$$\begin{cases} x=\frac{b}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n \arcsin(2a-\sin b)+\frac{\pi}{2}n \\ y=\frac{b}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n \arcsin(2a-\sin b)-\frac{\pi}{2}n \end{cases}$$

(n — целое число).

Если же $|2a-\sin b|>1$, то система не имеет решений. Таким же путем решаются системы:

$$\begin{cases} \sin x \sin y=a \\ x\pm y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x \cos y=a \\ x\pm y=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=a \\ x\pm y=b \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y=a \\ x\pm y=b. \end{cases}$$

Примечание. В последних системах тангенсы и котангенсы выражают через синус и косинус:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y=\frac{\sin x \cos y}{\cos x \sin y}=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{\sin(x+y)-\sin(x-y)}.$$

Пример 3. $\begin{cases} \sin^2(x+y)-\frac{5}{6}\sin(x+y)+\frac{1}{6}=0 \\ 2x-3y=4. \end{cases}$

Решение. Из первого уравнения находим

$$\sin(x+y)=\frac{5}{12}\pm\sqrt{\frac{25}{144}-\frac{1}{6}}=\frac{5}{12}\pm\frac{1}{12},$$

следовательно, данная система разбивается на две системы:

$$\begin{cases} \sin(x+y)=\frac{1}{2} \\ 2x-3y=4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin(x+y)=\frac{1}{3} \\ 2x-3y=4. \end{cases}$$

Откуда получаем два класса решений данной системы:

$$\begin{cases} x_1=(-1)^n\frac{\pi}{10}+0{,}8+\frac{1}{5}\pi n \\ y_1=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{15}-0{,}8+\frac{2}{5}\pi n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=\frac{3}{5}(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+0{,}8+\frac{3}{5}\pi n \\ y_2=\frac{2}{5}(-1)^{n-1}\arcsin\frac{1}{3}-0{,}8+\frac{2}{5}\pi n \end{cases}$$

где n — целое число.

б) Решение простейших систем II вида с двумя неизвестными

Пример 1. $\begin{cases} \sin(2x+3y+4)=0{,}5 \\ \operatorname{tg}(3x+2y+3)=4. \end{cases}$

Решение. $\begin{cases} 2x+3y+4=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n \\ 3x+2y+3=\operatorname{arctg}4+\pi n_1 \end{cases}$

откуда

$$\begin{cases} x=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{15}-0{,}2+0{,}6\ \operatorname{arctg}4-0{,}2\pi(2n-3n_1) \\ y=(-1)^n\frac{\pi}{10}-1{,}2-0{,}4\operatorname{arctg}4+0{,}2\pi(3n-2n_1) \end{cases}$$

где n и n_1 принимают независимо друг от друга произвольные целые значения.

Пример 2. $\begin{cases} \sin(x+y)=\sin(2x-y) \\ \cos(x+2y)=\cos(y-3x). \end{cases}$

Решение. По известной теореме (§ 46) имеем:

$$\begin{cases} x+y=(-1)^n(2x-y)+\pi n \\ x+2y=\pm(y-3x)+2\pi n_1. \end{cases}$$

Эта система распадается на четыре системы:

$$\begin{cases} x+y=2x-y+2\pi k \\ x+2y=y-3x+2\pi n_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-(2x-y)+\pi(2k+1) \\ x+2y=y-3x+2\pi n_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2x-y+2\pi k \\ x+2y=-(y-3x)+2\pi n_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-(2x-y)+\pi(2k+1) \\ x+2y=-(y-3x)+2\pi n_1 \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем, получим четыре класса решений данной системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1=-\frac{2\pi}{9}(k-2n_1) \\ y_1=\frac{2\pi}{9}(4k+n_1) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=2\pi(3k-2n_1) \\ y_2=2\pi(2k-n_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\frac{\pi}{3}(2k+1) \\ y_3=\frac{2\pi}{3}(3n_1-2k-2) \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=\frac{\pi}{3}(2k+1) \\ y_4=\frac{2\pi}{9}(3n_1+2k+1), \end{cases}$$

где k и n_1 принимают любые целые значения.

Пример 3. $$\begin{cases} 2\sin(x+y)+3\cos^2(x+1)=1 \\ 2\cos(x-y)-\sin^2(x-y)=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Выразив в первом уравнении косинус через синус, а во втором синус через косинус, получим:

$$\begin{cases} \sin^2(x+y)-2\sin(x+y)-2=0 \\ \cos^2(x-y)+2\cos(x-y)-\frac{3}{2}=0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \sin(x+y)=1\pm\sqrt{3} \\ \cos(x-y)=-1\pm\sqrt{2{,}5} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin(x+y)\approx -0{,}732 \\ \cos(x-y)\approx 0{,}581 \end{cases}$$

(корни по абсолютному значению, большие единицы, не рассматриваются).

Решаем полученную систему:

$$\begin{cases} x+y \approx (-1)^{k+1} \arcsin 0{,}732 + \pi k \approx (-1)^{k+1} 0{,}822 + \pi k \\ x-y \approx \pm \arccos 0{,}581 + 2\pi n \approx \pm 0{,}951 + 2\pi n, \end{cases}$$

откуда (как и в предшествующем примере) находим четыре класса решений данной системы:

$$\begin{cases} x_1 \approx 0{,}0645 + \pi(n+k) \\ y_1 \approx -0{,}886 + \pi(n+k) \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \approx -0{,}886 + \pi(k+n) \\ y_2 \approx 0{,}0645 + \pi(k-n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 \approx 0{,}866 + \pi(n+k) + \frac{\pi}{2} \\ y_3 \approx -0{,}0645 + \pi(n-k) + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 \approx -0{,}0645 + \pi(k+n) + \frac{\pi}{2} \\ y_4 \approx 0{,}886 + \pi(k-n) + \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

где k и n принимают произвольные значения.

Пример 4. $\begin{cases} \sin x \sin y = a \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Решение. Сложением и вычитанием получаем систему

$$\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{2} + a \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{2} - a, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{2} + a \\ \cos(x+y) = \frac{1}{2} - a. \end{cases}$$

Накладываем ограничения на a так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\begin{cases} -1 \leqslant \frac{1}{2} + a \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \frac{1}{2} - a \leqslant 1. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно a, получаем

$$-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}.$$

При этом условии имеем:

$$\begin{cases} x - y = \pm \arccos\left(\frac{1}{2} + a\right) + 2\pi n \\ x + y = \pm \arccos\left(\frac{1}{2} - a\right) + 2\pi n_1. \end{cases}$$

Полученная система распадается на четыре алгебраические системы, решение которых не представляет затруднений.

Пример 5. $\begin{cases} \sin x + 2\cos y = 1{,}5 \\ \cos x - 2\sin y = 0{,}5. \end{cases}$

Решение. Уединим $\sin x$ и $\cos x$ и возведем обе части в квадрат, получим:

$$\sin^2 x = 2{,}25 - 6\cos y + 4\cos^2 y$$

$$\cos^2 x = 0{,}25 + 2\sin y + 4\sin^2 y.$$

Сложив почленно, получим:

$$1 = 2{,}5 - 6\cos y + 2\sin y + 4$$

или

$$\cos y - \frac{1}{3}\sin y \approx 0{,}9167.$$

Вводим вспомогательный угол φ, положив $\frac{1}{3} = \operatorname{tg}\varphi$, будем иметь (см. § 50, стр. 355)

$$\cos(y + \varphi) \approx 0{,}9167\cos\varphi,$$

откуда

$$y \approx -\varphi \pm \arccos(0{,}9167\cos\varphi) + 2\pi n.$$

Находим $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx 0{,}3217$;

$$\arccos(0{,}9167\cos\varphi) \approx 0{,}5166.$$

Следовательно, $y \approx -0{,}3217 \pm 0{,}5166 + 2\pi n$

$$y_1 \approx 0{,}1949 + 2\pi n$$

$$y_2 \approx -0{,}8383 + 2\pi n.$$

Подставляем значения y в одно из уравнений данной системы, например во второе, получим:

$$\cos x_1 = 0{,}5 + 2\sin y_1 \approx 0{,}5 + 2\sin 0{,}1949 \approx 0{,}8872,$$

$$\cos x_2 = 0{,}5 + 2\sin y_2 \approx 0{,}5 - 2\sin 0{,}8383 \approx -0{,}9870,$$

откуда $x_1 = \pm 0{,}4797 + 2\pi k$,

$$x_2 = \pm(\pi - 0{,}1600) + 2\pi k \approx \pm 2{,}982 + 2\pi k.$$

Так как в процессе решения нам пришлось возводить уравнения в квадрат, то требуется проверка полученных решений. Подстановкой полученных решений в первое уравнение данной системы находим пригодные решения:

$$\begin{cases} x_1 \approx -0{,}4797 + 2\pi n \\ y_1 \approx 0{,}1949 + 2\pi k \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 \approx 2{,}982 + 2\pi n \\ y_2 \approx -0{,}8383 + 2\pi k \end{cases}$$

(k, n — целые числа).

Упражнения.

1. Решить следующие системы уравнений:

1) $\begin{cases} \cos x - \cos y = 0{,}49 \\ x + y = 77^\circ \end{cases}$

2) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 10 \\ x + y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a}{b} \\ x + y = \alpha \end{cases}$

4) $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0{,}84 \\ x - y = 5^\circ \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + 1) \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}(\sqrt{3} - 1) \end{cases}$

6) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \\ 2 \cos x \cos y = 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0{,}2 \\ \cos x + \cos y = -0{,}2 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25 \\ 3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 0 \end{cases}$

§ 57. Некоторые задачи, сводимые к исследованию круговых функций

Уже много раз мы имели возможность убеждаться в эффективности тех методов исследования, которыми вооружила нас тригонометрия. Здесь мы приведем еще несколько примеров задач, разрешаемых весьма просто с помощью круговых функций.

Задача 1. По двум концентрическим окружностям совершают равномерное движение точки M и M_1 причем точка M движется по окружности радиуса R и делает n об/сек, а точка M_1 движется по окружности радиуса R_1 и делает n_1 об/сек. Обе точки начинают движение одновременно, находясь на наименьшем расстоянии друг от друга.

Выразить расстояние между точками как функцию времени. Найти моменты времени, когда эта функция достигает максимума и минимума.

Решение. Построим на плоскости окружностей прямоугольную систему координат с началом O в общем центре окружностей (рис. 155). Пусть в начале движения точки M и M_1 занимали положения A и A_1 на оси Ox и за t сек. первая из них описала дугу AM а вторая дугу A_1M_1.

Так как угловая скорость движения точки M равна $2\pi n$ рад/сек, а точки M_1 — $2\pi n_1$ рад/сек, то $\smile AM=2\pi nt$ радиан, а $\smile A_1M_1=2\pi n_1 t$ радиан.

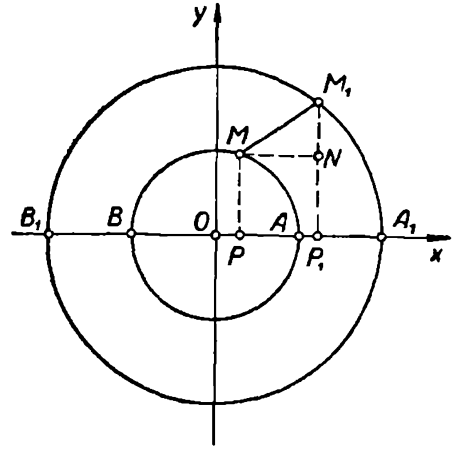


Рис. 155.

По определению синуса и косинуса имеем:

$$\frac{PM}{R}=\sin\smile AM,$$

$$\frac{OP}{R}=\cos\smile AM,$$

откуда $PM=R\sin 2\pi nt$, $OP=R\cos 2\pi nt$.

Аналогично,

$P_1M_1=R_1\sin 2\pi n_1 t$,

и $OP_1=R_1\cos 2\pi n_1 t$.

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим:

$$MM_1=\sqrt{MN^2+M_1N^2}=\sqrt{(OP_1-OP)^2+(P_1M_1-PM)^2}=$$

$$=\sqrt{(R_1\cos 2\pi n_1 t-R\cos 2\pi nt)^2+(R_1\sin 2\pi n_1 t-R\sin 2\pi nt)^2}=$$

$$=\sqrt{R_1^2+R^2-2R_1R\cos 2\pi(n_1-n)t}.$$

Итак, искомое расстояние выразилось функцией

$$S=\sqrt{R_1^2+R^2-2R_1R\cos 2\pi(n_1-n)t}.$$

Наибольшее значение эта функция достигает тогда, когда $\cos 2\pi(n_1-n)t=-1$, т. е. при $2\pi(n_1-n)t=\pi(2k+1)$ или $t=\dfrac{2k+1}{2(n_1-n)}$, где $n_1\neq n$ и $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

$S_{\max}=\sqrt{R_1^2+R^2+2R_1R}=R_1+R$. Это бывает в те моменты когда точка M занимает положение A или B

а точка M_1 находится соответственно в положении B_1 или A_1.

Наименьшее значение функция имеет тогда, когда $\cos 2\pi(n_1 - n)t = 1$, т. е. при $2\pi(n_1 - n)t = 2\pi k$, или $t = \frac{k}{n_1 - n}$ (если $n \neq n_1$); $S_{\min} = \sqrt{R_1^2 + R^2 - 2R_1R} = R_1 - R$. Очевидно, это соответствует тем моментам движения, когда точки M и M_1 проходят через первоначальные свои положения A и A_1.

Если $n_1 = n$, то расстояние между точками будет неизменным в процессе движения, так как в этом случае $S = \sqrt{R_1^2 + R^2 - 2R_1R\cos 2\pi \cdot 0 \cdot t} = R_1 - R$ при любом значении t.

Задача 2. Исследовать движение снаряда в безвоздушном пространстве при условии, что снаряд выброшен

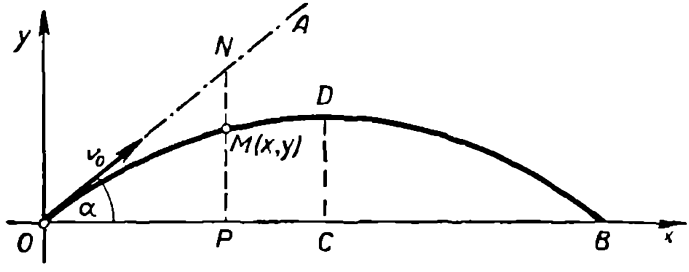


Рис. 156.

из ствола орудия O с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонтальной плоскости (к горизонту орудия).

Решение. а) Уравнение траектории полета. Ориентируем плоскость полета снаряда системой прямоугольных координат, как указано на рисунке 156. Положение летящего снаряда будет определяться координатами x и y его центра тяжести M.

С перемещением снаряда в плоскости xOy будут изменяться некоторым образом и координаты точки $M(x, y)$, описывающей траекторию полета.

Пусть через t сек. после вылета из канала ствола снаряд оказался в точке $M(x, y)$. Если бы на снаряд не действовала сила земного притяжения, он совершил бы за t сек. прямолинейный путь $ON = v_0t$. Но за это время под действием силы тяжести, сообщающей ускорение g, снаряд отклонится от первоначального напра-

вления OA на отрезок $NM = \frac{gt^2}{2}$ и окажется в точке $M(x, y)$, где $x = OP = ON\cos\alpha = v_0 t\cos\alpha$,

$$y = PM = PN - NM = ON\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Итак, мы получили следующее параметрическое уравнение траектории полета снаряда:

$$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha & (1) \\ y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. & (2) \end{cases}$$

Исключив параметр t, получим обычное уравнение траектории:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\operatorname{tg}\alpha \qquad (3)$$

или, положив

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} = a \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = b,$$

$$y = ax^2 + bx. \qquad (3')$$

Из курса алгебры известно, что графиком данной функции (3′) является парабола, проходящая через начало координат, с осью симметрии, параллельной оси Oy, причем ветви параболы направлены вниз. Таким образом, центр тяжести снаряда описывает параболическую кривую, изображенную на рисунке.

б) Дальность полета. Пусть снаряд упал на линии горизонта орудия Ox, тогда дальность полета OB равна абсциссе точки B, у которой ордината равна 0. Следовательно, положив в уравнение (3′) $y = 0$, найдем абсциссу точки B, т. е.

$$0 = ax^2 + bx,$$

или

$$x(ax + b) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0;\quad x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{v_0^2}{g}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Итак, дальность полета

$$S = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \qquad (4)$$

зависит от v_0 и α. При данной начальной скорости v_0 наибольшая дальность полета будет при угле бросания $\alpha=45°$, так как в этом случае $\sin 2\alpha = \sin 90° = 1$ принимает наибольшее значение.

в) Наибольшая высота подъема снаряда. Наибольшая высота подъема снаряда определяется наибольшей ординатой параболы. Такую ординату имеет точка D, в которой пересекается парабола со своей осью симметрии CD. Абсцисса точки D

$$x = OC = \frac{1}{2} OB = \frac{1}{2} S = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha$$

Подставив значение x в уравнение (3), получим ординату y точки D:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\left(\frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Итак, наибольшая высота подъема снаряда

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \qquad (5)$$

также зависит от v_0 и α. Очевидно, $H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$, когда $\sin \alpha = 1$, т. е. при стрельбе в зенит.

Продолжительность полета. Из уравнения (1) находим время

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

В момент, когда снаряд упал, аргумент x принял наибольшее значение, т. е.

$$x = S = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Следовательно, продолжительность полета

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g v_0 \cos \alpha} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \qquad (6)$$

Итак, продолжительность полета также зависит от v_0 и α. При заданной начальной скорости снаряда v_0 наибольшая продолжительность его полета

$$t_{\max} = \frac{2v_0}{g},$$

когда $\sin \alpha = 1$, т. е. при стрельбе в зенит.

д) Угол стрельбы. Пусть цель находится в точке K, расположенной на склоне горы (рис. 157) так, что возвышение цели над горизонтом орудия $K'K = h$ *м*, топографическая дальность цели $OK' = l$ *м*. Тогда точка $K(x, y)$ имеет абсциссу $x=l$ и ординату $y=h$. Подставив эти значения x и y в уравнение (3), получим:

$$h = -\frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + l \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — искомый угол стрельбы.

Решаем это уравнение относительно α.

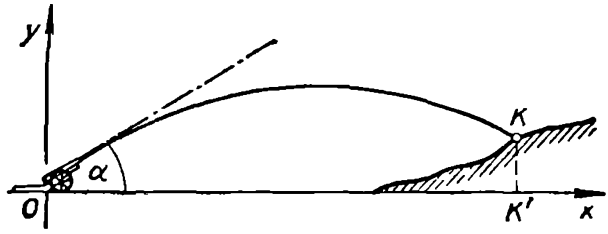


Рис. 157.

Производим замену $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, получаем квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + p \operatorname{tg} \alpha + q = 0,$$

где $p = -\frac{2v_0^2}{gl}$, $q = v_0 + \frac{2hv_0^2}{gl^2}$,

следовательно.

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Исследования показывают, что существуют два решения:

$$\alpha_1 \leqslant 45^\circ \quad \text{и} \quad \alpha_2 \geqslant 45^\circ.$$

Это обстоятельство объясняется тем, что одинаковое отклонение направления бросания снаряда вверх и вниз от угла $\alpha = 45^\circ$ обеспечивает одинаковую дальность полета. Действительно, пусть указанное отклонение равно β $(0 \leqslant \beta \leqslant 45^\circ)$, тогда имеем два направления:

$$\alpha_1 = 45^\circ - \beta \text{ и } \alpha_2 = 45^\circ + \beta.$$

Подставляем эти значения α в формулу (4), получаем:

$$S_1 = \frac{v_0^2}{g}\sin(90^\circ - 2\beta) = \frac{v_0^2}{g}\cos 2\beta,$$

$$S_2 = \frac{v_0^2}{g}\sin(90^\circ + 2\beta) = \frac{v_0^2}{g}\cos 2\beta.$$

Итак, $S_1 = S_2$.

Задача 3. При конструировании трансформатора переменного тока весьма важно возможно больше заполнить железным сердечником крестообразного сечения внутренность цилиндрической катушки.

Каковы должны быть размеры x и y сечения сердечника, изображенного на рисунке 158, если радиус катушки равен a?

Р е ш е н и е. Выражаем площадь S сечения сердечника через x и y: $S = 4y^2 - 4(y-x)^2 = 4(2xy - x^2)$.

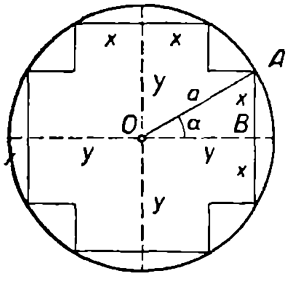


Рис. 158.

Пусть $\angle AOB = \alpha$, тогда $x = a\sin\alpha$, $y = a\cos\alpha$ и, следовательно, $S = 4\ (2a^2\sin\alpha\cos\alpha - a^2\sin^2\alpha) = 2a^2(2\sin 2\alpha - 2\sin^2\alpha) = 2a^2[(2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) - 1]$.

Внесем обозначение: $z = 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$, будем иметь: $S = 2a^2 \times (z-1)$, следовательно, площадь S будет максимальной при наибольшем значении z.

Чтобы найти значение α, при котором функция $z = 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$ достигает максимума, введем вспомогательный угол φ, положив $\operatorname{tg}\varphi = 2$, будем иметь:

$$z = \operatorname{tg}\varphi\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \frac{\sin\varphi\sin 2\alpha + \cos\varphi\cos 2\alpha}{\cos\varphi} = \frac{\cos(\varphi - 2\alpha)}{\cos\varphi}.$$

Итак, наибольшее значение для z получится при $\cos(\varphi - 2\alpha) = 1$, т. е. при $\varphi - 2\alpha = 0$ или $\alpha = \frac{\varphi}{2}$.

По таблицам находим $\varphi = \operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ 34'$, следовательно, $\alpha \approx 31^\circ 47'$, $x \approx a\sin 31^\circ 47' \approx 0{,}527a$, $y \approx a\cos 31^\circ 47' \approx 0{,}850a$;

$$z_{\max} = \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$S_{\max} = 2a^2(\sqrt{5} - 1) \approx 2{,}472a^2.$$

Задача 4. Существует ли такой круговой сегмент, хорда которого равна длине вписанной в него наибольшей окружности?

Решение. Предположим, что такой сегмент существует (рис. 159). Пусть его дуга $ADB = x$ радиан и радиус вписанной в него наибольшей окружности равен r.

По теореме о пропорциональных отрезках в круге имеем:

$$AC^2 = DC \cdot CE. \qquad (*)$$

Но по условию $AC = \pi r$, $DC = 2r$, $CE = DE - DC = 2AO - DC = 2\dfrac{\pi r}{\sin\frac{x}{2}} - 2r$, так как $AO = \dfrac{AC}{\sin AOC} = \dfrac{\pi r}{\sin\frac{x}{2}}$;

следовательно, равенство (*) запишется так:

$$\pi^2 r^2 = 2r\left(2 \cdot \frac{\pi r}{\sin\frac{x}{2}} - 2r\right),$$

откуда

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{4\pi}{\pi^2 + 4} \approx 0{,}9060,$$

$$\frac{x}{2} \approx 64^\circ 58', \quad x \approx 129^\circ 56'.$$

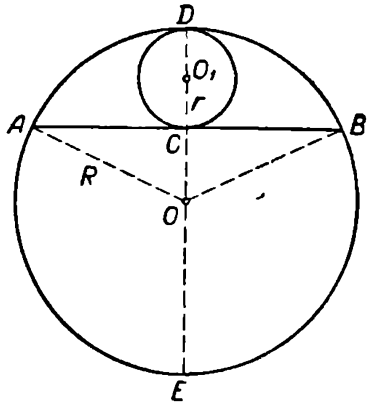


Рис. 159.

Итак, существование сегмента, удовлетворяющего условию задачи, возможно. Приближенно, с помощью транспортира такой сегмент легко построить.

Упражнения.

1. Из бревна цилиндрической формы надо выпилить балку с прямоугольным поперечным сечением наибольшей площади (наибольшего периметра). Найти размеры поперечного сечения балки.

Указание. Обозначить через D диаметр бревна и через x угол между диагоналями поперечного сечения балки тогда площадь S и периметр P сечения выразятся функциями:

$$S = \frac{1}{2} D^2 \sin x,$$

$$P = 2D\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right).$$

Эти функции надо исследовать на максимум.

2. Прямой угол MAN вращается вокруг своей вершины A, расположенной между двумя данными параллельными прямыми (рис. 160), и пересекает эти прямые в точках B и C. Определить такое положение угла, при котором треугольник BAC имеет минимальную площадь.

Указание. Положение угла MAN вполне определяется величиной угла α, образуемого лучом AM с данными прямыми Площадь треугольника BAC можно выразить через угол α и отрезки a и b, которыми измеряется расстояние точки A от параллелей а затем исследовать полученную функцию

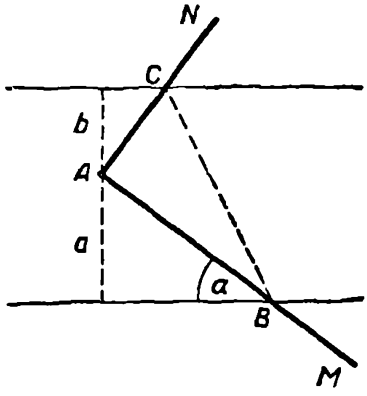


Рис. 160.

3. В данный круговой сектор вписать прямоугольник наибольшей площади.

Указание. Пусть α — центральный угол сектора, R — радиус и x — радианная мера дуги, стягивающей сторону AB искомого прямоугольника

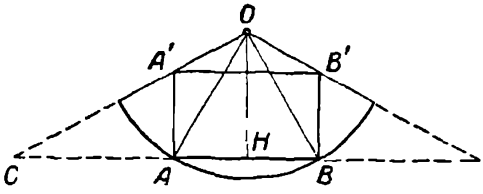


Рис. 161.

(рис. 161). Площадь этого прямоугольника $S = AB \cdot AA'$.

Применяя соответствующие теоремы геометрии и тригонометрии к указанным на рисунке треугольникам, находим:

1) $AB = 2R \sin \frac{x}{2}$

2) $\frac{AA'}{OH} = \frac{AC}{HC}$, откуда $AA' = \frac{OH \cdot AC}{HC}$;

3) $OH = R \cos \frac{x}{2}$; $HC = OH \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = R \cos \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$AC = HC - AH = R \cos \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - R \sin \frac{x}{2} = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{x}{2} \right).$$

После соответствующих подстановок получаем:

$$S = \frac{2R^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{x}{2} \right).$$

Остается исследовать полученную функцию на максимум, найти соответствующее значение x и построить искомый прямоугольник.

ГЛАВА X

ТРИАНГУЛЯЦИЯ

§ 58 Треугольник как элемент геометрических фигур

Изучение многих геометрических фигур осуществляется через разложение их на треугольники и раскрытие зависимостей между элементами этих треугольников. Известно, например, что всякий плоский многоугольник разлагается на треугольники его диагоналями, причем все элементы многоугольника (стороны, углы, диагонали, площадь и т. д.) вполне определяются соответствующими элементами этих треугольников. В частности, выпуклый n-угольник разлагается на $n-2$ треугольника диагоналями, проведенными из любой его вершины.

Разложение на треугольники криволинейных фигур уже невозможно. Однако в тех случаях, когда криволинейная фигура может быть получена через предельный переход от вписанного в нее многоугольника, разлагают на треугольники этот многоугольник и через предельный переход устанавливают связи элементов криволинейной фигуры с деформирующимися (в процессе предельного перехода) элементами этих треугольников.

Так, например, поступают в геометрии при изучении круга и окружности. Эти криволинейные фигуры получаются через предельный переход от вписанного в них правильного многоугольника при неограниченном удвоении числа его сторон; причем площадь круга оказывается равной пределу суммы площадей треугольников, на которые разлагается вписанный многоугольник, а длина окружности равна пределу суммы соответствующих сторон этих треугольников. Следует отметить, что в технической практике при сооружении различных конструк-

ций из стержней учитывается еще одна особенность треугольника: конструкции треугольной формы, сделанные из стержней, обладают свойством «жесткости» и «устойчивости», тогда как конструкции в форме многоугольника легко деформируются. Именно это обстоятельство заставляет инженеров при сооружении различных арок, мостов, перекрытий для крыш и т. п. «разлагать»

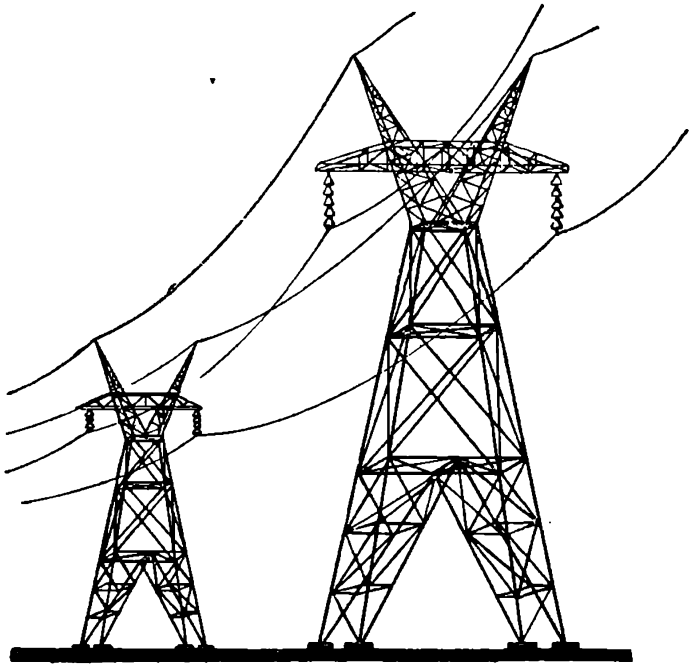


Рис. 162.

конструкции многоугольной формы на треугольные (см. рис. 162) внесением в них вспомогательных стержней-укосов.

Таким образом, как в теории, так и на практике треугольник служит существенным элементом геометрических фигур. Вот почему так подробно изучается треугольник в геометрии и в специальном учебном предмете тригонометрии, т. е. треугольникоизмерении.

В первой части книги было уделено много внимания двум методам решения треугольников: чисто геометрическому построительному методу и методу вычислитель-

ному, опирающемуся на теорию тригонометрических функций. При этом были показаны на ряде конкретных примеров существенные преимущества вычислительного тригонометрического метода перед методом построительным.

Ограниченность сведений из теории круговых функций в первой части курса тригонометрии вынуждала нас сводить всякую геометрическую задачу к решению только прямоугольных треугольников и затрачивать иногда много времени и сил на составление и решение различных вспомогательных уравнений.

Изученная нами в данном курсе теория круговых функций дает возможность создать общую теорию решения треугольников (любой формы), благодаря которой указанные трудности в значительной мере преодолеваются. В основе этой теории лежат функциональные зависимости между элементами треугольника, раскрывающиеся с помощью круговых функций. Выводу и исследованию этих зависимостей отводится начало этой главы. При этом (как и в первой части книги) мы будем придерживаться следующих обозначений для основных элементов в треугольнике ABC, употребляемых Леонардом Эйлером в 1753 году в его труде «Принципы сферической тригонометрии»:

A, B, C — углы треугольника;

a, b, c — противолежащие соответствующим углам стороны.

При записи неосновных элементов треугольника ABC будем употреблять следующие знаки, закрепившиеся, как наиболее удобные, в литературе XIX века:

h_a, h_b, h_c — высоты, опущенные из соответствующих вершин;

m_a, m_b, m_c — соответствующие медианы;

l_a, l_b, l_c — соответствующие биссектрисы;

$2p$ — периметр;

S — площадь;

r — радиус вписанного круга;

R — радиус описанного круга.

При написании «родственных» формул, выражающих зависимости между элементами треугольника, мы будем часто прибегать к так называемой циклической замене, введенной Лейбницом в 1666 году в его диссертации «Искусство комбинаторики»

Поясним принцип циклической замены на следующем примере.

Пусть уже доказана теорема о выражении медианы треугольника через его стороны и записана равенством

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \qquad (*)$$

для случая, когда рассматривается медиана, проведенная из вершины A Чтобы записать соответствующие формулы для двух других медиан m_b и m_c, достаточно осуществить в формуле (*) замену a на b, b на c и c на a:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2},$$

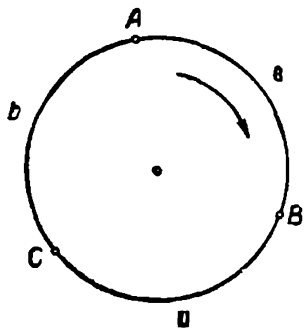


Рис. 163.

а затем b на a, c на a и a на b:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Возможность такой замены основана на том, что доказательство теоремы одинаково для всех трех медиан и не зависит от того, какими буквами обозначить вершины и стороны треугольника. Поэтому вывод теоремы не изменится, если в треугольнике осуществить круговую перестановку обозначений для вершин A, B, C и сторон a, b, c.

Запомнить такую перестановку удобнее на окружности (см. рис. 163), поэтому ее и называют циклической (круговой).

§ 59. Зависимость между основными элементами треугольника

Основными элементами треугольника называют его стороны и углы. Соотношение между углами треугольника выражается известным из геометрии равенством

$$A + B + C = \pi. \qquad (Ia)$$

найденным греческим философом Фалесом (Милет, 624—548 до н. э.) и доказанным в начале III в. до н. э Евклидом.

Используя равенство (I а) и формулы приведения, можно получить различные (встречающиеся при решении задач) зависимости между круговыми функциями углов треугольника. Например:

$$\sin(B+C)=\sin(\pi-C)=\sin C,$$

$$\cos(B+C)=\cos(\pi-C)=-\cos C \text{ и т. п.}$$

Заметив, что

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=\frac{\pi}{2},$$

находим:

$$\sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2},$$

$$\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2} \text{ и т. д.}$$

Зависимости между углами и сторонами треугольника выражаются в нескольких теоремах.

I. ***Теорема синусов.*** *Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов, т. е.*

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R, \quad \text{(I б)}$$

где R — радиус круга, описанного около данного треугольника.

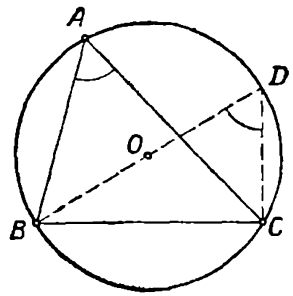


Рис. 164

Доказательство. Опишем около треугольника ABC круг (рис. 164) и обозначим его радиус через R.

Проведя через вершину B диаметр BD и соединив его конец D с вершиной C, получим прямоугольный треугольник BCD, из которого имеем:

$$BC=BD\cdot\sin D$$

Так как $BC=a$, $BD=2R$ и $\measuredangle D=\measuredangle A$, то

$$a=2R\cdot\sin A$$

На рисунке 164 угол A — острый, но полученное равенство справедливо и в том случае, когда угол A—

тупой (рис. 165). Действительно, повторив указанное построение для треугольника ABC с тупым углом A, получим прямоугольный треугольник BCD, из которого имеем:

$$BC = BD \cdot \sin D,$$

но по теореме об углах вписанного четырехугольника $\measuredangle A + \measuredangle D = 180°$, следовательно, $\measuredangle D = 180° - A$ и $\sin D = \sin(180° - A) = \sin A$, поэтому предыдущее равенство запишется так:

$$a = 2R \sin A.$$

Аналогичными рассуждениями можно получить равенства:

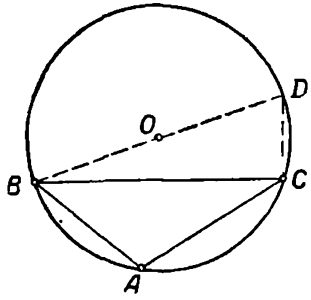


Рис. 165.

$$b = 2R \cdot \sin B,$$

$$c = 2R \cdot \sin C.$$

Эти равенства можно записать в следующем виде:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

откуда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Эти соотношения верны и для прямоугольного треугольника.

В самом деле, если в треугольнике ABC угол C — прямой, то

$$\frac{a}{\sin A} = c, \quad \frac{b}{\sin B} = c \text{ и } \frac{c}{\sin C} = c \left(\sin c = \sin \frac{\pi}{2} = 1\right);$$

а так как диаметр круга, описанного около прямоугольного треугольника, равен гипотенузе, то получаем:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = c = 2R.$$

Теорема синусов была найдена индийским математиком Брамагуптой (598—660). Доказал же эту теорему позднее азербайджанский ученый Насирэддин (1201—1274).

II. ***Теорема косинусов.*** *Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними*

Доказательство. Пусть ABC (рис. 166) — треугольник, у которого угол A острый; опустив из вершины B перпендикуляр BD на сторону AC и применяя известную из геометрии теорему о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла, находим:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AD.$$

Но из треугольника ABD имеем:

$$AD = c \cdot \cos A,$$

следовательно,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \qquad \text{(II а)}$$

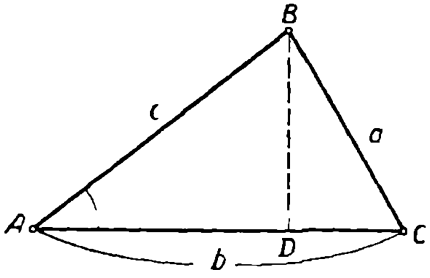


Рис. 166.

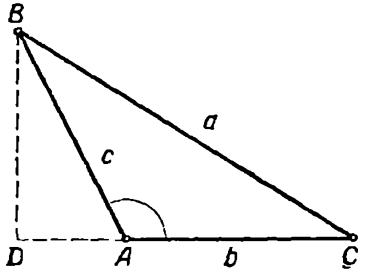


Рис. 167.

Если угол A в треугольнике ABC тупой (рис. 167), то по теореме геометрии о квадрате стороны, лежащей против тупого угла, будем иметь:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot AD;$$

но из прямоугольного треугольника ABD находим:

$$AD = c \cdot \cos BAD = c \cdot \cos(180^\circ - A) = -c \cdot \cos A,$$

следовательно, как и в первом случае, получим

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \qquad \text{(II а)}$$

Наконец, заметим, что эта формула справедлива и в том случае, когда угол A прямой; действительно при этом $\cos A = \cos 90^\circ = 0$ и равенством (II а) выразится известная теорема Пифагора:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Совершив в формуле (II а) циклическую замену букв, получим:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B; \qquad \text{(II б)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C. \qquad \text{(II в)}$$

Теорема косинусов была найдена выдающимся хорезмским ученым-математиком аль-Бируни (973—1048, Багдад, Средняя Азия).

III. ***Теорема.*** *Во всяком треугольнике сторона равна сумме двух произведений, получаемых от умножения каждой из остальных двух сторон на косинус угла, образуемого ею с первой стороной.*

Доказательство. Проведем в треугольнике ABC из вершины A высоту AD (рис. 168); если углы B и C острые, то

$$a = BD + DC,$$

а если один из этих углов, например C, тупой, то

$$a = BD - DC.$$

Но в первом случае $DC = b\cos C$, во втором $DC = b\cos ACD = b\cos(180° - C) = -b\cos C$ и в обоих случаях $BD = c \cdot \cos B$; следовательно, в обоих случаях получим:

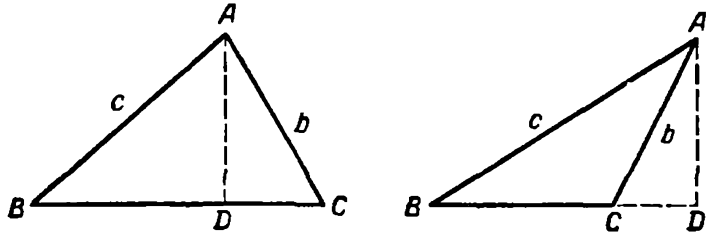


Рис. 168.

$$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B. \qquad \text{(III а)}$$

Совершив циклическую замену букв, получим:

$$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C; \qquad \text{(III б)}$$

$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A. \qquad \text{(III в)}$$

Полученные равенства имеют силу и в прямоугольном треугольнике. Так, например, если угол C прямой, то $\cos C = \cos 90° = 0$ и равенство (III а) выразит известную зависимость между элементом прямоугольного треугольника:

$$a = c \cdot \cos B.$$

Замечание. Рассмотренные теоремы привели нас к трем группам соотношений между элементами треугольника:

$$\text{I} \begin{cases} A + B + C = \pi & \text{(а)} \\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} & \text{(б)} \end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A & \text{(а)} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B & \text{(б)} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C & \text{(в)} \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B & \text{(а)} \\ b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C & \text{(б)} \\ c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A. & \text{(в)} \end{cases}$$

Эти три системы соотношений называют основными. Система (III) была доказана французским математиком Карно (1753—1823).

§ 60. Эквивалентность трех основных систем соотношений между элементами треугольника

Теорема I. *Системы основных соотношений (I), (II) и (III) эквивалентны между собой, т. е. из любой из этих систем соотношений можно получить, как следствия, две другие системы при условии, что a, b, c, A, B и C — положительные числа из которых последние три меньше* π[1].

Доказательство. 1. Покажем, что из системы (I) получается, как следствия, системы (II и III).

В самом деле, из равенства (I а) имеем:

$$A = \pi - (B + C),$$

откуда

$$\sin A = \sin (B + C)$$

или

$$\sin A = \sin B \cos C + \cos B \sin C. \qquad (*)$$

Из соотношения (I б)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$$ (k — коэффициент пропорциональности)

находим:

$$\sin A = \frac{a}{k}, \quad \sin B = \frac{b}{k}, \quad \sin C = \frac{c}{k}. \qquad (**)$$

Внося эти значения синусов в равенство (*) и умножая на k, получаем

$$a = b \cos C + c \cos B$$

---

[1] Эквивалентность этих трех систем начала устанавливаться в XVIII и начале XIX в. во Франции в работах математиков Лагранжа, Карно и Коши.

Аналогичным путем получаются два других соотношения системы (III).

Для получения соотношений системы (II) возведем почленно в квадрат равенство (*) и выполним следующие преобразования:

$$\sin^2 A = \sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \sin^2 C +$$
$$+ 2\sin B \sin C \cos B \cos C = \sin^2 B(1 - \sin^2 C) +$$
$$+ \sin^2 C(1 - \sin^2 B) + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C =$$
$$= \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C(\cos B \cos C -$$
$$- \sin B \sin C) = \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos(B + C).$$

Приняв во внимание, что $B + C = \pi - A$ и, следовательно,

$$\cos(B + C) = -\cos A,$$

получаем:

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A.$$

Внося в это равенство значения синусов из соотношений (**) и умножая на k^2, получаем первое равенство системы (II):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Аналогично устанавливаются другие равенства этой системы.

2. Покажем теперь, что из системы соотношений (II) следуют системы (III) и (I).

В самом деле, сложим почленно последние два равенства системы (II), получим:

$$b^2 + c^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2ac \cos B - 2ab \cos C,$$

откуда

$$2a^2 = 2ab \cos C + 2ac \cos B.$$

Разделив это равенство на $2a$, получаем первое из соотношений системы (III): $a = b \cos C + c \cos B$; два других соотношения этой системы получаются аналогично.

Для получения системы (I) можно воспользоваться теперь соотношениями системы (III), которые мы только что вывели из системы (II).

С этой целью исключим c из равенств (III), для чего умножим первое из этих равенств на a, а второе на $-b$ и почленно сложим, получим соотношение:

$$a^2 - b^2 = c(a \cos B - b \cos A).$$

Подставив значение c из третьего равенства, получим:

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A,$$

откуда

$$a^2(1 - \cos^2 B) = b^2(1 - \cos^2 A),$$

или

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A,$$

$$a \sin B = b \sin A,$$

а потому

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Так же доказывается равенство:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$$ (k—коэффициент пропорциональности)

Из этого соотношения находим:

$$a = k \sin A, \quad b = k \sin B, \quad c = k \sin C. \qquad (***)$$

Подставив эти значения a, b и c в равенство

$$a = b \cos C + c \cos B$$

и сократив на k, получаем:

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

или

$$\sin A = \sin(B + C).$$

Принимая во внимание, что $0 < A < \pi$ и $0 < B + C < 2\pi$, находим, что: либо $A = B + C$, либо $A + B + C = \pi$.

Аналогичным путем, подставляя значения a, b, c (***) в другие равенства системы (III), найдем:

$$\text{либо } B = A + C, \quad \text{либо } A + B + C = \pi,$$

$$\text{либо } C = A + B, \quad \text{либо } A + B + C = \pi.$$

Рассматривая совместно эти равенства, замечаем, что всегда будет справедливо соотношение:

$$A + B + C = \pi.$$

Что же касается первых равенств, то их совместное существование невозможно. Действительно, если допустить, например, что

$$A = B + C \quad \text{и} \quad B = A + C,$$

то получим $C = 0$, чего по условию не может быть.

Замечание. Одновременное существование равенства $A = B + C$ и $A + B + C = \pi$ возможно, если $A = B + C = \frac{\pi}{2}$.

3. Докажем, наконец, что из соотношений системы (III) следуют системы (I) и (II).

Только что показано, как из системы (III) получается система (I), следовательно, остается получить систему (II). С этой целью умножим равенства системы (III) соответственно на a, b и c и сложим почленно, тогда получим:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C,$$

откуда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Аналогично получаются два других соотношения системы (II).

Таким образом, теорема доказана полностью.

Теорема II. *Любая из систем (I), (II) и (III) выражает необходимые и достаточные условия, при выполнении которых положительные числа a, b и c выражают длины сторон некоторого треугольника, а положительные, меньше π, числа A, B и C выражают величины соответствующих углов этого треугольника.*

Доказательство необходимости. Пусть существует треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими им углами A, B и C. Тогда, по доказанному в предыдущем параграфе, между элементами этого треугольника имеет место любое из соотношений систем (I), (II) и (III).

Доказательство достаточности. Поскольку системы (I), (II) и (III) равносильны, то можно ограничиться доказательством достаточности одной какой-либо системы. Покажем, например, что для существования треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими им углами A, B и C достаточно того, что эти числа удовлетворяют равенствам системы (III).

В самом деле, из первого равенства системы (III) имеем:

$$a \leqslant b|\cos C| + c|\cos B| < b + c.$$

Из двух других равенств этой системы получим:

$$b < a + c \quad \text{и} \quad c < b + a.$$

Итак, числа a, b и c таковы, что любое из них меньше суммы двух других. Из геометрии известно, что при этом условии существует треугольник, стороны которого выражаются числами a, b и c. Обозначим через A',B' и C' углы этого треугольника, противолежащие (соответственно) сторонам a, b и c. Применив к этому треугольнику теорему косинусов, получим:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A',$$

откуда

$$A' = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \qquad (\alpha)$$

С другой стороны, в силу эквивалентности систем (III) и (II) числа a, b, c A, B, C удовлетворяют равенству

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

откуда

$$A = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \qquad (\beta)$$

Сопоставляя равенства (α) и (β), приходим к выводу, что

$$A' = A.$$

Аналогично убеждаемся, что $B' = B$ и $C' = C$.
Итак, теорема доказана.

§ 61. Основные четыре случая решения треугольников

К основным случаям решения треугольников относят задачи, в которых даются три основных независимых элемента треугольника и требуется вычислить остальные его элементы. В случае прямоугольного треугольника один элемент (прямой угол C) уже известен, поэтому в задачах на решение прямоугольных треугольников задают только два независимых элемента. Решение прямоугольных треугольников рассмотрено нами в первой части книги, поэтому начнем сразу рассмотрение задач на решение треугольников любого вида. По характеру

данных основные задачи на решение треугольника можно разбить на четыре типа:

1) даны сторона и два угла;

2) даны две стороны и угол между ними;

3) даны две стороны и угол, лежащий против одной из них;

4) даны три стороны треугольника.

Рассмотрим отдельно каждый из них.

I тип. Решение треугольника по стороне и двум углам

Дано a, B и C. Найти A, b и c.

Решение возможно, если выполняется условие: $B+C<180°$. Используя в этом случае равенства системы (I), находим:

$$A=180°-(B+C);\quad b=\frac{a\sin B}{\sin A};\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

Для проверки решения можно вычислить данную сторону a по формуле:

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Эту формулу, записанную в следующем виде

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}, \qquad \text{(IV)}$$

называют по традиции формулой Мольвейде по имени немецкого астронома Карла Мольвейде (1774—1825), хотя впервые ее вывел Исаак Ньютон в своей «Универсальной арифметике», изданной в 1707 году.

Для доказательства этой формулы достаточно положить (на основании теоремы синусов) $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$ и $c=2R\sin C$.

Действительно. $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{2R\sin A}{2R\sin B+2R\sin C}=$

$$=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Но $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$, так как $\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}$, следовательно, после сокращения получаем:

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Рассмотрим примеры с числовыми данными.

Пример 1. На практических занятиях по математике учащимся указали два доступных пункта B и C и один недоступный пункт A, расположенный за речкой (рис. 169), и предложили найти расстояния от пунктов B и C до пункта A и угол, под которым виден отрезок BC из пункта A.

Заметив, что пункты A, B и C являются вершинами треугольника ABC, учащиеся нашли непосредственным измерением $BC=a=54$ *м*, $\measuredangle ABC=\measuredangle B=73°$ и $\measuredangle ACB=\measuredangle C=40°$, а затем вычислением нашли недоступные расстояния $AC=b$, $AB=c$ и угол $BAC=A$. Дано: $a=54$, $B=73°$, $C=40°$; найти A, b, c.

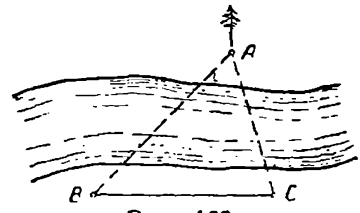


Рис. 169.

1) Вычисление A:

$$A=180°-(B+C)=180°-113°=67°.$$

2) Вычисление b:

$$b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin A}=\frac{54\cdot\sin 73°}{\sin 67°}\approx\frac{54\cdot 0{,}956}{0{,}921}\approx 56{,}0\approx 56.$$

3) Вычисление c:

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{54\cdot\sin 40°}{\sin 67°}\approx\frac{54\cdot 0{,}643}{0{,}921}\approx 37{,}7\approx 38.$$

4) Для контроля вычисляем сторону a:

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\approx\frac{93{,}7\cdot\sin 33°30'}{\cos 16°30'}\approx\frac{93{,}7\cdot 0{,}552}{0{,}959}\approx 54.$$

Пример 2. Дано: $a = 548{,}7$; $B = 72°53'$; $C = 40°6'$; найти A, b, c.

Проведем решение с помощью четырехзначных таблиц логарифмов.

1) Вычисление A:

$$A = 180° - (B + C) = 180° - 112°59' = 67°1'.$$

2) Вычисление b:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad \lg b = \lg a + \lg \sin B - \lg \sin A$$

$$\begin{array}{r|l} \lg a = \lg 548{,}7 = 2{,}7394 & \\ \lg \sin B = \lg \sin 72°53' = \bar{1}{,}9804 & \lg \sin 67°1' = \bar{1}{,}9641 \\ \underline{-\lg \sin A = -\lg \sin 67°1' = 0{,}0359} & \underline{-\lg \sin 67°1' = 0{,}0359} \\ \lg b = 2{,}7557 & \\ b = 569{,}8 & \end{array}$$

3) Вычисление c:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad \lg c = \lg a + \lg \sin C - \lg \sin A$$

$$\begin{array}{r} \lg a = 2{,}7394 \\ \lg \sin C = \bar{1}{,}8090 \\ \underline{-\lg \sin A = 0{,}0359} \\ \lg c = 2{,}5843 \\ c = 384{,}0 \end{array}$$

4) Контрольное вычисление a:

$$a = \frac{(b + c) \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B - C}{2}}, \quad \lg a = \lg (b + c) + \lg \sin \frac{A}{2} - \lg \cos \frac{B - C}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} \lg (b + c) = 2{,}9795 & b = 569{,}8;\ \frac{A}{2} = 33°30'; \\ \lg \sin \frac{A}{2} = \bar{1}{,}7419 & \frac{c = 384{,}0}{b + c = 953{,}8};\ B = 72°53' \\ \underline{-\lg \cos \frac{B - C}{2} = 0{,}0180} & \underline{C = 40°6'} \\ \lg a = 2{,}7394 & B - C = 32°47' \\ a = 548{,}8 & \frac{B - C}{2} = 16°23' \end{array}$$

$$\lg\cos\frac{B-C}{2} = \bar{1},9820;$$

$$-\lg\cos\frac{B-C}{2} = 0,0180.$$

II тип. Решение треугольников по двум сторонам и углу, заключенному между ними

Дано: a, b и C. Найти: c, A и B.

Первый способ (без помощи логарифмов).

По теореме косинусов, т. е. из равенства

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

находим сторону c.

Затем по теореме синусов находим меньший из углов A и B, т. е. угол, лежащий против меньшей из данных сторон a и b; пусть это будет, например A:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \quad \text{откуда } \sin A = \frac{a\sin C}{c} (A < 90°).$$

Наконец, из равенства $A + B + C = 180°$ находим еще один неизвестный угол.

Для контроля решения можно использовать равенство

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{или} \quad a\sin B = b\sin A.$$

Числовой пример: $a=130,0$; $b=140,0$; $C=67°23'$.

1) Вычисление c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 130^2 + 140^2 -$$

$$- 2\cdot 130\cdot 140\cos 67°23' \approx 16900 + 19600 - 36400\cdot 0,3846 \approx$$

$$\approx 22500$$

$$c \approx \sqrt{22500} \approx 150,0.$$

2) Вычисление угла A:

$$\sin A = \frac{a\cdot\sin C}{c} = \frac{130\cdot\sin 67°23'}{150} \approx \frac{13\cdot 0,9231}{15} \approx 0,8000.$$

Так как по условию $a < b$, то $A < 90°$, а именно: $A \approx 53°8'$.

3) Вычисление угла B:

$$B = 180° - (A + C) \approx 180° - 120°31' \approx 59°29'.$$

4) Контрольные вычисления по формуле:

$$a \sin B = b \sin A,$$

$$a \sin B \approx 130 \cdot \sin 59°29' \approx 130 \cdot 0{,}8615 \approx 112;$$

$$b \sin A = 140 \cdot \sin A \approx 140 \cdot 0{,}8000 \approx 112.$$

Второй способ (с помощью логарифмов).

Из уравнения (I а) находим сумму неизвестных углов:

$$A + B = 180° - C.$$

Из теоремы синусов имеем:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B};$$

откуда

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}},$$

или

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}. \qquad \text{(V)}$$

Это равенство, выведенное Томасом Финком (Копенгаген, 1561—1656), принято называть теоремой тангенсов.

Учитывая, что $\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$ и, следовательно, $\operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$, из формулы (V) находим

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2};$$

откуда с помощью таблицы получим разность углов $A - B$; зная же сумму и разность углов A и B, можно найти и самые углы A и B.

Для вычисления стороны c используем теорему синусов:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}, \text{ откуда } c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Для контроля решения можно вычислить сторону a по формуле Мольвейде:

$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{C-B}{2}}.$$

Пример с числовыми данными.

При проектировании строительства железной дороги на некотором участке между пунктами A и B возникла необходимость в сооружении тоннеля сквозь выступ горы (рис. 170). Для определения длины и направления тоннеля выбрали на местности некоторый пункт C, из которого видны и доступны пункты A и B, и измерением нашли $CB = a = 675{,}3$ *м*, $CA = b = 548{,}8$ *м* и $\sphericalangle ACB = C = 58°54'$. А затем вычислением определили длину проектируемого тоннеля $AB = c$ и углы $CAB = A$ и $CBA = B$, под которыми следует пробивать тоннель из пунктов A и B.

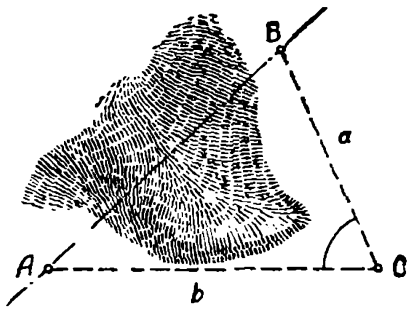


Рис. 170.

Приводим ниже вычисления.

1) $A + B = 180° - 58°54' = 121°6'$.

2) Вычисление $A - B$:

$$\lg \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \lg(a-b) + \lg \operatorname{ctg}\frac{C}{2} - \lg(a+b)$$

$a - b = 126{,}5$	$\lg(a-b) = \lg 126{,}5 = 2{,}1021$
$a + b = 1224{,}1$	$\lg \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \lg \operatorname{ctg} 29°27' = 0{,}2483$
$\frac{C}{2} = 29°27'$	$-\lg(a+b) = -\lg 1224 = \bar{4}{,}9122$
$\lg 1224 = 3{,}0878$	$\lg \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \bar{1}{,}2626$
$-\lg 1224 = \bar{4}{,}9122$	

3) Вычисление A и B:

$$\frac{A-B}{2}=10°22'$$

$$\frac{A+B}{2}=60°33'$$

$$A=70°55'$$

$$B=50°11'.$$

4) Вычисление стороны c:

$$\lg c=\lg a+\lg\sin C-\lg\sin A$$

$$\lg a=\lg 675{,}3=2{,}8295 \qquad \lg\sin 70°55'=\bar{1},9754$$

$$\lg\sin C=\lg\sin 58°54'=\bar{1},9326 \qquad -\lg\sin 70°55'=0{,}0246$$

$$-\lg\sin A=-\lg\sin 80°55'=0{,}0246$$

$$\lg c=2{,}7867$$

$$c=611{,}9$$

5) Контрольные вычисления a:

$$\lg a=\lg(b+c)+\lg\sin\frac{A}{2}-\lg\cos\frac{C-B}{2}$$

$$\lg(b+c)=\lg 1161=3{,}0649 \qquad b+c=1161$$

$$\lg\sin\frac{A}{2}=\lg\sin 35°28'=\bar{1},7633 \qquad \frac{A}{2}=35°27'$$

$$-\lg\cos\frac{B-C}{2}=-\lg\cos 4°21'=0{,}0013 \qquad C-B=8°43'$$

$$\frac{C-B}{2}=4°21'$$

$$\lg a=2{,}8295 \qquad \lg\cos 4°21'=\bar{1},9987$$

$$a=675{,}3 \qquad -\lg\cos 4°21'=0{,}0013$$

III тип. Решение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них

Дано a, b и A. Найти B, C и c.

Решение. Из первой системы основных уравнений (I а, в) имеем:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\quad A+B+C=180°,\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$$

Из этих уравнений последовательно определяем B, C и c, а именно:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},\ C = 180° - (A + B) \text{ и } c = \frac{a \sin C}{\sin A}. \quad (*)$$

Исследуем условия, при которых эти уравнения дадут значения B, C и c, удовлетворяющие геометрическому смыслу задачи.

Прежде всего отметим, что искомые величины должны (по смыслу задачи) удовлетворять неравенствам:

$$0 < B < 180°,\ 0 < C < 180° \text{ и } c > 0.$$

Рассмотрим, какие случаи могут представиться при различных соотношениях между данными a, b и A.

Случай 1: $a > b$. В этом случае $\frac{b}{a} < 1$ и, следовательно, $\frac{b}{a} \sin A < 1$ ($\sin A \leqslant 1$), а потому уравнение $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ имеет решения; в интервале от 0 до 180° его решения выразятся числами: $B_1 = \arcsin\left(\frac{b \sin A}{a}\right) < 90°$ и $B_2 = 180° - B_1 > 90°$.

Однако значение B_2, очевидно, не удовлетворяет условию задачи. Действительно, если его принять, то в искомом треугольнике окажется два тупых угла, чего не бывает.

Что касается B_1, то его можно принять, если выполнится для третьего угла C условие:

$$C_1 = 180° - (A + B_1) > 0, \text{ т. е. } 180° > A + B_1.$$

Убедимся, что это условие выполняется.

В самом деле, из неравенства $\frac{b}{a} < 1$ следует:

$$\sin B_1 = \frac{b}{a} \sin A < \sin A = \sin (180° - A),$$

т. е. $$\sin B_1 < \sin (180° - A).$$

А так как углы B_1 и $180° - A$ — острые, то по свойству синусов острых углов заключаем, что $B_1 < 180° - A$ и, следовательно, $B_1 + A < 180°$.

Итак, если $a > b$, то задача имеет единственное решение:

$$B = \arcsin\left(\frac{b}{a} \sin A\right),\ C = 180° - (A + B) \text{ и } c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Случай 2: $a = b$. В этом случае первое из уравнений (*) принимает вид:

$$\sin B = \sin A.$$

В интервале от 0 до 180° это уравнение имеет два решения: $B_1 = A$ и $B_2 = 180° - A$. Если $A \geqslant 90°$, то ни одно из этих решений не может быть принято, так как в противном случае мы получили бы треугольник с двумя тупыми или прямыми углами, чего не бывает.

Если же угол A острый, то корень B_1 удовлетворяет условию задачи, а корень B_2 опять не удовлетворяет.

Действительно, при $B_1 = A < 90°$ имеем:

$C_1 = 180° - (A + B_1) = 180° - 2A > 0$, что возможно,

$C_2 = 180° - (A + B_2) = 180° - (A + 180° - A) = 0$ — невозможно.

Итак, если $a = b$, то задача возможна только тогда, когда $A < 90°$ и имеет притом одно решение:

$$B = A,\ C = 180° - 2A,\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{a \sin 2A}{\sin A} = 2a \cos A$$

(треугольник равнобедренный).

Случай 3: $a < b$.

Очевидно, в этом случае данный угол A должен быть непременно острым. Действительно, если взять $A \geqslant 90°$, то угол B должен быть тупым, так как против большей из данных сторон лежит больший угол ($B > A$, так как $b > a$), и тогда $A + B > 180°$, чего в треугольнике быть не может.

Таким образом, остается исследовать случай, когда $a < b$ и $A < 90°$.

В этом случае может иметь место одно из следующих соотношений между данными:

$$a < b \sin A;\ a = b \sin A \text{ и } a > b \sin A.$$

Если $a < b \sin A$, то $\sin B = \frac{b \sin A}{a} > 1$ и, следовательно, уравнение $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$ не имеет решений. — задача невозможна.

Если $a = b \sin A$, то $\sin B = 1$ и $B = 90°$. Для угла C получим значение:

$$C = 180° - (A + B) = 180° - (A + 90°) = 90° - A > 0.$$

Итак, в данном случае задача имеет единственное решение:

$$B = 90°;\ C = 90° - A;\ c = \frac{a\sin C}{\sin A} = \frac{a\cos A}{\sin A} = a\operatorname{ctg} A$$

(или, принимая во внимание, что треугольник прямоугольный, $c = b\cos A$).

Наконец, если $a > b\sin A$, то $\frac{b\sin A}{a} < 1$ и уравнение $\sin B = \frac{b\sin A}{a}$ в промежутке от 0 до 180° будет иметь два корня: B_1 и B_2, причем $B_1 < 90°$, а $B_2 = 180° - B_1 > 90°$.

Для второго угла C получим соответственно значения:

$$C_1 = 180° - (A + B_1) \text{ и}$$

$$C_2 = 180° - (A + B_2) = 180° - (A + 180° - B_1) = B_1 - A.$$

Нетрудно видеть, что оба решения удовлетворяют условию задачи. Действительно, $A < 90°$ и $B_1 < 90°$, следовательно, $A + B_1 < 180°$, а потому $C_1 > 0$, что возможно.

Условие $b > a$ дает $\frac{b}{a} > 1$, следовательно,

$$\frac{b}{a}\sin A > \sin A,$$

т. е.
$$\sin B_1 > \sin A;$$

отсюда заключаем (принимая во внимание, что углы B_1 и A — острые), что $B_1 > A$ и, следовательно,

$$C_2 = B_1 - A > 0.$$

Итак, в данном случае задача имеет два решения:

1) $B_1 = \arcsin\left(\frac{b}{a}\sin A\right)$, $C_1 = 180° - (A + B_1)$, $c_1 = \frac{a\sin C_1}{\sin A}$;

2) $B_2 = 180° - B_1$, $C_2 = 180° - (A + B_2)$. $c_2 = \frac{a\sin C_2}{\sin A}$.

Все результаты исследования можно представить таблицей:

$a > b$			одно решение, $B < 90°$
$a = b$	$A \geqslant 90°$		нет решений
	$A < 90°$		одно решение, $B = A$
$a < b$	$A \geqslant 90°$		нет решений
	$A < 90°$	$a < b \sin A$	нет решений
		$a = b \sin A$	одно решение, $B = 90°$
		$a > b \sin A$	два решения, $B_1 < 90°$ и $B_2 > 90°$

Просматривая таблицу, замечаем, что два решения задача может иметь только в том случае, когда данный угол острый и лежит против меньшей из данных сторон.

Результаты этой таблицы можно получить, исследуя данную задачу геометрическим путем.

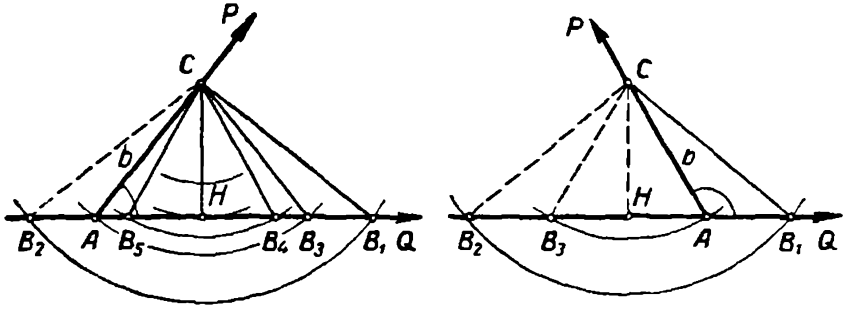


Рис. 171.

В самом деле, проследим известный нам процесс построения треугольника по двум сторонам a, b и углу A (будем полагать, что $A \neq 90°$; случай, когда A — прямой угол, не представляет затруднений). Отложим на одной из сторон данного угла PAQ, равного A, отрезок $AC = b$ (рис. 171).

Точки A и C будут двумя вершинами искомого треугольника. Третьей вершиной, очевидно, должна быть точка, в которой сторона AQ пересечется окружностью, проведенной из точки C, как из центра радиусом, равным a.

Однако возникает вопрос, пересечет ли такая окружность сторону AQ, а если пересечет, то в одной или в двух точках.

Для выяснения этого опустим перпендикуляр CH на прямую AQ и рассмотрим всевозможные случаи отношения a к b.

1) Если $a > b$, получаются две точки пересечения прямой с указанной окружностью, при этом одна точка B_1 лежит справа от вершины A, а вторая точка B_2 — слева от нее. В соответствии с этим образуются два треугольника ACB_1 и ACB_2, но удовлетворяет условию задачи только один из них, а именно треугольник ACB_1 с углом A против стороны a; в треугольнике ACB_2 против стороны a лежит угол $CAB_2 \neq A$.

2) Если $a = b$, прямая AQ также пересекается с указанной окружностью в двух точках; одна из этих точек обозначена на чертеже буквой B_3, а вторая совпадает с вершиной угла A. Образующийся при этом равнобедренный треугольник CAB_3 удовлетворяет условию задачи только при $A < 90°$; при $A > 90°$ (рис. справа) в треугольнике CAB_3 против стороны a лежит угол $CAB_3 \neq A$.

3) Если $a < b$, решение возможно только при остром угле A (рис. слева), при этом в свою очередь могут быть различные случаи.

При $a < CH$ окружность не пересекает прямой AQ,— решения не существует.

При $a = CH$ окружность касается прямой AQ в точке H и образуется прямоугольный треугольник CAH, удовлетворяющий условию задачи.

При $a > CH$ получаются две точки пересечения окружности с прямой AQ, обозначенные на рисунке буквами B_4 и B_5; образующиеся при этом два треугольника ACB_4 и ACB_5 оба удовлетворяют условию задачи, так как в каждом из них против стороны a лежит угол A ($CB_4 = CB_5 = a$).

Заметив, что $CH = CA \cdot \sin CAH = b \sin A$, убеждаемся в совпадении полученных выводов с результатами таблицы (стр. 432).

Примеры с числовыми данными.

Между пунктами A и B расположен пруд (рис. 172). Для определения расстояния AB учащиеся выбрали на местности

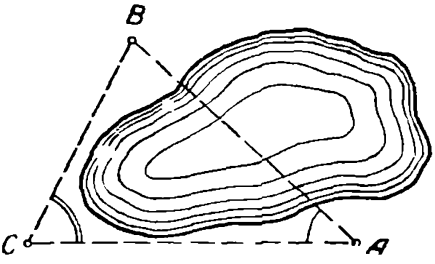


Рис. 172.

пункт C так, чтобы угол BAC был равен 30°, и нашли измерением $CA = b = 36$ *м* и $CB = a = 45$ *м*. А затем вычислением определили искомое расстояние $AB = c$.

Приводим их вычисления:

Пример 1. Дано: $a = 45$, $b = 36$, $A = 30°$. Найти B, C и c.

1) Вычисление B:

$$\sin B = \frac{36}{45} \sin 30° = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5} = 0{,}40; \quad B \approx 23°.$$

2) Вычисление C:

$$C = 180° - (30° + 23°) \approx 180° - 53° \approx 127°.$$

3) Вычисление c:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx \frac{45 \cdot \sin 127°}{\sin 30°} \approx \frac{45 \cdot \sin 53°}{0{,}5} \approx 90 \cdot 0{,}799 \approx 72.$$

Пример 2. Дано: $a = b = 140$, $A = 52°30'$. Найти B, C и c.

1) Вычисление B и C:

$$B = A = 52°30'; \quad C = 180° - 2A = 180° - 105° = 75°.$$

2) Вычисление c:

$$c = 2a \cdot \cos A = 2 \cdot 140 \cos 52°30' \approx 280 \cdot 0{,}609 \approx 170.$$

Пример 3. Дано: $a = 18$, $b = 47$, $A = 32°$. Найти B, C и c.

1) Вычисление B:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{47 \cdot \sin 32°}{18} \approx \frac{47 \cdot 0{,}530}{18} \approx \frac{24{,}9}{18} > 1.$$

Следовательно, задача не имеет решений.

Пример 4. Дано: $a = 19$, $b = 38$, $A = 30°$. Найти B, C и c.

1) Вычисление B и C:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{38 \cdot \sin 30°}{19} = 1,$$ следовательно, $B = 90°$, $C = 60°$.

2) Вычисление c: $c = b \cos A = 38 \cdot \cos 30° \approx 38 \cdot 0{,}866 \approx 33$.

Пример 5. Дано: $a=24$, $b=42$, $A=18°$. Найти B, C и c.

1) Вычисление B и C.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{42 \cdot \sin 18°}{24} \approx 1{,}75 \cdot 0{,}309 \approx 0{,}541.$$

$$B_1 \approx 33°,\ B_2 \approx 180° - 33° \approx 147°;$$
$$C_1 \approx 180° - (A + B_1) \approx 180° - 51° \approx 129°;$$
$$C_2 \approx 180° - (A + B_2) \approx 180° - 165° \approx 15°.$$

2) Вычисление c:

$$c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A} \approx \frac{24 \cdot \sin 129°}{\sin 18°} = \frac{24 \sin 51°}{\sin 18°} \approx \frac{24 \cdot 0{,}777}{0{,}309} \approx 60,$$

$$c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A} = \frac{24 \cdot \sin 15°}{\sin 18°} = \frac{24 \cdot 0{,}259}{0{,}309} \approx 62.$$

Итак, задача имеет два решения:
первое решение: $B_1 \approx 33°$, $C_1 \approx 129°$, $c_1 \approx 60$;
второе решение: $B_2 \approx 147°$, $C_2 \approx 15°$, $c_2 \approx 62$.

Пример 6. Дано: $a = 492{,}0$; $b = 354{,}9$; $A = 50°12'$. Найти B, C и c.

Решение с помощью четырехзначных таблиц логарифмов

1) Вычисление B:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},\ \operatorname{lgsin} B = \lg b + \operatorname{lgsin} A - \lg a.$$

$\lg b = \lg 354{,}9 = 2{,}5501$	$\lg 492{,}0 = 2{,}6920$
$\operatorname{lgsin} A = \operatorname{lgsin} 50°12' = \bar{1}{,}8855$	$-\lg 492{,}0 = \bar{3}{,}3080$
$-\lg a = -\lg 492{,}0 = \bar{3}{,}3080$	
$\operatorname{lgsin} B = \bar{1}{,}7436$	
$B_1 = 33°39'.$	

2) Вычисление C:

$$C = 180° - (A + B) \approx 180° - 83°51' \approx 96°9'.$$

3) Вычнсление c:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},\ \lg c = \lg a + \operatorname{lgsin} C - \operatorname{lgsin} A;$$

$\lg a = \lg 492{,}0 = 2{,}6920$	$\lg\sin 96°9' = \lg\sin 83°51' =$
$\lg\sin C = \lg\sin 96°9' = \bar{1},9975$	$= \bar{1},9975$
$-\lg\sin A = -\lg\sin 50°12' = 0{,}1145$	$\lg\sin 50°12' = \bar{1},8855$
$\lg c = 2{,}8040$	$-\lg\sin 50°12' = 0{,}1145$
$c = 636{,}8$	

4) Контрольное вычисление a:

$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}, \quad \lg a = \lg(b+c) + \lg\sin\frac{A}{2} - \lg\cos\frac{B-C}{2};$$

$\lg(b+c) = \lg 991{,}7 = 2{,}9964$	$b + c = 991{,}7;$
$\lg\sin\frac{A}{2} = \lg\sin 25°6' = \bar{1},6276$	$\frac{A}{2} = 25°6';$
$-\lg\cos\frac{B-C}{2} = -\lg\cos 31°15' = 0{,}0681$	$\frac{B-C}{2} = -31°15'$
$\lg a = 2{,}6921$	$\lg\cos 31°15' = \bar{1},9319;$
$a = 492{,}1$	$-\lg\cos 31°15' = 0{,}0681.$

Расхождение на одну единицу четвертого знака.

IV тип. Решение треугольника по трем сторонам

Дано: a, b и c. Найти A, B, C.

Чтобы по данным сторонам треугольника найти его углы, воспользуемся второй основной системой уравнений (II а, б, в). Из первого уравнения этой системы имеем:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad (*)$$

Вычислив значение $\cos A$, находят по нему величину угла A. Затем таким же путем определяют углы B и C.

Однако определение углов по этим формулам требует весьма громоздких вычислений, поэтому в тех случаях, когда стороны треугольника выражены многозначными числами, прибегают к другим формулам, удобным для логарифмирования.

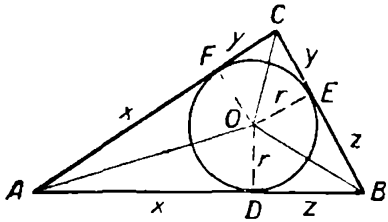


Рис. 173.

Для получения таких формул впишем в треугольник ABC (рис. 173) окружность. Пусть r — радиус ок-

ружности, O — центр окружности, D, E и F — точки касания.

Внесем обозначения:

$AD = AF = x$, $CF = CE = y$ и $BD = BE = z$, тогда

$$2x + 2y + 2z = 2p \text{ (периметр треугольника)},$$

$$x + y + z = p,$$

$$x = p - (y + z) = p - a.$$

Из прямоугольного треугольника AOD имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{OD}{AD} = \frac{r}{x} = \frac{r}{p-a},$$

короче:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}. \qquad \text{(VIa)}$$

Аналогично получаются формулы:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \qquad \text{(VIб)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}. \qquad \text{(VIв)}$$

Остается найти радиус окружности r. Для этого отметим, что пл. $\triangle ABC$ = пл. $\triangle AOB$ + пл. $\triangle BOC$ + + пл. $\triangle COA$, или

$$S = \frac{1}{2}c \cdot r = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r,$$

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r = p \cdot r,$$

т. е.

$$S = p \cdot r. \qquad \text{(VII)}$$

откуда

$$r = \frac{S}{p}.$$

Но по формуле Герона, известной из геометрии,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

короче:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \qquad \text{(VIII)}$$

Итак, если длины сторон треугольника выражены многозначными числами, то его углы удобнее находить с помощью логарифмических таблиц по формулам VIa, VIб и VIв, причем для сокращения выкладок при вычислениях следует предварительно найти $\lg r$ по формуле VIII.

Для проверки решения задач данного типа используют равенство:

$$A + B + C = 180°.$$

Примеры с числовыми данными.

Пример 1. Производится кирпичная кладка стен (рис. 174) так, чтобы угол между стенами был равен 90°. Решено было проверить правильность кладки, для этого на швах в одной горизонтали взяли две точки A и B и измерением нашли $CB = a = 12$ *дм*, $CA = b = 10$ *дм* и $AB = c = 15$ *дм*. Затем вычислением нашли искомый угол $ABC = C$.

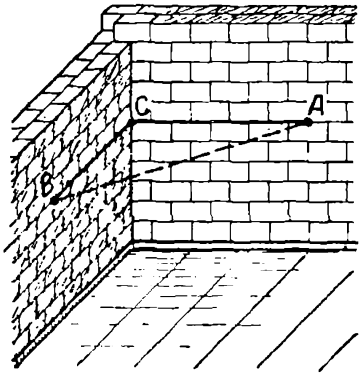


Рис. 174

Приводим вычисление угла C. Другие углы треугольника ABC найдены для контроля правильности решения.

Решение существует, так как бóльшая сторона треугольника меньше суммы двух других.

1) Вычисление A:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{100+225-144}{2 \cdot 10 \cdot 15} = \frac{181}{300} \approx 0{,}603;$$

$$A \approx 53°.$$

2) Вычисление B:

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{225+144-100}{2 \cdot 15 \cdot 12} = \frac{269}{360} \approx 0{,}747;$$

$$B \approx 42°.$$

3) Вычисление C:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{144+100-225}{2 \cdot 12 \cdot 10} = \frac{19}{240} \approx 0{,}0792;$$

$$C \approx 85°,$$

4) Проверка: $A+B+C \approx 53^\circ + 42^\circ + 85^\circ = 180^\circ$.

Пример 2. Дано: $a = 5902$, $b = 3295$, $c = 4027$. Найти A, B, C.

Решение проведем с помощью четырехзначных таблиц логарифмов.

1) Вычисление $\lg r = \frac{1}{2}\left[\lg(p-a) + \lg(p-b) + \lg(p-c) - \lg p\right]$

$\lg(p-a)=\lg 710=2{,}8513$	$a=5902$
$\lg(p-b)=\lg 3317=3{,}5207$	$b=3295$
$\lg(p-c)=\lg 2585=3{,}4125$	$c=4027$
$-\lg p=-\lg 6612=\bar{4}{,}1797$	$2p=13224$
$5{,}9642$	$p=6612$; $\lg 6612=3{,}8203$
$\lg r = 2{,}9821$	$p-a=710$; $-\lg 6612=\bar{4}{,}1797$;
	$p-b=3317$;
	$p-c=2585$.

2) Вычисление A:

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \lg r - \lg(p-a).$$

$$\lg r = 2{,}9821$$
$$\lg(p-a) = 2{,}8513$$
$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 0{,}1308$$
$$\frac{A}{2} = 53^\circ 30'$$
$$A = 107^\circ 0'.$$

3) Вычисление B: $\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \lg r - \lg(p-b)$

$$\lg r = 2{,}9821$$
$$-\lg(p-b) = 3{,}5207$$
$$\lg\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \bar{1}{,}4614$$
$$\frac{B}{2} = 16^\circ 8'$$
$$B = 32^\circ 16'.$$

4) Вычисление C: $\lg\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \lg r - \lg(p-c)$.

$$\lg r = 2{,}9821$$

$$\lg (p-c) = \bar{3},4125$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \bar{1},5696$$

$$\frac{C}{2} = 20°22'$$

$$C = 40°44'$$

5) Проверка: $A = 107°0'$

$B = 32°16'$

$C = 40°44'$

$$A + B + C = 180°$$

Упражнения.

Из всех углов, вписанных в данную окружность и опирающихся на данную дугу BC, равную 2α (рис. 175), выбрать такой, чтобы:

а) сумма образующих его хорд была наибольшей;

б) чтобы произведение образующих его хорд было наибольшим.

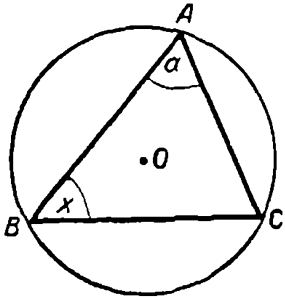


Рис. 175.

Указание. Пусть BAC — искомый угол; очевидно, для его построения достаточно найти угол ABC, который мы обозначили через x. Применяя в треугольнике ABC теорему синусов, находим:

а) $AB + AC = 2R[\sin(x+\alpha) + \sin\alpha]$;

б) $AB \cdot AC = 4R^2 \sin(x+\alpha)\sin x$.

Остается исследовать полученные функции на максимум и найти соответствующие значения x.

§ 62. Нахождение неосновных элементов треугольника

1) Высоты треугольника

Пусть $AH = h_a$ — высота треугольника ABC, опущенная из вершины A на сторону a (рис. 176).

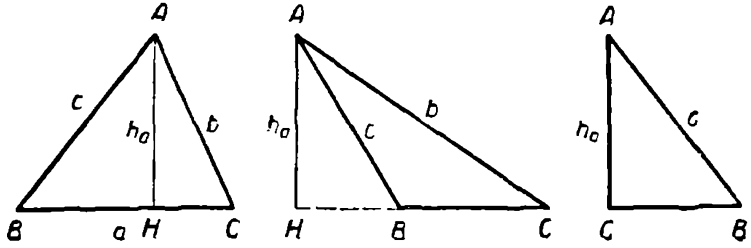


Рис. 176.

Из треугольника ABH имеем:

$$h_a = c \cdot \sin B.$$

Из треугольника ACH имеем:

$$h_a = b \cdot \sin C.$$

Таким образом,

$$h_a = b \sin C = c \sin B. \qquad \text{(IX)}$$

Нетрудно видеть, что полученная формула справедлива для треугольника любого вида (остроугольного, тупоугольного и прямоугольного).

Формулы для других высот получаются круговой перестановкой букв.

Если в треугольнике известны стороны a, b, c, то при вычислении высот h_a, h_b и h_c можно использовать известную из геометрии формулу Герона (Александрия, I в. до н. э.)[1]

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad \text{(X)}$$

А именно, из соотношений

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c,$$

находим:

$$h_a = \frac{2S}{a}, \quad h_b = \frac{2S}{b}, \quad h_c = \frac{2S}{c}. \qquad \text{(XI)}$$

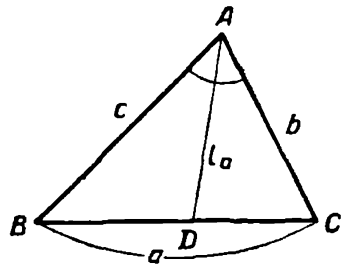


Рис. 177.

2) Биссектрисы треугольника

Пусть $AD = l_a$ — биссектриса угла A в треугольнике ABC (рис. 177).

По теореме синусов из треугольника BAD имеем:

$$\frac{l_a}{\sin B} = \frac{c}{\sin ADB}.$$

Но

$$\sphericalangle ADB = 180° - B - \frac{A}{2} = 180° - B - \frac{180° - (B+C)}{2} =$$

$$= 90° - \frac{B-C}{2}.$$

следовательно, предыдущее равенство перепишется так:

$$\frac{l_a}{\sin B} = \frac{c}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

[1] Есть основания предполагать, что эту формулу вывел еще ранее великий греческий математик Архимед (287—212 гг. до н. э.).

откуда $$l_a = \frac{c \sin B}{\cos \frac{B-C}{2}}. \qquad \text{(XII)}$$

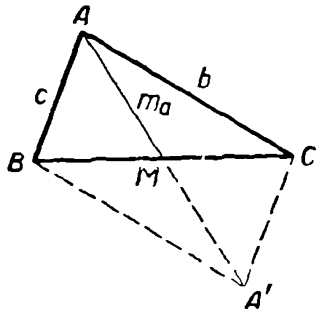


Рис. 178.

Формулы для биссектрис других углов получаются круговой перестановкой букв.

3) Медианы треугольника

Пусть $AM = m_a$ — медиана треугольника ABC, проведенная из вершины A (рис. 178).

Продолжим медиану AM на расстояние $MA' = AM$ и точку A' соединим с вершинами треугольника.

Применив к получившемуся параллелограмму $ABA'C$ известную теорему геометрии о сумме квадратов диагоналей, будем иметь:

$$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2,$$

откуда $$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \qquad \text{(XIII)}$$

Приняв во внимание, что по теореме косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

можно данную формулу записать в следующем виде:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}. \qquad \text{(XIIIa)}$$

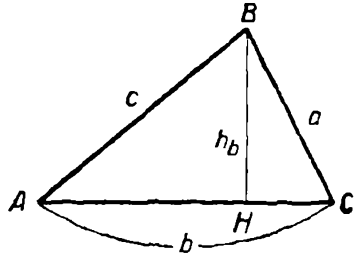


Рис. 179.

4) Площадь треугольника

а) Пусть $BH = h_b$ — высота треугольника ABC (рис. 179). Из треугольника ABH находим:

$$h_b = c \cdot \sin A.$$

Следовательно, площадь S треугольника ABC выразится формулой

$$S = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} bc \sin A. \qquad \text{(XIVa)}$$

Эта формула выведена известным голландским астрономом-математиком Снеллиусом (1580—1626); читается она так:

Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон треугольника на синус угла между ними.

Легко проверить справедливость формулы для треугольника любого вида (остроугольного, тупоугольного и прямоугольного). Рекомендуем сделать это читателю.

б) Существуют и другие формулы для определения площади треугольника. Так, например, из теоремы синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

найдем b и c:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

и подставим в формулу (XIVa), получим:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Такое выражение площади было дано немецким математиком Фридрихом Оппелем (1720—1769).

Заметив, что $A = 180° - (B + C)$ и, следовательно, $\sin A = \sin (B + C)$, можно получить еще одну формулу для площади треугольника:

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin B \sin C}{2 \cdot \sin (B + C)}. \qquad \text{(XVa)}$$

которой удобно пользоваться, если в треугольнике известна одна сторона и прилежащие к ней углы.

в) Если в треугольнике известны только стороны, то, разумеется, целесообразно находить его площадь по формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

г) Если в треугольнике известен периметр и углы, то выгодно определять площадь по формуле:

$$S = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}. \qquad \text{(XVI)}$$

Эта формула выведена немецким математиком и инженером Августом Крелль (1780—1855)

В справедливости этой формулы легко убедиться, подставив в ее правую часть значения тангенсов половинных углов из равенств (VI а, б, в), используя при этом и формулу (VIII).

Действительно,

$$p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = p^2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)(p-c)(p-a)(p-a)(p-b)}{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S.$$

д) Если в треугольнике известен периметр и радиус вписанного круга, то его площадь проще всего найти по формуле Герона Александрийского (I в. до н. э.):

$$S = pr, \qquad \text{(VII)}$$

выведенной нами в предыдущем параграфе (см. стр. 437).

5) Радиусы вписанной и описанной окружности

а) В предыдущем параграфе (стр. 437) мы уже вывели формулу для вычисления радиуса вписанной окружности:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}. \qquad \text{(VIII)}$$

б) Из формулы (VIa) можно выразить радиус вписанной окружности так:

$$r = (p-a)\cdot \operatorname{tg}\frac{A}{2}. \qquad \text{(XVII)}$$

в) Для определения радиуса описанного круга можно использовать теорему синусов (Iб), из которой находим:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}. \qquad \text{(XVIII)}$$

Если в первое из этих равенств подставить значение $\sin A$ из равенства $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, т. е. $\sin A = \frac{2S}{bc}$, то получим новую формулу:

$$R = \frac{abc}{4S}, \qquad \text{(XIX)}$$

которой иногда пользуются в геометрии. Доказательство этого соотношения в треугольнике принадлежит французскому математику Р. Декарту (1596—1650).

Числовые примеры.

Пример 1. Дано: $a = 14$, $B = 68°$, $C = 30°$; найти: l_a, m_a, S, R и r.

Вычисления проведем в следующем порядке.

1) $R = \frac{a}{2\sin A}$, $A = 180° - (B+C) = 180° - 98° = 82°$,

$$R = \frac{14}{2 \cdot \sin 82°} \approx \frac{7}{0{,}990} \approx 7{,}07 \approx 7{,}1.$$

2) $l_a = \frac{c \sin B}{\cos \frac{B-C}{2}} = \frac{2R \cdot \sin C \cdot \sin B}{\cos \frac{B-C}{2}}$, так как $c = 2R \sin C$,

$$l_a \approx \frac{2 \cdot 7{,}07 \cdot \sin 30° \cdot \sin 68°}{\cos 19°} \approx \frac{7{,}07 \cdot 0{,}927}{0{,}946} \approx 6{,}9.$$

3) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8R^2(\sin^2 B + \sin^2 C) - a^2}$, так как $b = 2R \sin B$ и $C = 2R \sin C$.

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{8 \cdot 7{,}07^2 (\sin^2 68° + \sin^2 30°) - 14^2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\sqrt{8 \cdot 50{,}0 \cdot 1{,}11 - 196} \approx 7{,}9.$$

4) $S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin (B+C)} \approx \frac{14^2}{2} \cdot \frac{\sin 68° \sin 30°}{0{,}990} \approx$

$$\approx \frac{98 \cdot 0{,}927 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}990} \approx 45{,}4 \approx 45.$$

5) $r = \frac{S}{p}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(a + 2R \sin B + 2R \sin C) = \frac{1}{2}[a + 2R(\sin B + \sin C)] = 7 + 7{,}07(0{,}927 + 0{,}5) \approx 10{,}1$;

$$r \approx \frac{45{,}4}{10{,}1} \approx 4{,}5.$$

Пример 2. Дано: $a = 675{,}3$; $b = 548{,}8$; $C = 58°54'$; найти: h_c, l_c, m_c, S, R, r.

Решение проведем с помощью таблиц логарифмов.

1) Вычисление S:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad \lg S = \lg 0{,}5 + \lg a + \lg b + \lg \sin C.$$

$$\begin{aligned} \lg 0{,}5 &= \lg 0{,}5 && = \bar{1}{,}6990 \\ \lg a &= \lg 675{,}3 && = 2{,}8295 \\ \lg b &= \lg 548{,}8 && = 2{,}7394 \\ \lg \sin C &= \lg \sin 58°54' && = \bar{1}{,}9326 \\ \hline \lg S &= 5{,}2005 \\ S &= 158700. \end{aligned}$$

Для вычисления других величин потребуются углы треугольника A и B. Выше (стр. 428) уже произведено вычисление этих углов и получено:

$$A = 70°55' \text{ и } B = 50°11'.$$

2) Вычисление h_c:

$$h_c = a \sin B, \quad \lg h_c = \lg a + \lg \sin B;$$

$$\begin{aligned} + \quad \lg a &= 2{,}8295 \\ \lg \sin B &= \bar{1}{,}8854 \\ \hline \lg h_c &= 2{,}7149 \\ h_c &= 524{,}1 \end{aligned}$$

3) Вычисление l_c:

$$l_c = \frac{b \sin A}{\cos \frac{A-B}{2}}, \quad \lg l_c = \lg b + \lg \sin A - \lg \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\frac{A-B}{2} = 10°22';$$

$$\lg \cos \frac{A-B}{2} = \bar{1}{,}9928;$$

$$- \lg \cos \frac{A-B}{2} = 0{,}0072.$$

$$\begin{aligned} \lg b &= 2{,}7394 \\ \lg \sin A &= \bar{1}{,}9754 \\ - \lg \cos \frac{A-B}{2} &= 0{,}0072 \\ \hline \lg l_c &= 2{,}7220 \\ l_c &= 527{,}2 \end{aligned}$$

4) Вычисление m_c:

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{a^2 + b^2 + 2ab\cos C}_{Q}} = \frac{1}{2}\sqrt{Q}.$$

Сначала вычислим с помощью логарифмических таблиц $2ab\cos C = t$, а затем используем таблицу квадратов.

$\lg 2 = 0{,}3010$	$a^2 = 456000$
$\lg a = 2{,}8295$	$b^2 = 301200$
$\lg b = 2{,}7394$	$t = 382800$
$\lg\cos C = \bar{1}{,}7131$	$Q = 1140000$
$\lg t = 5{,}5830$	$\sqrt{Q} = 1068$
$t = 382800.$	$m_c = 534{,}0$

5) Вычисление R:

$$R = \frac{a}{2\sin A},\quad \lg R = \lg a - (\lg 2 + \lg\sin A);$$

$$\begin{array}{r} + \quad \lg 2 = 0{,}3010 \\ \lg\sin A = \bar{1}{,}9754 \\ \hline \lg 2 + \lg\sin A = 0{,}2764 \\ -(\lg 2 + \lg\sin A) = \bar{1}{,}7236 \\ \lg a = 2{,}8295 \\ \hline \lg R = 2{,}5531 \\ R = 357{,}4. \end{array}$$

6) Вычисление r:

По чертежу (173) на странице 436 имеем $a = z + y$.

Но $z = r\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$ и $y = r\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$, следовательно,

$$a = r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right);$$

откуда $r = \dfrac{a}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}} = \dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)} = \dfrac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$;

$$\lg r = \lg a + \lg\sin\frac{B}{2} + \lg\sin\frac{C}{2} - \lg\cos\frac{A}{2};$$

$$\left.\begin{array}{l}\lg a = 2{,}8295 \\ \lg\sin\frac{B}{2} = \bar{1}{,}6276\end{array}\right| \frac{B}{2} = 25°6',\ \frac{C}{2} = 29°27',\ \frac{A}{2} = 35°27';$$

$$\lg \sin \frac{C}{2} = \bar{1},6917 \qquad \lg \cos \frac{A}{2} = \bar{1},9110;$$
$$-\lg \cos \frac{A}{2} = 0,0890 \qquad -\lg \cos \frac{A}{2} = 0,0890.$$
$$\lg r = 2,2378$$
$$r = 172,9$$

В заключение приведем примеры обратных задач, где среди данных имеются неосновные элементы треугольника, а требуется найти его основные элементы.

Задача 1. Известны высоты треугольника h_a, h_b и h_c; требуется найти его углы A, B, C и стороны a, b и c.

Решение Заметив, что каждое из произведений $\frac{1}{2}ah_a$, $\frac{1}{2}bh_b$ и $\frac{1}{2}ch_c$ есть площадь искомого треугольника, получаем равенство:

$$ah_a = bh_b = ch_c,$$

откуда

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}. \qquad (*)$$

Это равенство показывает, что искомый треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$ со сторонами $a' = \frac{1}{h_a}$, $b' = \frac{1}{h_b}$ и $c' = \frac{1}{h_c}$. А это означает, что углы A, B и C искомого треугольника равны соответственно углам треугольника $A'B'C'$, а потому для их нахождения достаточно решить треугольник по данным его сторонам a', b' и c'.

Припоминая такой случай решения треугольника (см. стр. 437), находим:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r'}{p'-a'}, \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r'}{p'-b'} \text{ и } \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r'}{p'-c'}, \qquad (**)$$

где

$$p' = \frac{1}{2}(a' + b' + c') = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \text{ и}$$

$$r' = \sqrt{\frac{(p'-a')(p'-b')(p'-c')}{p'}}.$$

Определив из равенств (**) углы A, B и C, воспользуемся формулами:

$$h_a = b\sin C,\ h_b = c\sin A \text{ и } h_c = a\sin B,$$

из которых получаем

$$b = \frac{h_a}{\sin C},\ c = \frac{h_b}{\sin A} \text{ и } a = \frac{h_c}{\sin B}.$$

Искомый треугольник ABC существует, очевидно, если существует подобный ему треугольник $A'B'C'$, а для существования последнего необходимо и достаточно выполнение неравенства:

$$|b' - c'| < a' < b' + c',$$

т. е.

$$\left|\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right| < \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Задача 2. Известны периметр треугольника $2p$ и углы A, B; найти его стороны a, b, c и угол C.

Решение. Для определения четырех неизвестных надо составить систему четырех независимых уравнений. В данном случае удобно использовать первую основную систему уравнений

$$A + B + C = 180°, \tag{Iа}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{Iб}$$

и соотношение: $a + b + c = 2p$, выражающее одно из условий задачи.

Из уравнения (Iа) определяем искомый угол C:

$$C = 180° - (A + B).$$

Из уравнения (Iб) имеем:

$$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C. \tag{*}$$

Подставляем эти значения a, b и c в равенство $2p = a + b + c$, получим:

$$p = R(\sin A + \sin B + \sin C). \tag{**}$$

Из равенств (*) и (**) находим отношение:

$$\frac{a}{p} = \frac{2R\sin A}{R(\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}},$$

откуда

$$a = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

Аналогично находим

$$b = \frac{p \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} \quad \text{и} \quad c = \frac{p \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}.$$

Упражнения.

1) Дано: $b=12$, $A=43°$, $C=51°$;
найти h_a, l_a, m_a, S, R и r.
2) Дано: $b=15$, $c=20$, $A=64°$;
найти h_b, l_b, m_b, S, R и r.
3) Дано: $a=453{,}6$, $b=358{,}1$, $c=543{,}0$;
найти: h_a, h_b, h_c, S, R и r.
4) Дано: $R=7{,}924$, $A=113°17'$, $B=48°17'$;
найти: a, b, c, C.
5) Дано: $S=502{,}0$, $A=15°29'$, $B=45°0'$;
найти: a, b, c и C.
6) Дано: $a+b=488{,}8$, $A=70°24'$, $B=40°16'$;
найти: a, b, c и C.
7) Дано: $a-b=6{,}6$, $c=18$, $C=54°$;
найти: a, b, A и S.
8) Дано: $a=6$, $b=8$, $S=12$;
найти: A, B и C.
9) Дано: $b=98$, $c=76$, $m_c=68$;
найти: a, A, B и C.
10) Построить треугольник с наибольшей площадью (с наименьшим периметром), если заданы основание треугольника a и противолежащий ему угол α.

Указание. Пусть ABC — искомый треугольник, причем $BC=a$ и угол $BAC=\alpha$ (см. рис. 175). Вершины B и C треугольника можно считать известными; вершина A принадлежит дуге, построенной на отрезке BC и вмещающей угол α. Обозначив через x угол CBA, определяющий положение вершины A, будем иметь:

1) $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = 2R^2 \sin(\alpha + x) \sin x$;

2) $2p = AB + BC + AC = 2R[\sin(x+\alpha) + \sin x + \sin \alpha]$.

где $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$.

Остается исследовать полученные функции на максимум и минимум, найти соответствующие значения x и построить искомые треугольники.

§ 63. Понятие об общем методе решения треугольников

Известно, что треугольник определяется заданием трех независимых элементов; вычисление других элементов треугольника по трем данным называют коротко решением треугольника.

В процессе решения треугольника можно выделить два этапа:

1) составление системы уравнений, выражающих зависимость между данными и искомыми элементами треугольника, и

2) решение полученной системы уравнений относительно искомых элементов.

В тех случаях, когда данные и искомые являются основными элементами треугольника (сторонами и углами), можно использовать уже составленные ранее системы уравнений, выражающие зависимость между сторонами и углами треугольника (см. стр. 417 системы I, II, III), например:

$$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B, \\ b = c\cos A + a\cos C, \\ c = a\cos B + b\cos A, \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

выше дано также и решение этих систем уравнений, поэтому остается лишь выполнение соответствующих вычислений, если данные числовые.

Если же среди данных и искомых имеются неосновные элементы треугольника, то в каждой задаче приходится заново составлять и решать соответствующую систему уравнений, что связано обычно с большими трудностями. Русскому математику-педагогу К. А. Торопову (1860—1932) удалось найти общий прием составления системы уравнений для решения треугольника по любым данным элементам. Позднее этот метод был подробно изложен профессором Одесского университета С. О. Шатуновским в брошюре «Методы решения задач прямолинейной тригонометрии» (Госиздат, М., 1929). Перейдем к краткому изложению сущности этого метода и иллюстрации его на примерах.

а) Обобщение понятия элемента треугольника

1. Если какую-нибудь величину можно выразить через основные элементы треугольника (a, b, c, A, B, C), то

будем говорить, что она является функцией от этих основных элементов треугольника, и обозначать (в общем виде) через $f(a, b, c, A, B, C)$.

Приведем примеры таких функций:

1) $2m_a = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}$ — удвоенная медиана треугольника,

2) $l_a = \dfrac{b\sin C}{\cos\dfrac{B-C}{2}}$ — биссектриса треугольника,

3) $2R = \dfrac{a}{\sin A}$ — диаметр описанного круга,

4) $2p = a + b + c$ — периметр треугольника,

5) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ — площадь треугольника,

6) $q = \dfrac{a+b}{a-b}$, 7) $\dfrac{2p}{h_a} = \dfrac{a+b+c}{b\sin C}$, 8) $\alpha = A - B + 2C$.

Как видим, такие функции могут содержать и не все основные элементы треугольника. Например, функция $l = 2a$ содержит только одну сторону треугольника. Каждый из основных элементов треугольника можно рассматривать как частный (наипростейший) случай такой функции.

2. Функцию от основных элементов треугольника $f(a, b, c, A, B, C)$ называют однородной n-го измерения, если при замене ее аргументов a, b и c на ka, kb и kc сама функция умножается на k^n, т. е.

$$f(ka, kb, kc, A, B, C) = k^n f(a, b, c, A, B, C),$$

где k — положительное число.

Легко убедиться, что все заданные выше функции (1—8) однородные, причем 1), 2), 3) и 4) — первого измерения, 5) — второго измерения, 6), 7) и 8) — нулевого измерения. Так, например, умножив на k аргументы a, b и c в функциях 1), 5) и 7), получаем:

1) $\sqrt{(kb)^2 + (kc)^2 + 2(kb)(kc)\cos A} = k^1 \cdot \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}$.

5) $\dfrac{1}{2}(ka\ (kb)\sin C = k^2 \cdot \dfrac{1}{2}ab\sin C$;

7) $\dfrac{ka + kb + kc}{kb\cdot\sin C} = k^0 \cdot \dfrac{a+b+c}{b\sin C}$.

3. Элементом треугольника будем теперь называть всякую величину, выражающуюся через стороны и углы треугольника однородной функцией $f(a, b, c, A, B, C)$. Элемент треугольника называют линейным, если он представляется в виде однородной функции $f(a, b, c, A, B, C)$ 1-го измерения.

Элемент треугольника называют угловым, если он представляется в виде однородной функции $f(a, b, c, A, B, C)$ 0-го измерения.

В соответствии с данными определениями можно сказать, что выше (в п. 1) дано 8 элементов треугольника, среди которых линейными являются первые четыре, угловыми — последние три, а пятый элемент не линейный и не угловой, так как он представлен функцией 2-го измерения.

Линейные элементы будем обозначать далее буквами $l_1, l_2, l_3, \ldots$, а угловые — $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

Замечание. Если треугольник подвергнуть подобному преобразованию с коэффициентом $k \neq 1$, то его стороны a, b, c умножатся на число k и станут равными соответственно ka, kb, kc, а углы A, B и C не изменят своей величины. Отсюда следует, что всякий элемент треугольника $f(a, b, c, A, B, C)$ n-го измерения при подобном преобразовании изменится в k^n раз (см. п. 2). В частности, каждый линейный элемент треугольника изменится в k раз, а угловой останется без изменения.

4. ***Теорема 1.*** *Элемент треугольника является угловым в том и только в том случае, если он может быть выражен функцией только от углов треугольника.*

Доказательство. 1) Если данный элемент треугольника выражается функцией $f(A, B, C)$, не содержащей сторон треугольника, то при замене сторон a, b, c величинами ka, kb, kc он не изменится и, следовательно, является угловым.

2) Обратно, если u — угловой элемент треугольника, то по определению он выражается однородной функцией $f(a, b, c, A, B, C)$ нулевого измерения, и, следовательно,

$$f(ka, kb, kc, A, B, C) = k^0 \cdot f(a, b, c, A, B, C),$$

где k — любое положительное число.

Положив $k = \frac{1}{2R}$ и заметив, что $\frac{a}{2R} = \sin A$, $\frac{b}{2R} = \sin B$ и $\frac{c}{2R} = \sin C$, получим:

$$f(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C) = f(a, b, c, A, B, C),$$

т. е. $u = f(a, b, c, A, B, C) = F(A, B, C)$.

Теорема 2. *Во всяком треугольнике отношение двух элементов одинакового измерения является угловым элементом.*

Действительно, по определению такие элементы треугольника выражаются однородными функциями $f_1(a, b, c, A, B, C)$ и $f_2(a, b, c, A, B, C)$ одного и того же, например n-го, измерения, поэтому

$$f_1(ka, kb, kc, A, B, C) = k^n \cdot f_1(a, b, c, A, B, C),$$

$$f_2(ka, kb, kc, A, B, C) = k^n \cdot f_2(a, b, c, A, B, C),$$

где k — любое положительное число.

Положив $k = \frac{1}{2R}$ и разделив первое равенство на второе, получим:

$$\frac{f_1(a, b, c, A, B, C)}{f_2(a, b, c, A, B, C)} = \frac{f_1\left(\frac{a}{2R}, \frac{b}{2R}, \frac{c}{2R}, A, B, C\right)}{f_2\left(\frac{a}{2R}, \frac{b}{2R}, \frac{c}{2R}, A, B, C\right)} =$$

$$= \frac{f_1(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C)}{f_2(\sin A, \sin B, \sin C, A, B, C)} = F(A, B, C),$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Отношение любых двух линейных элементов треугольника есть угловой элемент треугольника; короче:

$$\frac{l_1}{l_2} = u = F(A, B, C).$$

Пример. $2p = a + b + c$ и $h_a = b \sin C$ — линейные элементы треугольника, их отношение $\frac{2p}{h_a} = \frac{a + b + c}{b \sin C}$ — угловой элемент.

Действительно, по теореме синусов $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, поэтому

$$\frac{2p}{h_a} = \frac{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}{2R \sin B \sin C} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin B \sin C} =$$

$$= F(A, B, C).$$

б) Классификация задач на решение треугольников и методы их решения

1. Отметим, что во всяком треугольнике один угловой элемент известен: $A+B+C=\pi$, поэтому для определения углов треугольника A, B, C достаточно задать еще два его каких-нибудь независимых угловых элемента u_1 и u_2.

Действительно, выразив эти элементы через углы (см. теор. 1), получим систему трех уравнений с неизвестными A, B и C:

$$\begin{cases} A+B+C=\pi, \\ u_1=F_1(A, B, C), \\ u_2=F_2(A, B, C). \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем A, B, C и определим тем самым форму треугольника. Понятно, что числа A, B и C должны быть положительными.

2. Для полного определения искомого треугольника ABC достаточно задание еще одного его элемента, неуглового, например линейного.

В самом деле, зная углы треугольника A, B, C и линейный элемент l, можно вычислить любой элемент этого треугольника x следующим образом:

1) Если x — угловой элемент, то по теореме 1 он выражается через углы, т. е.

$$x=F(A, B, C).$$

2) Если x — линейный элемент, то по следствию из теоремы 2 отношение $\frac{x}{l}$ — угловой элемент, поэтому

$$\frac{x}{l}=F(A, B, C), \text{ откуда } x=l\cdot F(A, B, C).$$

3) Если x — элемент n-го измерения ($n>1$), то возведем l в n-ю степень, получим l^n — элемент n-го измерения, поэтому по теореме 2 отношение $\frac{x}{l^n}$ — угловой элемент и, следовательно, $\frac{x}{l^n}=F(A, B, C)$, откуда $x=l^n\cdot F(A, B, C)$.

Пусть, например, x — искомая площадь треугольника, а l — биссектриса треугольника, проведенная из вершины

A. Выражая x и l через стороны и углы треугольника по формулам (XIVa) и (XII), получаем:

$$x = \frac{1}{2} bc \sin A, \qquad l = \frac{c \sin B}{\cos \dfrac{B-C}{2}},$$

$$\frac{x}{l^2} = \frac{b \sin A \cos^2 \dfrac{B-C}{2}}{2c \sin^2 B}.$$

По теореме синусов $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, следовательно,

$$\frac{x}{l^2} = \frac{2R\sin B \cdot \sin A \cdot \cos^2 \dfrac{B-C}{2}}{2 \cdot 2R \sin C \sin^2 B},$$

откуда

$$x = l^2 \cdot \frac{\sin A \cdot \cos^2 \dfrac{B-C}{2}}{2 \sin C \sin B}.$$

3. Задачи на решение треугольников можно разбить по характеру данных на четыре типа:
I — даны два угловых элемента и один линейный: u_1, u_2, l;
II — даны два линейных элемента и один угловой: u, l_1, l_2;
III — даны три линейных элемента: l_1, l_2, l_3;
IV — среди данных имеются элементы не угловые и не линейные.

4. Решение задач I типа, когда даны u_1, u_2, l.

1) Используя соответствующие теоремы тригонометрии, выражаем данные угловые элементы u_1 и u_2 через углы треугольника, получаем систему уравнений с неизвестными A, B, C:

$$\begin{cases} A + B + C = \pi, \\ u_1 = F_1(A, B, C), \\ u_2 = F_2(A, B, C). \end{cases}$$

Решив эту систему, находим углы треугольника A, B и C.

2) Используя известные углы и данный линейный элемент l, можем определить любой искомый элемент треугольника так, как это сказано в пункте 2.

Пример. Дано: $A - B = \delta$, $\cos A + \cos B = q$, l_c — биссектриса угла C; найти r — радиус вписанного круга.

Решение. 1) Составляем систему уравнений с неизвестными A, B и C:

$$\begin{cases} A - B = \delta, \\ \cos A + \cos B = q, \\ A + B + C = \pi. \end{cases}$$

Второе уравнение дает:

$$2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = q.$$

Подставив значение $A - B$ из первого уравнения, получаем:

$$\cos\frac{A+B}{2} = \frac{q}{2\cos\frac{\delta}{2}},$$

откуда, при условии $\left|\frac{q}{2\cos\frac{\delta}{2}}\right| < 1$, находим:

$$A + B = 2\arccos\frac{q}{2\cos\frac{\delta}{2}}.$$

Складывая это равенство по частям с первым уравнением, а затем вычитая из него первое уравнение, получаем:

$$A = \arccos\frac{q}{2\cos\frac{\delta}{2}} + \frac{\delta}{2}, \quad B = \arccos\frac{q}{2\cos\frac{\delta}{2}} - \frac{\delta}{2},$$

$$C = \pi - (A + B) = \pi - 2\arccos\frac{q}{2\cos\frac{\delta}{2}}.$$

2) Выражаем данный элемент l_c и искомый r через стороны и углы треугольника (см. форм. XII и XVII):

$$l_c = \frac{a\sin B}{\cos\frac{A-B}{2}}, \quad r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Следовательно, отношение $\frac{r}{l_c} = \frac{(b+c-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}{2a\sin B}$.

По теореме синусов $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$; подставив эти значения сторон в равенство и сократив на $2R$, получим:

$$\frac{r}{l_c}=\frac{(\sin B+\sin C-\sin A)\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin A\sin B},$$

откуда

$$r=l_c\frac{(\sin B+\sin C-\sin A)\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin A\sin B}.$$

5. Решение задачи II типа, когда даны u, l_1, l_2.

1) Составляем систему уравнений с неизвестными A, B, C:

$$\begin{cases} A+B+C=\pi, \\ u=F(A,\ B,\ C), & \text{(теорема 1)} \\ \dfrac{l_1}{l_2}=F_1(A,\ B\ C). & \text{(след. из теоремы 2)} \end{cases}$$

Решив ее, найдем углы треугольника A, B и C.

2) Замечаем, что задача сведена к I типу, так как теперь известны два угловых элемента и линейный, например A, B и l_1, поэтому путь продолжения ее решения уже известен.

Пример. Дано $A-B=\varphi$, $a-b=d$ и $h_a+h_b=t$; найти r_a — радиус окружности, касающейся стороны, лежащей против угла A, и продолжения двух других сторон треугольника.

Решение. 1) Составляем систему уравнений с неизвестными A, B и C:

$$A+B+C=\pi, \tag{1}$$

$$A-B=\varphi, \tag{2}$$

третье уравнение получим, взяв отношение данных линейных элементов:

$$\frac{h_a+h_b}{a-b}=\frac{t}{d} \tag{3}$$

Действительно, $h_a=b\sin C$, $h_b=c\sin A$, $a=2R\sin A$. $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$, поэтому равенство (3) дает:

$$\frac{(\sin A+\sin B)\sin C}{\sin A-\sin B}=\frac{t}{d} \tag{3'}$$

2) Решаем полученную систему относительно A, B и C. Уравнение (3′) преобразуем к виду

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin(A+B)}{\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{t}{d},$$

откуда после сокращения получаем:

$$\sin^2\frac{A+B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}=\frac{t}{d},$$

следовательно,

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sqrt{\frac{t}{d}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$ и если $\sqrt{\frac{t}{d}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}<1$, то

$$A+B=2\arcsin\sqrt{\frac{t}{d}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

Присоединяя к этому уравнения (2) и (1), находим:

$$A=\arcsin\sqrt{\frac{t}{d}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}+\frac{\varphi}{2},$$

$$B=\arcsin\sqrt{\frac{t}{d}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}-\frac{\varphi}{2},$$

$$C=\pi-(A+B)=\pi-2\arcsin\sqrt{\frac{t}{d}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}.$$

3) Для определения искомого элемента r_a составляем отношение $\frac{r_a}{a-b}$ и выражаем его через углы треугольника A, B и C.

На рисунке 180 видно, что $r_a=AB_1\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, где $AB_1=p$.

Действительно, $AB_1=AB+BB_1=AB+BK$,

$AC_1=AC+CC_1=AC+CK$,

$AB_1+AC_1=AB+AC+BC=c+b+a=2p$,

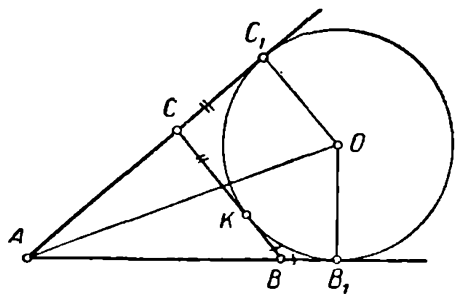


Рис. 180.

откуда

$$AB_1 = p, \text{ так как } AB_1 = AC_1.$$

Итак,

$$r_a = p \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}. \qquad \text{(XX)}$$

Используя теорему синусов, находим, что $a - b = 2R(\sin A - \sin B)$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c) = R(\sin A + \sin B + \sin C)$, следовательно,

$$\frac{r_a}{a - b} = \frac{(\sin A + \sin B + \sin C) \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{2(\sin A - \sin B)},$$

откуда

$$r_a = d \cdot \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{C}{2} \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

6. Решение задач III типа, когда даны три линейные элементы треугольника: l_1, l_2, l_3.

Составляем систему уравнений с неизвестными A, B, C:

$$\begin{cases} A + B + C = \pi \\ \frac{l_2}{l_1} = F_1(A, B, C) \ \ldots \text{ (след. из теоремы 2)} \\ \frac{l_3}{l_1} = F_2(A, B, C) \ \ldots \text{ (след. из теоремы 2)} \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем углы треугольника A, B, C и тем самым придем к задаче I типа.

Пример. Дано: $a + b$, h_c и R; найти m_a.

Решение. 1) Используя отношение данных линейных элементов, составляем систему уравнений с неизвестными A, B и C:

$$\frac{a + b}{2R} = \frac{2R \sin A + 2R \sin B}{2R} = \sin A + \sin B,$$

$$\frac{h_c}{2R} = \frac{a \sin B}{2R} = \frac{2R \sin A \sin B}{2R} = \sin A \sin B, \text{ следовательно,}$$

$$\sin A + \sin B = \frac{a + b}{2R}. \qquad (1)$$

$$\sin A \sin B = \frac{h_c}{2R} \tag{2}$$

$$A + B + C = \pi \tag{3}$$

Решив эту систему, найдем углы треугольника A, B, C.

2) По формуле (XIIIa) имеем:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}\ ,$$

следовательно, применив теорему синусов, будем иметь:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{(2R\sin B)^2 + (2R\sin C)^2 + 2(2R\sin B)(2R\sin C)\cos A} =$$
$$= R\sqrt{\sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin B \sin C \cos A}\ .$$

7. Решение задач IV типа, когда среди данных имеются элементы треугольника выше 1-го измерения.

Как и в предыдущих типах, решение начинается с составления системы уравнений относительно углов A, B и C. Но для получения таких уравнений (в случае неодинаковой размерности данных неугловых элементов) приходится «уравнивать» размерность данных элементов возведением некоторых из них в соответствующую степень или другим путем с тем, чтобы отношение полученных таким путем элементов представляло угловой элемент (см. теорему 2) и выражалось только через A, B и C.

Покажем это на примере.

Дано: h_a, $2p$, S; найти $S_1 = a^2 + b^2 + c^2$ — сумму площадей квадратов, построенных на сторонах треугольника.

Решение. Составляем систему уравнений относительно A, B, C. Первые два элемента h_a и $2p$ линейные; поэтому их отношение будет угловым элементом:

$$\frac{2p}{h_a} = \frac{a+b+c}{b\sin C} = \frac{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}{2R\sin B \sin C}, \text{ откуда}$$

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{2p}{h_a} \ldots \tag{1}$$

Третий элемент $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ 2-го измерения, поэтому берем его отношение к квадрату одного из данных линейных элементов, например h_a, получим:

$$\frac{S}{h_a^2} = \frac{\frac{1}{2}ab\sin C}{(b\sin C)^2} = \frac{\frac{1}{2}a}{b\sin C} = \frac{R\sin A}{2R\sin B\sin C}\ , \text{ откуда}$$

$$\frac{\sin A}{\sin B \sin C} = \frac{2S}{h_a^2}, \tag{2}$$

$$A + B + C = \pi. \tag{3}$$

Используя известные тригонометрические тождества, получаем:

$$\sin A = \sin(B + C) = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2};$$

$$\sin A + \sin B + \sin C + 2\sin\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{B-C}{2}\right);$$

$$\sin B \sin C = \frac{1}{2}|\cos(B-C) - \cos(B+C)| = \cos^2\frac{B-C}{2} -$$

$$-\cos^2\frac{B+C}{2},$$

следовательно, уравнения (1) и (2) можно записать так:

$$\frac{\sin\dfrac{B+C}{2}}{\cos\dfrac{B-C}{2} - \cos\dfrac{B+C}{2}} = \frac{p}{h_a}, \tag{1'}$$

$$\frac{\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B+C}{2}}{\cos^2\dfrac{B-C}{2} - \cos^2\dfrac{B+C}{2}} = \frac{S}{h_a^2}. \tag{2'}$$

Ради краткости внесем обозначения: $\cos\frac{B+C}{2} = x$, $\cos\frac{B-C}{2} = y$, тогда $\sin\frac{B+C}{2} = \sqrt{1-x^2}$ и уравнения запишутся так:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{y-x} = \frac{p}{h_a}, \tag{1''}$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot x}{y^2-x^2} = \frac{S}{h_a^2}. \tag{2''}$$

Разделив (1″) на (2″), получаем:

$$\frac{y+x}{x} = \frac{ph_a}{S},$$

откуда $y = \frac{ph_a - S}{S} \cdot x$. Подставляем в уравнение (1″), получаем:

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{p(ph_a - 2S)}{Sh_a},$$

откуда $x = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}$, где $q = \frac{p(ph_a - 2S)}{Sh_a}$,

$$y = \frac{ph_a - S}{S\sqrt{1+q^2}},$$

$$B + C = 2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+q^2}},$$

$$B - C = 2\arccos\frac{ph_a - S}{S\sqrt{1+q^2}}, \quad \text{если} \quad \frac{|ph_a - S|}{S\sqrt{1+q^2}} < 1.$$

Определив углы треугольника B, C и $A = \pi - (B + C)$, находим искомый элемент S_1:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{1}{2}ab\sin C} = \frac{4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}{\frac{1}{2}\cdot 4R^2 \sin A \sin B \sin C},$$

откуда

$$S_1 = \frac{1}{2}S \cdot \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\sin A \sin B \sin C}.$$

Упражнения.

1. Дано: $A - B = \varphi$, $l_a : h_a = m : n$, r; найти R.
2. Дано: A, l_a, r_a; найти $2p$.
3. Дано: $b - c$, h_a, R; найти m_a.
4. Дано: a, $2p$, S; найти r_a.
5. Дано: $r = \sqrt{2}$, $R = 2\sqrt{2}$, $b + c = 2a$; найти стороны и углы треугольника.
6. Доказать, что в каждом треугольнике:

$$1)\ \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r};$$

$$2)\ \frac{a}{p} = 1 - \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2};$$

$$3)\ c^2 = (a+b)^2\sin^2\frac{C}{2} + (a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}.$$

7. Доказать, что треугольник прямоугольный, если

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2.$$

8. Определить вид треугольника, если

$$\frac{a+b}{2}=c \text{ и } \frac{A+B}{2}=C.$$

9. Доказать, что треугольник прямоугольный, если

$$\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C.$$

§ 64. Решение четырехугольников через сведéние к системе треугольников

Известно, что треугольник определяется тремя независимыми основными элементами, а для определения выпуклого четырехугольника необходимо знать его пять независимых основных элементов (сторон и углов), а именно:

1) четыре стороны и один угол, или
2) три стороны и два угла, или
3) две стороны и три угла.

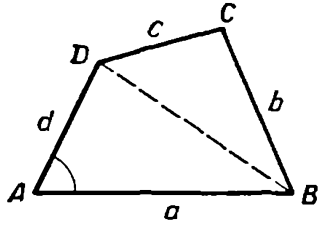


Рис. 181.

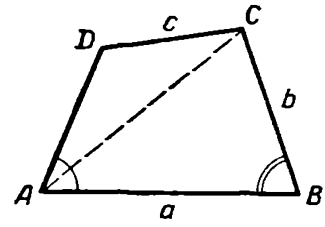


Рис. 182.

В самом деле, если известны четыре стороны a, b, c, d и угол, например A (см. обозначение на рис. 181), то однозначно определяется треугольник ABD, отсекаемый диагональю BD, и сама диагональ BD (II случай решения треугольников), а тем самым определится и второй треугольник BDC (III случай решения треугольников), дополняющий ABD до искомого четырехугольника $ABCD$.

Если даны три стороны и два угла, один из которых лежит между двумя данными сторонами, например a, b, c, и углы A, B (рис. 182), то прежде всего однозначно определяется треугольник ABC, отсекаемый диагональю AC, а тем самым определится сама диагональ AC и угол BAC (II случай решения треугольников). Учитывая далее, что $\measuredangle DAC=\measuredangle A-\measuredangle BAC$, замечаем, что определился и

другой треугольник ADC (III случай решения треугольников), дополняющий треугольник ABC до искомого четырехугольника $ABCD$.

Если же ни один из данных углов четырехугольника $ABCD$ не лежит между данными сторонами (так будет, например, если даны стороны a, b, c и углы A, D (рис. 183), то выделяют два вспомогательных треугольника ABE и EFD, где $BE \parallel CD$ и $EF \parallel BC$.

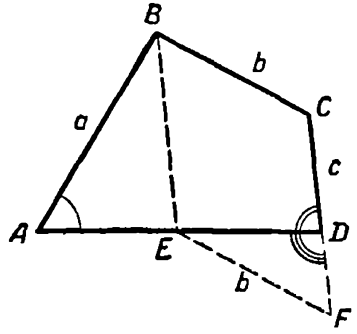


Рис. 183.

Решив треугольник ABE по стороне a, углу A и углу $BEA = \measuredangle D$, находят AE и EB (I случай решения треугольников). Затем решают треугольник EFD по сторонам $EF = b$, $DF = BE - c$ и углу $EDF = 180^\circ - \measuredangle D$ (III случай решения треугольников), находят ED. Сложив AE и ED, находят сторону AD искомого четырехугольника и тем самым сводят задачу к предыдущему случаю.

Если даны две стороны a, b и три угла A, B, C (рис. 184), то сразу же можно найти четвертый угол $D = 2\pi - (A + B + C)$. В этом случае сначала определится треугольник ABC, отсекаемый диагональю AC (II случай решения треугольников), а значит, определится диагональ AC и углы треугольника ABC, прилежащие к этой диагонали. Зная же эти углы и используя данные A и C, найдем углы другого треугольника ACD, прилежащие к его уже найденному основанию AC, а тем самым определим и сам треугольник ACD (I случай решения треугольников), дополняющий ABC до искомого четырехугольника.

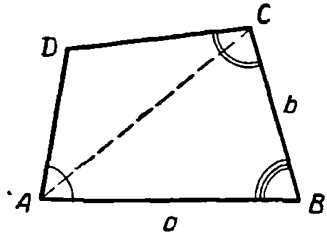


Рис. 184.

Следует отметить, что в самих определениях некоторых частных видов четырехугольников уже содержатся явно или скрыто дополнительные указания об их сторонах и углах, поэтому такие четырехугольники задаются меньшим числом элементов. Так, для определения прямо-

угольника достаточно знать две его стороны, для определения параллелограмма надо знать три независимых элемента, а для трапеции—четыре.

Четыре независимых элемента достаточно задать также для определения так называемого хордового четырехугольника, т. е. такого, вокруг которого возможно описать окружность. Как известно, в хордовом четырехугольнике сумма противоположных углов равна $2d$, поэтому из четырех его углов независимыми между собой являются только два, прилежащие к одной стороне четырехугольника.

Решим следующую задачу: даны стороны хордового четырехугольника a, b, c и d; найти его углы и площадь.

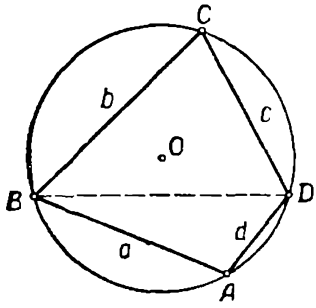


Рис. 185.

Решение. Изобразим хордовый четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность, и отметим на нем данные стороны (рис. 185).

Для определения угла A применим к треугольникам ABD и BCD теорему косинусов, получим:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A,$$

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C,$$

откуда

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C.$$

Но по свойству противоположных углов вписанного четырехугольника $A + C = 180°$, следовательно, $\cos C = -\cos A$, а потому предыдущее равенство перепишется так:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A,$$

откуда

$$\cos A = \frac{(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)}{2(bc + ad)}.$$

Для приведения к виду, удобному для логарифмирования, находим:

$$1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(bc + ad)} = \frac{(a + d + c - b)(a + d + b - c)}{2(bc + ad)}.$$

$$1 - \cos A = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(bc + ad)} = \frac{(b + c - a + d)(b + c + a - d)}{2(bc + ad)}.$$

Вводим обозначение:

$a+b+c+d=2p$ — периметр четырехугольника,

тогда

$$a+b+c-d=2(p-d);$$
$$b+c+d-a=2(p-a);$$
$$c+d+a-b=2(p-b).$$

Используя это обозначение и производя замену

$$1+\cos A=2\cos^2\frac{A}{2} \quad \text{и} \quad 1-\cos A=2\sin^2\frac{A}{2},$$

найдем:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc+ad}}; \quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{bc+ad}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Аналогичным образом найдем формулы для определения угла B.

Для определения площади четырехугольника сложим площади треугольников ABD и BCD, получим:

$S=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A$ (так как $C=\pi-A$).

Подставив сюда значение $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=$

$$=\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{bc+ad},$$

получаем:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Это соотношение было найдено индийским математиком Брамагуптой (598—660).

§ 65. Решение простых многоугольников[1] с любым числом сторон

Если дан n-угольник $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, то можно считать известным все его основные элементы: n сторон и n углов, а всего $2n$ основных элементов. Поставим теперь обратный вопрос: сколько надо

[1] Многоугольник называется простым, если никакие две его стороны не пересекаются (во внутренних точках), ни одна вершина не лежит на его стороне (внутри) и каждая вершина служит концом только двух сторон.

взять основных элементов многоугольника, чтобы по ним определить этот многоугольник, т. е. найти все его элементы?

Ответ дает следующая теорема:

Любой простой n-угольник вполне определяется заданием $2n-3$ основных независимых элементов.

Доказательство методом математической индукции.

1. Отмечаем, что теорема верна для треугольника. В самом деле, при $n=3$ формула $2n-3$ дает нам число 3. А из геометрии известно, что именно 3 независимых элемента определяют треугольник.

2. Докажем теперь, что из допущения справедливости теоремы для $(n-1)$-угольника следует ее справедливость и для n-угольника.

В самом деле, пусть n-угольник $A_1A_2A_3\ldots A_n$ уже построен (рис. 186). Проведем в нем диагональ A_1A_{n-1}, получим многоугольник $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ с числом сторон $n-1$. Мы допустили, что для $(n-1)$-угольника теорема справедлива, тогда для его определения необходимо задать $2(n-1)-3$ независимых элемента. Но для перехода от $(n-1)$-угольника $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ к n-угольнику $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ достаточно задать еще два основных элемента, определяющих положение вершины A_n, например две стороны A_1A_n и $A_{n-1}A_n$, или два угла $A_{n-1}A_1A_n$ и $A_1A_{n-1}A_n$, или сторону A_1A_n и угол $A_{n-1}A_1A_n$. Следовательно, для определения n-угольника надо задать $[2(n-1)-3]+2=2n-3$ независимых элемента.

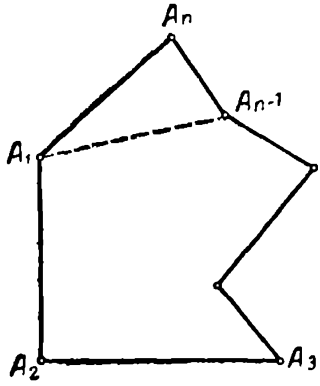


Рис. 186.

Итак, если теорема верна для $(n-1)$-угольника, то она оказывается верной и для n-угольника.

3. Но для треугольника она верна, следовательно, по доказанному будет верна и для четырехугольника; а если верна для четырехугольника, то будет верна и для пятиугольника и т. д.

В частности, отметим, что на основании доказанной теоремы для определения четырехугольника необходимо иметь $2\cdot4-3=5$ независимых основных его элементов (в этом мы убедились в § 64 иным путем), для определения пятиугольника надо $2\cdot5-3=7$ независимых основных элементов, для шестиугольника — $2\cdot6-3=9$ элементов и т. д.

Итак, простой n-угольник может быть задан $(2n-3)$ основными независимыми элементами, остальные 3 его основных элемента можно найти построением или вычислением. Для вычисления трех неизвестных элементов надо составить три уравнения, выражающие зависимость между данными и искомыми элементами. Одно из таких уравнений выражает известную из геометрии зависимость между углами многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$:

$$A_1+A_2+A_3+\ldots+A_{n-1}+A_n=\pi(n-2). \qquad (1)$$

Два других уравнения выражают зависимости между углами и сторонами многоугольника. Чтобы получить их, проведем на плоскости многоугольника оси прямоугольных координат и спроектируем (ортогонально) контур многоугольника сначала на ось абсцисс, а затем на ось ординат.

Если за начало координат принять вершину A_1 и ось абсцисс направить по стороне A_nA_1, как указано на рисунке 187, то будем иметь:

Стороны	Углы, образуемые сторонами с осью абсцисс	Косинусы углов
$A_1A_2 = a_1$	$\pi - A_1$	$-\cos A_1$
$A_2A_3 = a_2$	$(\pi - A_1) + (\pi - A_2) = 2\pi - (A_1 + A_2)$	$\cos(A_1 + A_2)$
$A_3A_4 = a_3$	$(\pi - A_1) + (\pi - A_2) + (\pi - A_3) = 3\pi - (A_1 + A_2 + A_3)$	$-\cos(A_1 + A_2 + A_3)$
. . . . .	. . . . .	. . . . .
$A_{n-1}A_n = a_{n-1}$	$(\pi - A_1) + (\pi - A_2) + \ldots + (\pi - A_{n-1}) = (n-1)\pi - (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})$	$(-1)^{n-1} \times \cos(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})$
$A_nA_1 = a_n$	0	1

Известно, что проекция ломаной равна проекции замыкающей, т. е.

$$\text{пр}_x A_1A_2 + \text{пр}_x A_2A_3 + \ldots + \text{пр}_x A_{n-1}A_n = \text{пр}_x A_1A_n.$$

Проекция каждой стороны равна ее длине, умноженной на косинус угла, который образует эта сторона с осью x-в, следовательно,

$$-a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1+A_2) - a_3\cos(A_1 + A_2 + A_3) + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1}\cos(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) = -a_n \qquad (11)$$

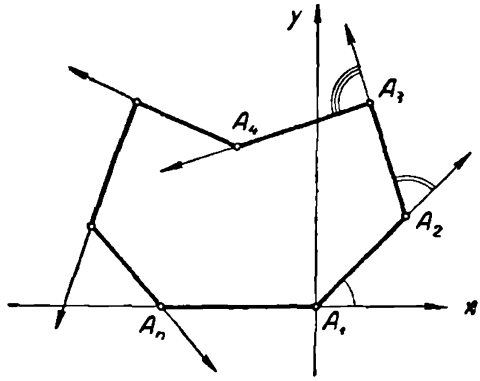


Рис. 187.

Проектируя ту же ломаную на ось y-в, получаем:

$$\text{пр}_y A_1A_2 + \text{пр}_y A_2A_3 + \text{пр}_y A_3A_4 + \ldots + \text{пр}_y A_{n-1}A_n = \text{пр}_y A_nA_1$$

или

$$a_1\cos\left[\frac{\pi}{2} - (\pi - A_1)\right] + a_2\cos\left\{\frac{\pi}{2} - [2\pi - (A_1 + A_2)]\right\} + a_3\cos\left\{\frac{\pi}{2} - [3\pi - (A_1 + A_2 + A_3)]\right\} + \ldots + a_{n-1}\cos\left\{\frac{\pi}{2} - [(n-1)\pi - (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})]\right\} = a_n\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)$$

т. е.

$$a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3) - \ldots + \\ + (-1)^n a_{n-1} \sin (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) = 0. \quad \text{(III)}$$

Итак, мы составили три уравнения (I, II, III), выражающие зависимости между основными элементами простого n-угольника. Эти уравнения позволяют вычислить любые три основных элемента многоугольника, если известны $2n-3$ его независимых элементов.

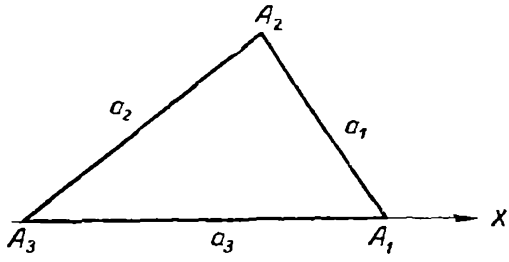


Рис. 188.

В частном случае, когда $n = 3$, уравнения I, II, III должны выразить известную уже нам зависимость между сторонами и углами треугольника $A_1A_2A_3$ (рис. 188).

В самом деле, уравнение (I) дает:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \pi.$$

Уравнение (II) дает:

$$-a_1 \cos A_1 + a_2 \cos (A_1 + A_2) = -a_3$$

или

$$a_1 \cos A_1 + a_2 \cos A_3 = a_3,$$

так как

$$\cos (A_1 + A_2) = \cos (\pi - A_3) = \\ = -\cos A_3.$$

Уравнение (III) дает:

$$a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{a_1}{\sin A_3} = \frac{a_2}{\sin A_1}.$$

так как

$$\sin (A_1 + A_2) = \sin (\pi - A_3) = \sin A_3.$$

Приняв употребляемые нами ранее обозначения в треугольнике: $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$, $a_2 = a$, $a_3 = b$ и $a_1 = c$, получим формулы, выведенные в § 59.

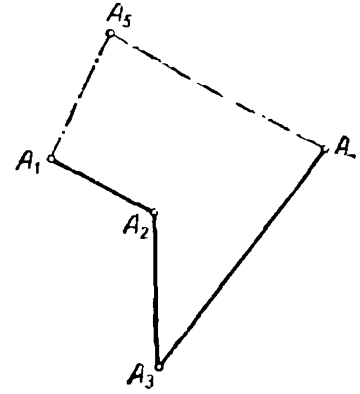


Рис. 189.

Задача. При геологических изысканиях потребовалось измерить стороны и углы некоторого земельного участка $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. 189), но на местности оказались различные препятствия (лес, болото, строения), не допускавшие непосредственного измерения угла A_5 и сторон $A_1A_5 = a_5$ и $A_4A_5 = a_4$. Геологи измерили другие стороны и углы участка и получили:

$$A_1A_2 = a_1 \approx 351 \text{ м}, \qquad A_1 \approx 97°20',$$
$$A_2A_3 = a_2 \approx 357 \text{ м}, \qquad A_2 \approx 234°30',$$
$$A_3A_4 = a_3 \approx 780 \text{ м}, \qquad A_3 \approx 43°10',$$
$$A_4 \approx 76°30'.$$

Стороны a_4, a_5 и угол A_5 они нашли вычислением, используя уравнения I, II и III, а именно:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 180^\circ (5-2), \qquad (I')$$

$$-a_1 \cos A_1 + a_2 \cos (A_1 + A_2) - a_3 \cos (A_1 + A_2 + A_3) + a_4 \cos (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = -a_5, \qquad (II')$$

$$a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3) - a_4 \sin (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 0. \qquad (III')$$

Из уравнения (I′) нашли:

$$A_5 = 3 \cdot 180^\circ - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 540 - 451^\circ 30' = 88^\circ 30'.$$

Из уравнения (III′) получили:

$$a_4 = \frac{a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) + a_3 \sin (A_1 + A_2 + A_3)}{\sin (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)} =$$

$$= \frac{351 \cdot \sin 97^\circ 20' - 357 \cdot \sin 331^\circ 50' + 780 \cdot \sin 375^\circ}{\sin 451^\circ 30'} =$$

$$= \frac{351 \cdot \cos 7^\circ 20' + 357 \cdot \sin 28^\circ 10' + 780 \cdot \sin 15^\circ}{\cos 1^\circ 30'} =$$

$$= \frac{351 \cdot 0{,}9918 + 357 \cdot 0{,}4721 + 780 \cdot 0{,}2588}{0{,}9997} \approx 718{,}8 \approx 719, \text{ т. е.}$$

$$a_4 \approx 719 \ (м).$$

Из уравнения (II′) получили:

$$a_5 = 351 \cdot \cos 97^\circ 20' - 357 \cdot \cos 331^\circ 50' + 780 \cdot \cos 375^\circ -$$

$$- 718{,}8 \cdot \cos 451^\circ 30' = -351 \cdot \sin 7^\circ 20' - 357 \cdot \cos 28^\circ 10' +$$

$$+ 780 \cdot \cos 15^\circ + 718{,}8 \cdot \sin 1^\circ 30' \approx -351 \cdot 0{,}1277 - 357 \cdot 0{,}8816 +$$

$$+ 780 \cdot 0{,}9659 + 718{,}8 \cdot 0{,}0262 \approx 416{,}2 \approx 416, \text{ т. е. } a_5 \approx 416 \ (м).$$

§ 66. Решение стереометрических задач

В данном параграфе мы покажем на конкретных примерах, как во многих случаях решение стереометрической задачи сводится к выделению некоторой последовательности треугольников, через элементы которых с помощью тригонометрии раскрывается связь между данными и искомыми.

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, двугранный угол при основании равен α; через ребро этого угла проведена плоскость, образующая с основанием угол β ($\beta < \alpha$). Определить площадь сечения пирамиды указанной плоскостью.

Вычислить при $a = 23{,}40$, $\alpha = 71^\circ 30'$ и $\beta = 32^\circ 10'$.

Р е ш е н и е. Пусть $SABCD$ данная пирамида (рис. 190). Если $\alpha > \beta$, то в сечении пирамиды плоскостью получится равнобочная трапеция $BEFC$. Через высоту SO пирамиды проводим сечение SKL, перпендикулярное ребру BC, получаем отрезок LM, который будет высотой трапеции:

$\measuredangle SLK = \alpha$, $\measuredangle MLK = \beta$, и $\measuredangle KML = 180° - (\alpha + \beta)$.

Площадь сечения $S = \frac{1}{2} LM\,(BC + EF)$. (*)

По условию $BC = a$; остается найти LM и EF.

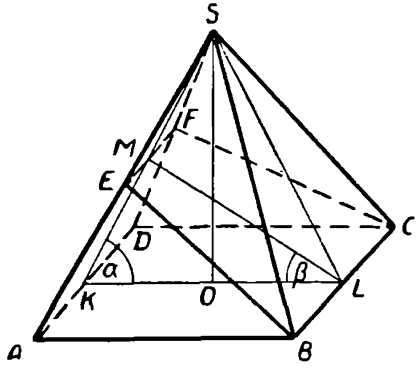


Рис. 190.

По теореме синусов из треугольника KLM имеем:

$$\frac{LM}{\sin\alpha} = \frac{KL}{\sin(\alpha+\beta)},$$ откуда

$$LM = \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Из подобия треугольников SEF и SAD имеем:

$$\frac{EF}{AD} = \frac{SM}{SK},$$

откуда

$$EF = AD \cdot \frac{SM}{SK} = AD \cdot \frac{SM}{SL}, \text{ так как } SK = SL.$$

Но из треугольника SML по теореме синусов имеем:

$$\frac{SM}{SL} = \frac{\sin SLM}{\sin SML}, \text{ или } \frac{SM}{SL} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)},$$

так как $\measuredangle SLM = \alpha - \beta$, а $\measuredangle SML = \alpha + \beta$, как внешний угол треугольника MKL. Следовательно,

$$EF = AD \cdot \frac{SM}{SL} = a \cdot \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Подставив найденные значения LM и EF в формулу (*) и проделав соответствующие преобразования, получим

$$S = \frac{a^2 \sin\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Остается произвести вычисления, используя таблицу логарифмов.

$$\lg S = 2\lg a + 2\lg\sin\alpha + \lg\cos\beta - 2\lg\sin(\alpha+\beta);$$

$2\lg a = 2{,}7384$	$\lg a = \lg 23{,}40 = 1{,}3692,$
$2\lg\sin\alpha = \bar{1}{,}9540$	$2\lg a = 2{,}7384,$
$\lg\cos\beta = \bar{1}{,}9277$	$\lg\sin\alpha = \lg\sin 71°30' = \bar{1}{,}9770,$
$-2\lg\sin(\alpha+\beta) = 0{,}0248$	$2\lg\sin\alpha = \bar{1}{,}9540,$
$\lg S = 2{,}6449$	$\lg\cos\beta = \lg\cos 32°10' = \bar{1}{,}9277,$

$S = 441{,}5$ (кв. ед.); $\alpha+\beta = 103°40'$; $180° - (\alpha+\beta) = 76°20'$

$$\lg\sin(\alpha+\beta) = \lg\sin 76°20' = \bar{1}{,}9876,$$
$$2\lg\sin(\alpha+\beta) = \bar{1}{,}9752,$$
$$-2\lg\sin(\alpha+\beta) = 0{,}0248.$$

Задача 2. Основанием пирамиды служит трапеция, у которой меньшее основание и боковые стороны равны a, а острый угол α. Определить объем пирамиды, если ее боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ.

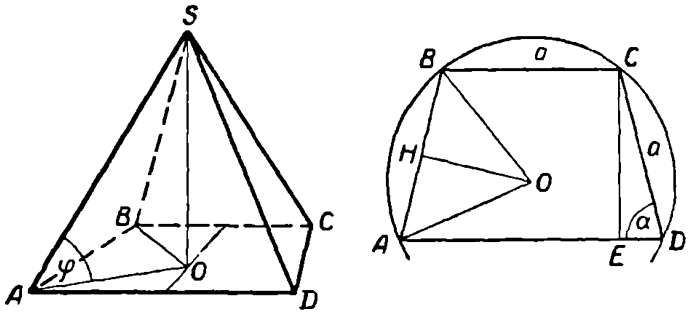


Рис. 191.

Решение. Строим изображение данной пирамиды $SABCD$ и ее высоты SO (рис. 191). Чтобы облегчить установление зависимости между данными и искомыми величинами, построим рядом основание пирамиды $ABCD$ в нормальном (неискаженном) виде и проведем в нем высоту CE.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}$ пл. $ABCD \cdot SO =$

$$= \frac{1}{3} \frac{AD + BC}{2} \cdot CE \cdot SO.$$

Заметив, что $AD = 2DE + BC$, получаем:

$$V = \frac{1}{3} (DE + BC) \cdot CE \cdot SO. \qquad (*)$$

Из треугольника CED имеем:

$$DE = a \cos \alpha \quad \text{и} \quad CE = a \sin \alpha;$$

$BC = CD = AB = a$ по условию; остается определить высоту SO.

Из треугольника SOA получаем:

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Принимая во внимание одинаковый наклон боковых ребер к плоскости основания пирамиды, заключаем, что вершина S проектируется ортогонально в центр круга, описанного около основания, а потому отрезок OA является радиусом круга, описанного около трапеции $ABCD$. Угол AOB опирается на дугу $AB = \frac{1}{2} \cup AC$. Но $\cup AC = 2\alpha$, так как на нее опирается вписанный угол $ADC = \alpha$, следовательно, $\cup AB = \alpha$ и угол $AOB = \alpha$.

Проведя в равнобедренном треугольнике AOB высоту OH, получим прямоугольный треугольник AOH, из которого находим $OA = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$. Таким образом, высоту пирамиды мы также определили:

$$SO = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

Остается подставить найденные величины в равенство (*) и провести соответствующие преобразования:

$$V = \frac{1}{3} (a \cos + a) \cdot a \sin \alpha \cdot \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \operatorname{tg} \varphi =$$

$$= \frac{1}{3} a^3 (\cos \alpha + 1) \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3} a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Задача 3. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен α, а высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна h.

Найти объем этой призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

Решение. Пусть призма с вписанным в нее шаром построена (рис. 192). Произведем сечение этой конфигурации плоскостью, параллельной основанию призмы и проходящей через центр O шара. В сечении получится такой же, как и в основании призмы, прямоугольный треугольник ABC с вписанной в него окружностью, причем радиус этой окружности равен радиусу шара и, следовательно, равен половине высоты призмы.

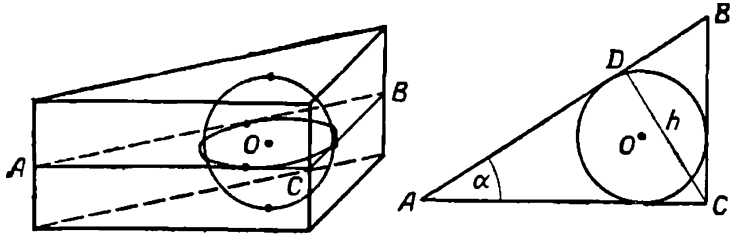


Рис. 192.

Обозначив площадь основания призмы через S, а высоту через H, будем иметь: $V = S \cdot H$.

$$S = \text{пл. } ABC = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sin\alpha} \cdot \frac{h}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{h^2}{\sin 2\alpha}.$$

Обозначив через r радиус круга, вписанного в треугольник ABC, и использовав формулу $r = \frac{S}{p}$, будем иметь

$$H = 2r = \frac{2S}{p}.$$

Находим периметр треугольника ABC:

$$2p = AB + AC + BC = \sqrt{AC^2 + BC^2} + AC + BC =$$

$$= \sqrt{\frac{h^2}{\sin^2\alpha} + \frac{h^2}{\cos^2\alpha}} + \frac{h}{\sin\alpha} + \frac{h}{\cos\alpha} = h\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right) = \frac{h(1 + \sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha};$$

следовательно,

$$H = \frac{2h^2}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{h(1 + \sin\alpha + \cos \alpha)} = \frac{2h}{1 + \sin\alpha + \cos \alpha}.$$

Итак, искомый объем призмы:

$$V = \frac{h^2}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{2h}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha} =$$

$$= \frac{h^3}{\sqrt{2} \sin 2\alpha \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Задача 4. Конический сосуд, осевым сечением к[оно]торого является равнобедренный треугольник с угл[ом] 2α при вершине, закрепили в о[тве]сном положении вершиной вн[из] (рис. 193), затем в него пол[ожи]жили шар радиусом r из мат[е]риала с удельным весом, больш[им] 1, и налили воды так, что ее п[ов]верхность касается шара сверх[у] (вода заполнила и ту часть сос[у]да, которая находится под ша[ро]ром).

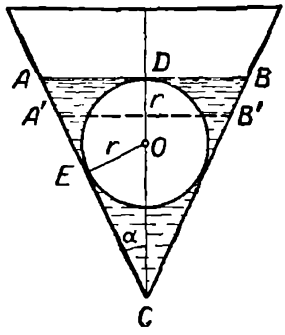


Рис. 193.

Определить уровень воды в сосуде до и после того, как шар будет из него вынут.

Решение. 1) Уровень воды в сосуде, до удаления из него шара, измеряется расстоянием h от поверхности воды до вершины конуса. Из треугольников ADC и OEC имеем:

$$h = CD = OD + OC = r + \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{r(1 + \sin\alpha)}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{2r \cdot \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha}.$$

2) Чтобы определить уровень воды в сосуде после удаления из него шара, найдем прежде всего объем воды, налитой в сосуд; очевидно, он равен разности между объемом ABC и объемом шара, т. е.

$$V = \frac{1}{3} CD \cdot \pi \cdot AD^2 - \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi (CD^3 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha - 4r^3),$$

так как $AD = CD \cdot \operatorname{tg} \alpha$

Подставив значение CD, находим:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{8r^3\cos^6\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^3\alpha}\operatorname{tg}^2\alpha - 4r^3\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3\left[\frac{2\cos^6\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos^2\alpha} - 1\right].$$

С другой стороны, принимая во внимание, что после удаления шара из сосуда вода примет форму конуса $A'B'C$, и, обозначая высоту этого конуса через h', будем иметь:

$$V = \frac{1}{3}h'\cdot\pi\cdot\left(\frac{A'B'}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\pi h'(h'\operatorname{tg}\alpha)^2 = \frac{1}{3}\pi(h')^3\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Приравняв значения V, получим:

$$\frac{1}{3}\pi(h')^3\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{4}{3}\pi r^3\left[\frac{2\cos^6\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos^2\alpha} - 1\right],$$

откуда находим искомый уровень h':

$$h' = r\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{\operatorname{tg}^2\alpha}\left[\frac{2\cos^6\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\cos^2 a} - 1\right]}.$$

Задача 5. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан прямой круговой цилиндр с квадратным осевым сечением так, что одна из его образующих расположена на диагонали основания пирамиды, а окружность каждого основания касается двух смежных боковых граней пирамиды.

Определить радиус основания цилиндра.

Решение. На рисунке 194 дано изображение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ и вписанного в нее цилиндра.

Образующая KK_1 цилиндра лежит на диагонали AC основания пирамиды, поэтому плоскость основания цилиндра перпендикулярна основанию пирамиды и параллельна ее диагональному сечению SBD. Пусть MNP — сечение пирамиды плоскостью основания цилиндра, тогда из условия задачи следует, что:

1) MNP — равнобедренный треугольник, подобный треугольнику SBD;

2) окружность основания цилиндра вписана в треугольник MNP.

Обозначим искомый радиус этой окружности через x и ее центр O соединим с вершиной P треугольника MNP

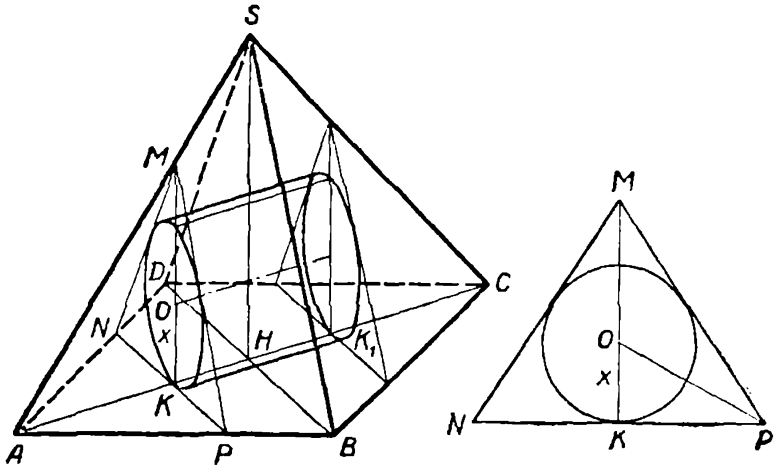


Рис. 194.

(см. вынесенное изображение треугольника MNP). Так как OP есть биссектриса угла MPN, равного углу SBH то

$$x = KP \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \qquad (*)$$

По условию осевое сечение цилиндра—квадрат, поэтому $KH = x$. Заметив, что треугольник AKP прямоугольный и равнобедренный (как подобный треугольнику AHB), запишем:

$$KP = AK = AH - KH = AS \cdot \cos\alpha - x = b\cos\alpha - x$$

Подстановка значения KP в равенство (*) дает уравнение:

$$x = (b\cos\alpha - x)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$x = \frac{b\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Шаблоны для вычерчивания графиков круговых функций

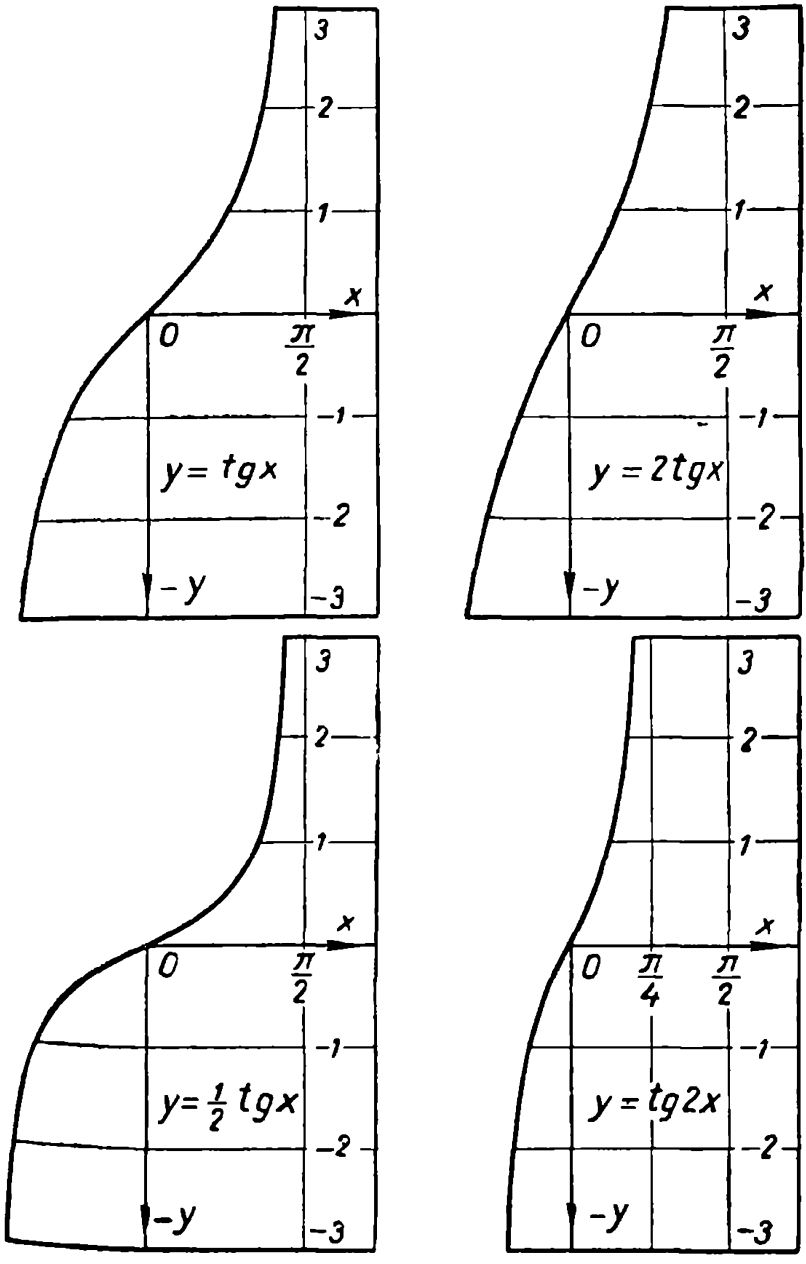


Рис. 195.

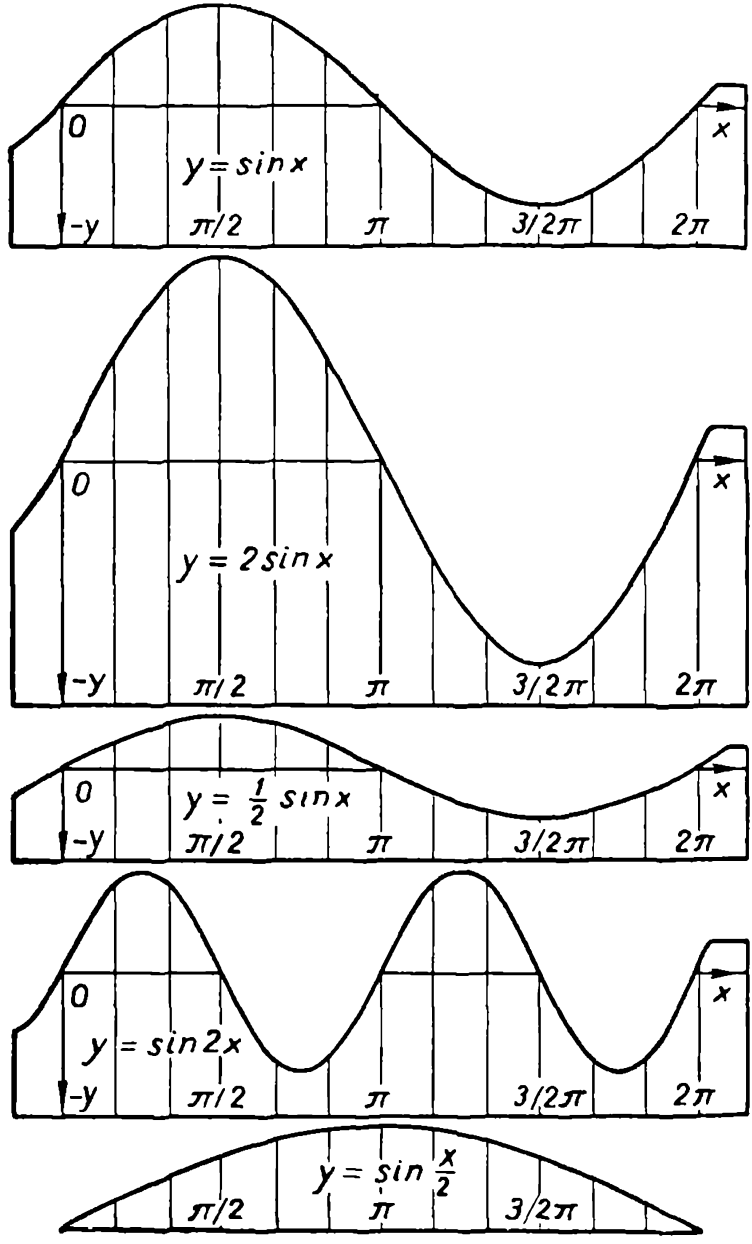

0
x
y = sin x
-y
π/2
π
3/2π
2π
0
x
y = 2 sin x
-y
π/2
π
3/2π
2π
0
x
y = 1/2 sin x
-y
π/2
π
3/2π
2π
0
x
y = sin 2x
-y
π/2
π
3/2π
2π
y = sin x/2
π/2
π
3/2π

Рис. 196.

ЧАСТЬ III

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КУРС ТРИГОНОМЕТРИИ

Гениальный математик Леонард Эйлер (1707—1783), член Петербургской академии наук, оставивший большое математическое наследство, среди которого отметим его труд «Введение в анализ», где тригонометрия получила свое полное современное развитие.

ПРИЛОЖЕНИЕ КРУГОВЫХ ФУНКЦИЙ В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ, ГЕОДЕЗИИ И АСТРОНОМИИ

ГЛАВА I

СФЕРИЧЕСКИЕ ДВУУГОЛЬНИКИ И ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 1. Простейшие образы сферической геометрии — точки и большие круги на сфере

Известно, что геометрическую фигуру называют плоской, если все ее точки лежат на одной плоскости. Аналогично геометрическую фигуру называют сферической, если все ее точки лежат на одной сфере. Раздел геометрии, в котором изучаются сферические фигуры, называют сферической геометрией.

Простейшие сведения из сферической геометрии надо знать каждому грамотному человеку, не говоря уже о техниках и инженерах, создающих современные машины и корабли. Но особо важное значение имеет этот раздел математики для капитанов морского и воздушного флота, космонавтов, астрономов, геодезистов и географов, так как наша планета имеет форму, весьма близкую к шару. Все линии и фигуры на глобусах, изображающих земной шар и небесную сферу, являются сферическими.

Начнем с решения простейшей из геометрических задач—отыскание кратчайшего расстояния между двумя данными точками.

На плоскости эта задача решается весьма просто: через данные точки A и B проводят прямую и измеряют отрезок AB этой прямой.

На сфере проведение прямых линий невозможно, и поэтому решение поставленной задачи значительно сложнее, чем на плоскости.

Прежде всего надо выяснить, какая линия на сфере между двумя данными точками A и B (рис. 1) является кратчайшей.

Проведем плоскость p через центр сферы O и данные точки A и B. Она пересечет сферу по окружности, которую называют большим кругом[1] или геодезической линией. Понятно, что центр большого круга совпадает с центром сферы O и радиус равен радиусу сферы R. Точки A и B разделят большой круг на две дуги, одна из которых всегда будет меньше либо равна 180°. Такая дуга и будет кратчайшей из всех линий на сфере, соединяющих точки A и B.

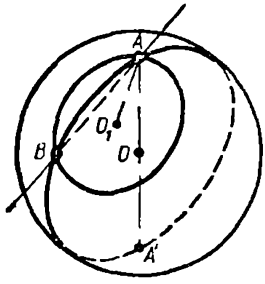


Рис. 1.

Чтобы убедиться в этом, проведем через точки A и B прямую и какую-либо плоскость p_1, не проходящую через центр сферы. Такая плоскость пересечет сферу по окружности с некоторым центром O_1 и радиусом $r < R$, которую в отличие от большого круга называют малым кругом. Повернем плоскость малого круга p_1 вокруг прямой AB до совпадения с плоскостью большого круга p. Когда малый круг $O_1(r)$ окажется в одной плоскости с большим кругом $O(R)$ (рис. 2), их центры O_1 и O расположатся на одном серединном перпендикуляре к общей хорде AB, причем точка O_1 будет ближе к хорде AB, чем точка O, так как радиус малого круга $O_1A = r$ меньше радиуса большого круга $OA = R$.

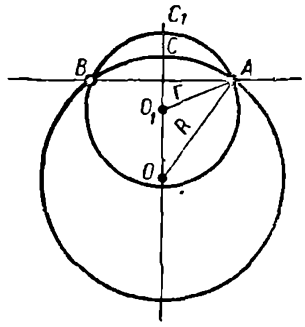


Рис. 2.

Из треугольника AOO_1 имеем:

$$OO_1 + O_1A > OA,$$

[1] Термин большой круг не совсем удачен, лучше было бы говорить наибольшая окружность, но в литературе и на практике таким термином пользуются и в настоящее время.

откуда, принимая во внимание равенства:

$$O_1A = r = O_1C_1 \quad \text{и} \quad OA = R = OC,$$

получаем:

$$OO_1 + O_1C_1 > OC$$

или

$$OC_1 > OC.$$

Это неравенство показывает, что дуга ACB большого круга проходит ближе к хорде AB, чем дуга AC_1B малого круга, т. е. объемлется дугой AC_1B, следовательно, она меньше этой дуги.

Таким образом, наше утверждение доказано и выяснен путь решения поставленной задачи: чтобы найти кратчайшее расстояние на сфере между данными точками A и B, надо провести через эти точки большой круг и измерить меньшую из дуг, на которые делится такой круг точками A и B.

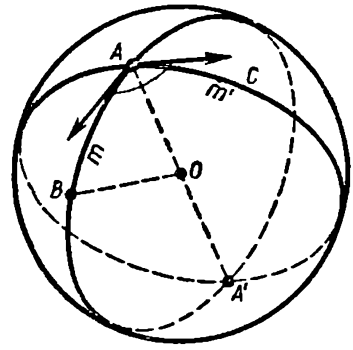


Рис. 3.

Сравнивая решения одной и той же задачи—нахождение кратчайшего расстояния между двумя точками на плоскости и на сфере, замечаем некоторую аналогию между прямыми на плоскости и большими кругами на сфере. Следует отметить, однако, что полной аналогии здесь нет потому, что на плоскости через любые две точки проходит единственная прямая, в то время как на сфере есть такие точки, через которые можно провести бесконечное множество больших кругов. Такими точками, очевидно, являются концы A и A' любого диаметра сферы (рис. 3), так как всякая плоскость, проходящая через диаметр сферы, пересекает сферу по большому кругу. Понятно, что каждый из этих кругов разделится точками A и A' пополам, и поэтому кратчайшее расстояние между этими точками будет равно πR, т. е. длине половины большого круга.

В том случае, когда данные на сфере точки A и B не являются концами одного диаметра сферы (рис 3), через них проходит только один большой круг. Такой круг разделится точками A и B на две неравные дуги,

меньшей из которых определяет кратчайшее расстоя
на сфере между точками A и B. Если центральный уг
AOB, соответствующий меньшей дуге, равен a радиа
то искомое расстояние будет равно aR единицам.

Упражнения.

1. Найти длину дуги большого круга земного шара, кото
соответствует центральный угол $\varphi = 42°55'$. Радиус земного ш
$R = 6370$ *км*.

2. Длина дуги большого круга земного шара $l = 10\,000$ *км*
велик соответствующий ей центральный угол?

§ 2. Сферический двуугольник

Несоблюдение полной аналогии между прямыми
плоскости и большими кругами на сфере проявляется
в том, что всякие два больших круга пересекаются
сфере в двух точках и ограничивают часть поверхнос
сферы, в то время как на плоскости для ограничени
какой-либо части ее необходимо по крайней мере т
прямых, так как две прямые могут иметь только од
общую точку.

Возьмем на сфере какие-нибудь два больших круга
m' (рис. 3). Плоскости этих кругов пересекаются
прямой, проходящей через центр сферы, поэтому са
круги пересекутся в концах диаметра сферы AA' и ра
делятся точками A и A' на полуокружности. Эти пол
окружности образуют четыре замкнутые фигуры, назы
ваемые сферическими двуугольниками.

Таким образом, сферическим двуугольником
называется часть сферы, ограниченная двумя полуо
ружностями больших кругов. Полуокружности, образую
щие сферический двуугольник, называют его сторонам
а точки их пересечения — вершинами двуугольника. З
писывают двуугольник обычно четырьмя буквами,
которых две соответствуют вершинам двуугольника,
две другие — точкам, лежащим на сторонах двуугол
ника. Так, например, на рисунке 3 мы видим сферич
ский двуугольник $ABA'C$ с вершинами A и A' и сторо
нами ABA' и ACA'.

Название «двуугольник» следует из того, что сторо
сферического двуугольника, пересекаясь в точках A и
образуют два угла BAC и $BA'C$. Эти углы в отличие
плоских углов называют сферическими.

Измеряется сферический угол BAC (рис. 3) плоским углом, образованным касательными, проведенными к его сторонам в вершине угла A. Так как такие касательные перпендикулярны к диаметру AA' и одна из них лежит в плоскости полуокружности ABA', а другая в плоскости полуокружности ACA', то угол между касательными будет линейным углом двугранного угла с ребром AA' и гранями ABA' и ACA'. Поэтому говорят иногда, что сферический угол измеряется линейным углом двугранного угла между полуплоскостями, в которых лежат стороны сферического угла.

Понятно, что углы в сферическом двуугольнике равны, так как каждый из них измеряется линейным углом одного и того же двугранного угла.

Все двуугольники, принадлежащие одной сфере, имеют равные стороны (полуокружности больших кругов) и, следовательно, могут отличаться друг от друга только углами и положением. Поэтому любые два двуугольника с равными углами, расположенные на одной сфере, являются конгруентными и могут быть совмещены вращением вокруг центра сферы.

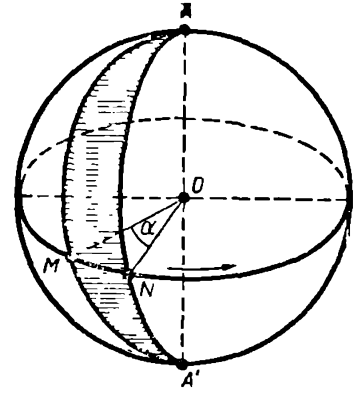


Рис. 4.

Выведем формулу для вычисления площади сферического двуугольника.

Пусть на сфере с центром O и радиусом R (рис. 4) дан какой-либо двуугольник с вершинами A и A' и углом α (на рисунке он заштрихован).

Проведем через центр сферы плоскость, перпендикулярную диаметру AA'; она пересечет сферу по большому кругу. Обозначим точки встречи этого круга со стороны двуугольника через M и N и соединим их с центром сферы радиусами, получим угол $MON = \alpha$, которым измеряются углы A и A' данного двуугольника.

Представим себе теперь, что одна из сторон данного двуугольника, например AMA', неподвижна, а вторая сторона ANA' вращается вокруг диаметра AA' в направ-

лении, указанном стрелкой, до совпадения с первой стороной. Понятно, что угол α и площадь двуугольника при этом будут увеличиваться, и, когда сторона AV_1 совпадает с AMA', угол α станет равным 2π радианам, двуугольник выродится в сферу и его площадь станет равной площади сферы. Приняв во внимание, что с увеличением угла α в несколько раз площадь двуугольника возрастает во столько же раз, можно записать пропорцию

$$\frac{\text{пл. } (AMA'N)}{\text{пл. сферы}} = \frac{\alpha}{2\pi},$$

откуда

$$\text{пл. } (AMA'N) = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi R^2 = 2R^2\alpha,$$

т. е.

$$\text{пл. } (AMA'N) = 2R^2\alpha,$$

где α — величина угла сферического двуугольника в радианах.

Упражнения.

1. Найти площадь сферического двуугольника с углом $A = 28°37'$ на сфере радиуса $R = 7{,}500$ *м*.

2. Найти площадь сферического двуугольника, сторонами которого служат дуги меридианов земного шара, проходящих через города Стокгольм и Рим. Географические координаты Стокгольма: широта $\varphi_1 = 59°21'$, долгота $\lambda_1 = 18°03'$; Рима: широта $\varphi_2 = 41°54'$, долгота $\lambda_2 = 12°28'$.

§ 3. Сферический треугольник

Возьмем на сфере три точки A, B и C так, чтобы они не принадлежали одному большому кругу и чтобы никакие две из них не были концами одного диаметра (рис. 5, *а*); соединим эти точки попарно кратчайшими дугами AB, BC и AC (т. е. дугами больших кругов, проходящих через эти точки); образовалась фигура из точек A, B, C и дуг AB, BC и AC, которую называют сферическим треугольником. На рисунке 5, *б* изображена только часть сферы с центром O и сферический треугольник ABC на ней. Точки A, B и C называют вершинами сферического треугольника ABC, а дуги AB, BC и AC — его сторонами[1]. Каждые две стороны в сфери

[1] В этой книге мы будем рассматривать только такие сферические треугольники, у которых стороны меньше половины большого круга.

ческом треугольнике образуют сферический угол с вершиной в точке их пересечения. Таким образом, треугольник ABC имеет три сферических угла BAC, CBA и ACB с вершинами соответственно A, B и C.

Соединим центр сферы O с вершинами сферического треугольника ABC радиусами OA, OB и OC, получим трехгранный угол $OABC$. Очевидно, таким путем каждому сферическому треугольнику можно поставить в соответствие вполне определенный и единственный трехгранный угол с вершиной O. Это обстоятельство можно использовать для раскрытия зависимостей между сторонами и углами в сферических треугольниках.

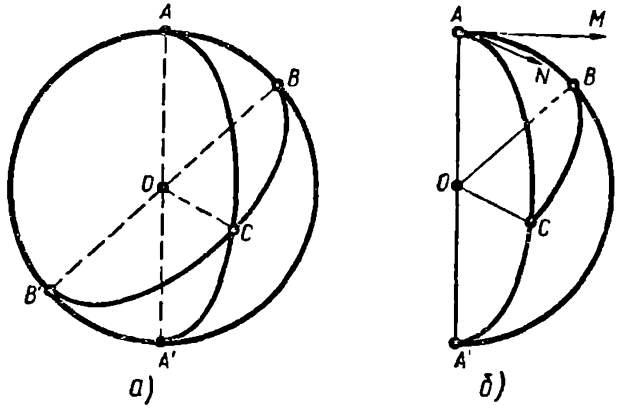


Рис. 5.

В самом деле, рассмотрим трехгранный угол $OABC$, соответствующий сферическому треугольнику ABC. Его плоские углы AOB, BOC и COA являются центральными и стягиваются дугами AB, BC и CA, поэтому с этими дугами они измеряются одним и тем же числом градусов (или радиан). Таким образом, если условиться величины сторон сферического треугольника выражать в градусах или радианах (а в сферической геометрии так и поступают!), то можно сказать, что каждый из плоских углов трехгранного угла $OABC$ измеряется одним и тем же числом градусов (или радиан) с соответствующей ему стороной сферического треугольника ABC. Это обстоятельство позволяет перенести известные свойства плоских углов в трехгранном угле на стороны сферического треугольника. Так, например, мы знаем, что в трехгранном угле любой плоский угол меньше суммы двух дру-

гих углов, а сумма всех плоских углов меньше 36
следовательно, в сферическом треугольнике любая ст
рона меньше суммы двух других сторон, а сумма вс
сторон меньше 360°. Величины сторон сферическо
треугольника ABC по аналогии с плоским треугольник
обозначают буквами a, b и c, поэтому отмеченные на
свойства сторон треугольника запишутся так:

$$a < b + c, \quad b < c + a, \quad c < a + b,$$

$$a + b + c < 360^\circ \quad \text{или} \quad a + b + c < 2\pi^1.$$

Величины углов сферического треугольника ABC об
значают обычно буквами A, B и C. Измеряются уг
сферического треугольника одним и тем же числом гр
дусов или радиан с соответствующими двугранными у
лами трехгранного угла $OABC$.

В самом деле, рассмотрим, например, сферическ
угол BAC с вершиной A (рис. 5, *б*); он измеряется угл
MAN между касательными AM и AN, проведенн
ми к дугам BA и CA в точке A (см. § 2). А так к
касательные перпендикулярны радиусу OA и леж
в плоскостях граней AOB и AOC двугранного угла
ребром OA, то угол MAN является линейным углом этог
двугранного угла.

В следующем параграфе будет показано, что сумм
углов в сферическом треугольнике не является констан
той; она зависит от площади треугольника и всег
больше 180°, но меньше 540°. Последнее следует из то
го, что углы сферического треугольника измеряются
двугранными углами соответствующего ему трехгранно
угла, а в трехгранном угле каждый из двугранных у
лов меньше 180° и поэтому их сумма меньше 540°.

В заключение остановимся на понятиях смежно
и симметричного сферических треугольников, с которы
нам придется далее встречаться.

Известно, что любые два больших круга пересекаю
ся в диаметрально противоположных точках, образ
при этом 4 двуугольника (§ 2). Следовательно, кажд
две стороны сферического треугольника, исходящие

[1] В данном нами определении сферического треугольника каж
из сторон треугольника меньше 180°. Если такое ограничение не
лать то указанное свойство сторон треугольника может и не вы
няться.

одной вершины, при продолжении вновь встречаются в диаметрально противоположной точке и образуют при этом двуугольник и новый сферический треугольник, который имеет общую сторону с данным сферическим треугольником и поэтому называется смежным с ним. Так, на рисунке 5 продолжены стороны AB и AC треугольника ABC; в точке A', диаметрально противоположной вершине A, эти стороны встретились и образовали двуугольник $ABA'C$ и сферический треугольник $A'BC$, смежный с данным треугольником ABC и имеющий с ним общую сторону BC. Понятно, что необщие стороны у данного треугольника и смежного с ним, расположенные на одном большом круге, дополняют друг друга до $180°$. Смежные углы при общей стороне также дополняют друг друга до $180°$, а противоположные углы с вершинами A и A' являются равными как углы двуугольника (§ 2).

Если продолжить все стороны сферического треугольника ABC, то они попарно встретятся вновь в точках A', B' и C', диаметрально противоположных вершинам A, B и C (рис. 6), а дуги больших кругов, соединяющие эти точки, образуют новый сферический треугольник $A'B'C'$, который называется симметричным с треугольником ABC. Понятно, что в сферических треугольниках ABC и $A'B'C'$ имеет место равенство соответствующих сторон и углов, т. е. $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$, $A' = A$, $B' = B$ и $C' = C$. Очевидно, равны также и площади этих треугольников, хотя совмещение самих треугольников невозможно, так как они имеют противоположную ориентацию.

Упражнения.

1. Возможен ли сферический треугольник со сторонами $a = 90°$, $b = 170°$ и $c = 80°$?

2. Известны две стороны сферического треугольника: $a = 150°$ и $b = 120°$; что можно сказать о величине его третьей стороны?

§ 4. Площадь и сумма углов сферического треугольника

1. Площадь сферического треугольника ABC, расположенного на сфере радиуса R, определяется формулой

$$S = R^2(A + B + C - \pi),$$

где A, B и C — углы треугольника, выраженные в р дианах.

Для доказательства этой теоремы изобразим сфе так, чтобы большой круг, на котором лежит одна сторон данного треугольника, например AB, был расп ложен в плоскости чертежа (рис. 6).

Описав два других больших круга, на которых леж стороны BC и CA данного треугольника, получим симме ричный треугольник $A'B'C'$, имеющий одинаковую пл щадь с данным треугольником (§ 3), и двуугольни $ABA'C$, $BAB'C$ и $CA'C'B'$, пл щади которых выражаются и вестными формулами (§ 2):

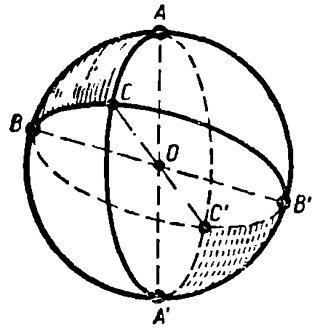


Рис. 6.

$$\text{пл. } ABA'C = 2R^2 \cdot A,$$
$$\text{пл. } BAB'C = 2R^2 \cdot B,$$
$$\text{пл. } CA'C'B' = 2R^2 \cdot C,$$

где A, B и C — величины угло данного треугольника в радианах (углы C' и C в двуугольнике $CA'C'B'$ равны углу ACB данного треугольника). Кроме того, и чертежа видно что площадь по лусферы, расположенной над плоскостью чертежа, может быть выражена следующим образом:

$$\text{пл. полусферы} = \text{пл. } ABA'C + (\text{пл } BAB'C - \text{пл. } ABC) +$$
$$+ (\text{пл. } CA'C'B' - \text{пл. } A'B'C').$$

Принимая во внимание предыдущие выводы и теорему о площади полусферы, перепишем это равенство так:

$$2\pi R^2 = 2R^2 \cdot A + (2R^2 \cdot B - \text{пл. } ABC) + (2R^2 \cdot C - \text{пл. } A'B'C')$$

обозначив через S искомую пл. ABC и равную ей пл. $A'B'C'$ и выполнив соответствующие преобразования, получим:

$$S = R^2(A + B + C - \pi).$$

2. Используя эту формулу, легко доказать теорему о сумме углов сферического треугольника: *сумма углов любого сферического треугольника больше π радиан и, следовательно, в градусной мере больше 180°.*

Действительно, из формулы площади сферического треугольника получаем:

$$A + B + C - \pi = \frac{S}{R^2}.$$

Но правая часть этого равенства больше нуля, так как S и R^2 — положительные числа, следовательно,

$$A + B + C - \pi > 0.$$

откуда

$$A + B + C > \pi$$

или в градусной мере

$$A + B + C > 180^\circ.$$

Величина, на которую сумма углов сферического треугольника превосходит сумму углов всякого плоского треугольника, называется сферическим избытком и обозначается через ε. Положив в формуле площади треугольника $A + B + C - \pi = \varepsilon$, получаем:

$$S = R^2\varepsilon,$$

т. е. площадь сферического треугольника пропорциональна его сферическому избытку. Из этого равенства видно, что на сфере радиуса R величина $\varepsilon = \frac{S}{R^2}$, т. е. сферический избыток — величина переменная, зависящая от площади треугольника: чем больше площадь сферического треугольника на данной сфере, тем больше его сферический избыток и, следовательно, тем больше сумма его углов.

В предыдущем параграфе было установлено, что сумма углов сферического треугольника меньше 540° или в радианной мере меньше 3π. К такому выводу можно прийти также из соотношения

$$S = R^2\varepsilon,$$

если принять во внимание, что площадь всякого сферического треугольника меньше площади полусферы, т. е.

$$S < 2\pi R^2.$$

Действительно, по транзитивности получаем:

$$R^2\varepsilon < 2\pi R^2,$$

откуда

$$\varepsilon < 2\pi,$$

т. е.

$$A + B + C - \pi < 2\pi,$$

и, следовательно,

$$A + B + C < 3\pi.$$

Итак, сумма углов всякого сферического треугольни ка удовлетворяет неравенству

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ$$

или в радианах

$$\pi < A + B + C < 3\pi.$$

Упражнения.

1. Возможен ли такой равносторонний сферический треугольник, у которого углы равны 60°?

2. Возможен ли правильный сферический четырехугольник с прямыми углами?

3. Углы сферического треугольника равны 45°, 60° и 135°. Найти его сферический избыток.

4. В сферическом треугольнике ABC угол $A = 78^\circ$, угол $B = 90^\circ$; что можно сказать о величине его третьего угла?

5. Углы сферического треугольника на сфере радиуса $R = 7{,}500$ *м* равны: $A = 87^\circ 45'$, $B = 120^\circ 24'$ и $C = 98^\circ 54'$. Как велика площадь треугольника?

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ, ВЫРАЖАЮЩИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 5. Понятие о решении сферического треугольника

Сферический треугольник играет на сфере такую же роль, как обычный треугольник на плоскости. Изучение различных геометрических фигур на плоскости сводилось обычно к рассмотрению и решению некоторых треугольников, связанных с данными фигурами; на сфере также при выяснении различных свойств сферических фигур и решении задач с успехом используются сферические треугольники. Объясняется это главным образом тем, что стороны и углы сферического треугольника, так же как и плоского, связаны между собой известными зависимостями, раскрывающимися с помощью круговых функций[1].

Каждая из формул, выражающих такие зависимости, содержит 4 основных элемента сферического треугольника; зная 3 из этих элементов, можно вычислением найти четвертый,— в этом и заключается процесс решения сферического треугольника.

Существенное отличие сферического треугольника от плоского состоит в том, что он определяется любыми тремя основными элементами, и в частности тремя углами A, B и C, тогда как для определения плоского треугольника надо иметь среди данных по крайней мере один линейный элемент. Объясняется это тем, что углы всякого плоского треугольника связаны зависимостью:

[1] Круговыми функциями мы называем тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс и котангенс.

$A + B + C = \pi$, и поэтому, зная два угла, можно найти третий. В сферическом треугольнике все три угла независимы между собой, и, зная их, можно построить сам треугольник[1].

Действительно, если даны углы сферического треугольника A, B и C, то известны и двугранные углы трехгранного угла $OABC$, соответствующего искомому треугольнику, так как они измеряются теми же числами (§ 3). Но трехгранный угол вполне определяется своими двугранными углами и может быть построен, а в пересечении его граней со сферой получится искомый сферический треугольник ABC.

Нетрудно заранее подсчитать, сколько формул, выражающих зависимость между основными элементами, употребляется при решении сферических треугольников. Так как в каждую формулу входит 4 элемента из шести (a, b, c, A, B, C), то число таких формул будет равно числу сочетаний из шести элементов по четыре, а именно: $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$.

Все эти формулы обычно разбивают на четыре группы:

к I группе относят формулы, содержащие три стороны и один угол: ($abcA$), ($abcB$) и ($abcC$);

ко II группе относят формулы, содержащие две стороны и противолежащие им углы: ($abAB$), ($acAC$) и ($bcBC$);

III группа охватывает формулы, содержащие две стороны, угол между ними и один из других углов: ($abCA$), ($acBA$), ($bcAB$), ($abCB$), ($acBC$) и ($bcAC$);

в IV группу входят формулы, содержащие по три угла и одной стороне: ($ABCa$), ($ABCb$) и ($ABCc$).

Из всех перечисленных формул только три являются независимыми, остальные 12 выводятся из них как следствия.

Раздел математики, в котором дается вывод этих формул и применение их для решения сферических треугольников называется сферической тригонометрией.

---

[1] Понятно, что на сферах с неравными радиусами получатся неравные треугольники.

§ 6. Формулы I группы, выражающие зависимость в сферическом треугольнике между тремя сторонами и одним углом

Пусть ABC — сферический треугольник (рис. 7), у которого две стороны b и c меньше 90°, а третья сторона a может быть меньше, равна или больше 90°.

Соединим вершины этого треугольника с центром сферы O радиусами AO, BO и CO; затем проведем к дугам AB и AC в точке A касательные, которые встретят продолжения радиусов OB и OC в точках M и N; эти точки соединим отрезком MN.

По теореме косинусов, примененной сперва к плоскому треугольнику AMN, а затем к плоскому треугольнику OMN, имеем:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \sphericalangle MAN,$$

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos \sphericalangle MON,$$

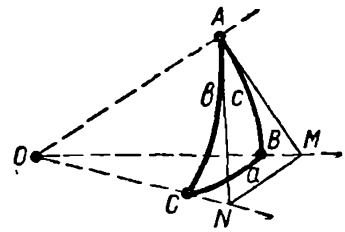


Рис. 7.

откуда

$$AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \sphericalangle MAN = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos \sphericalangle MON$$

или

$$2OM \cdot ON \cdot \cos \sphericalangle MON = OM^2 - AM^2 + ON^2 - AN^2 + 2AN \cdot AM \cdot \cos \sphericalangle MAN.$$

Но треугольники OAM и OAN прямоугольные, так как касательные AM и AN перпендикулярны радиусу OA, следовательно, по теореме Пифагора

$$OM^2 - AM^2 = OA^2, \quad ON^2 - AN^2 = OA^2;$$

кроме того, угол $MAN = A$ и угол $MON = a$, поэтому предыдущее равенство перепишется так:

$$2OM \cdot ON \cdot \cos a = 2OA^2 + 2AN \cdot AM \cdot \cos A,$$

или, после деления обеих частей на $2OM \cdot ON$,

$$\cos a = \frac{OA}{ON} \cdot \frac{OA}{OM} + \frac{AN}{ON} \cdot \frac{AM}{OM} \cdot \cos A.$$

А так как по определению круговых функций острого угла в прямоугольных треугольниках

$$\frac{OA}{ON} = \cos b, \quad \frac{OA}{OM} = \cos c, \quad \frac{AN}{ON} = \sin b \text{ и } \frac{AM}{OM} = \sin c,$$

то окончательно получаем:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (1abcA)$$

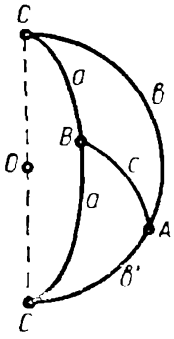


Рис 8.

Покажем, что выведенная формула справедлива и в том случае, когда какая-либо из сторон b и c больше 90° или обе они больше 90°.

Предположим сначала, что $b > 90°$ а $c < 90°$ (рис. 8). Продолжим стороны b и a до взаимного их пересечения в точке C', получим двуугольник $CAC'B$ и смежный сферический треугольник ABC', в котором $b' = AC' = 180° - b < 90°, c < 90°$, а сторона $a' = BC' = 180° - a$ может быть меньше, равна или больше 90°.

Как видим, для треугольника ABC' применима выведенная формула $(1\,abcA)$, поэтому можно написать:

$$\cos a' = \cos b' \cos c + \sin b' \sin c \cos \sphericalangle BAC';$$

но
$$\cos a' = \cos(180° - a) = -\cos a$$
$$\cos b' = \cos(180° - b) = -\cos b,$$
$$\sin b' = \sin(180° - b) = \sin b,$$
$$\cos BAC' = \cos(180° - A) = -\cos A.$$

Следовательно, последняя формула перепишется так:

$$-\cos a = -\cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A,$$

или

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

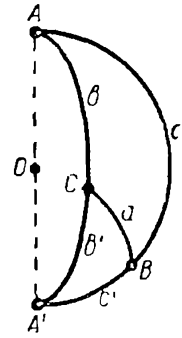


Рис 9.

Теперь предположим, что в треугольнике ABC и $b > 90°$ и $c > 90°$ (рис. 9), а на сторону a по-прежнему ограничений не накладывается. Продолжим стороны b и c до взаимного их пересечения в точке A', получим смежный сферический треугольник BCA', в котором сторона $c' = 180° - c < 90°$ и сторона $b' = 180° - b < 90°$, а пото-

му для этого треугольника справедлива выведенная нами ранее формула ($I\,abcA$), по которой можно написать:

$$\cos a = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Но угол $A' = A$, $\cos b' = -\cos b$, $\cos c' = -\cos c$, $\sin b' = \sin b$ и $\sin c' = \sin c$, следовательно, и в этом случае получаем

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Итак, формула ($I\,abcA$) справедлива для всех сферических треугольников, стороны которых имеют любые значения в пределах от 0 до 180°.

Понятно, что таким же образом можно получить формулы для $\cos b$ и $\cos c$, а именно:

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B; \qquad (I\,bcaB)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \qquad (I\,cabC)$$

Эти формулы называют обычно формулами косинусов сторон и читают так:

Косинус стороны сферического треугольника равен произведению косинусов двух других сторон, сложенному с произведением синусов тех же сторон на косинус угла, заключенного между ними.

Приведем еще одно краткое доказательство этой теоремы, в котором используются некоторые сведения из теории проекций.

Пусть на сфере радиуса $R = 1$ дан произвольный сферический треугольник ABC с углами A, B, C и сторонами a, b и c (рис. 10). Построим соответствующий ему трехгранный угол $OABC$, затем из вершины C данного треугольника опустим перпендикуляры CM, CN и CD соответственно на ребра OA, OB и плоскость грани AOB трехгранного угла. Соединив отрезками точку D с точками M и N, получим четы-

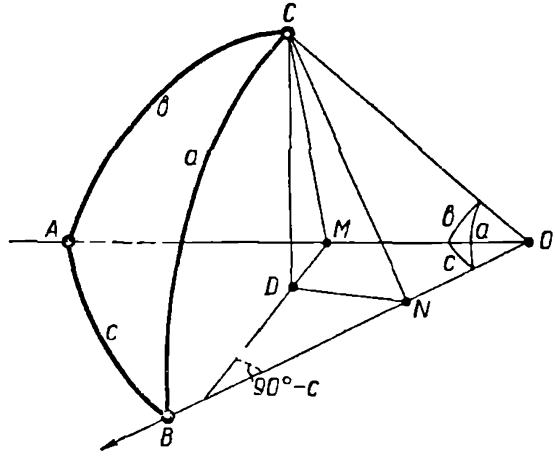


Рис 10.

рехугольник $OMDN$ с углом $MON = c$ и прямоугольные треугольники: CMO с углом b, CNO с углом a, CDM с углом CMD и CDN с углом $CND = B$.

Теперь спроектируем ломаную $OMDN$ на ось OBl (см. рис. 1

Так как отрезок $\overline{ON}$ замыкает эту ломаную, то по правилу сложения направленных отрезков имеем:

$$\overline{OM} + \overline{MD} + \overline{DN} = \overline{ON}$$

и по теореме о проекции ломаной получим:

$$\text{пр}_l\ \overline{OM} + \text{пр}_l\ \overline{MD} + \text{пр}_l\ \overline{DN} = \text{пр}_l\ \overline{ON}.$$

Но $\text{пр}_l\ \overline{OM} = OM \cdot \cos c$, $\text{пр}_l\ \overline{MD} = MD \cdot \cos(90^\circ - c) = MD \cdot \sin c$, $\text{пр}_l\ \overline{DN} = DN \cdot \cos 90^\circ = 0$ и $\text{пр}_l\ \overline{ON} = ON$, следовательно,

$$OM \cdot \cos c + MD \cdot \sin c = ON.$$

Используя соответствующие прямоугольные треугольники, находим отрезки OM, MD и ON:

$$OM = OC \cdot \cos b = \cos b \quad (\text{так как } OC = R = 1),$$

$$MD = MC \cdot \cos A = OC \cdot \sin b \cdot \cos A = \sin b \cos A,$$

$$ON = OC \cdot \cos a = \cos a.$$

Подставив значения отрезков в предыдущее равенство, получ уже известную нам формулу:

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \cos a,$$

§ 7. Приложение формул I группы в геометрии и геодезии

Задача 1. Найти кратчайшее расстояние между двумя пунктами A и B на земной поверхности, зная широты и долготы этих пунктов, т. е. их географические координаты: $A(\lambda_1 \varphi_1)$ и $B(\lambda_2 \varphi_2)$.

Пусть, например, требуется определить расстояние между Веной и Бомбеем. По справочнику находим географические координаты этих городов: для Вены широта $\varphi_1 = 48^\circ 13'$, долгота $\lambda_1 = 3^\circ 48'$; для Бомбея широта $\varphi_2 = 18^\circ 54'$, долгота $\lambda_2 = 72^\circ 50'$.

Земную поверхность считаем сферой с радиусом $R = 6367$ *км*

На рисунке 11 изображен земной шар с северным полюсом C и южным — C'. Города Вена и Бомбей обозначены точками A и B. Меридианы CAC' и CBC', проходящие через эти города, пересекают экватор в точках M_1 и M_2, а меридиан Гринвич, проходящий через Лондон, пересекает экватор в точке L.

Долгота пункта измеряется углом между меридианом Гринвич и меридианом, проходящим через этот пункт, следовательно, в сферическом треугольнике ABC угол $C = LM_2 - LM_1 = \lambda_2 - \lambda_1 = 69°2'$.

Широта пункта A равна углу AOM_1, который образует радиус OA с плоскостью экватора: этот угол измеряется по меридиану дугой M_1A. Аналогично широта пункта B измеряется дугой M_2B.

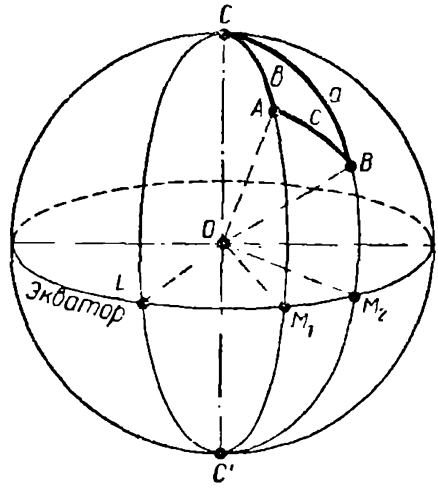


Рис. 11.

Зная широты этих пунктов φ_1 и φ_2, можно найти стороны AC и BC в сферическом треугольнике ABC:

$$AC = M_1C - M_1A = 90° - \varphi_1,$$

$$BC = M_2C - M_2B = 90° - \varphi_2.$$

Обозначив стороны треугольника ABC через a, b и c, запишем формулу (I $abcC$) для косинуса искомой стороны $AB = c$:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

т. е.

$$\cos c = \cos(90° - \varphi_1)\cos(90° - \varphi_2) +$$

$$+ \sin(90° - \varphi_1)\sin(90° - \varphi_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

или

$$\cos c = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Обозначим: $\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = s_1$, $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) = s_2$

и переходим к вычислениям:

$$\begin{aligned}
\lg \sin \varphi_1 &= \lg \sin 48^\circ 13' = \bar{1},8725\\
\lg \sin \varphi_2 &= \lg \sin 18^\circ 54' = \bar{1},5104\\
\hline
\lg s_1 &= \bar{1},3829\\
s_1 &= 0,2415\\
\hline
\lg \cos \varphi_1 &= \lg \cos 48^\circ 13' = \bar{1},8237\\
\lg \cos \varphi_2 &= \lg \cos 18^\circ 54' = \bar{1},9759\\
\lg \cos (\lambda_2 - \lambda_1) &= \lg \cos 69^\circ 02' = \bar{1},5536\\
\hline
\lg s_2 &= \bar{1},3532\\
s_2 &= 0,2255\\
s_1 &= 0,2415\\
\hline
\cos c &= s_1 + s_2 = 0,4670\\
c &= 62^\circ 10'
\end{aligned}$$

В радианах $c = 1,085$; в километрах $c = 1,085 \cdot R = 1,085 \cdot 6367 \approx 6910$ (*км*).

Задача 2. Наблюдатель, находящийся в пункте O (рис. 12), измерил углы, составляемые вертикальной линией OO_1 с лучами зрения OP и OQ, направленными к двум неподвижным точкам P и Q, а также определил угол POQ, составленный этими лучами зрения; требуется найти угол $P_1O_1Q_1$, представляющий проекцию угла POQ на горизонтальную плоскость.

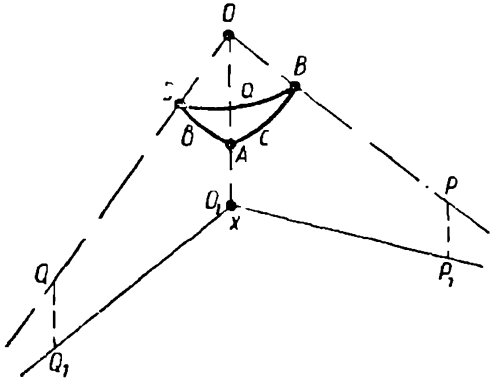


Рис. 12.

Решение. Представим себе шаровую поверхность, описанную радиусом $R = 1$ из точки O как из центра; эта поверхность пересечется гранями трехгранного угла $OPQO_1$ по дугам, составляющим сферический треугольник ABC, стороны которого a, b и c будут такими же по величине, как и углы, измеренные наблюдателем; что касается искомого угла $P_1O_1Q_1$, то он будет равен углу A этого сферического треугольника. Таким образом,

для решения задачи необходимо выразить угол A через известные стороны a, b и c сферического треугольника ABC. С этой целью воспользуемся формулой ($I\,abcA$)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

откуда

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Для получения более удобной для логарифмирования формулы находим:

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

или

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2 \sin \frac{a + b - c}{2} \sin \frac{a - b + c}{2}}{\sin b \sin c},$$

откуда

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{a + b - c}{2} \sin \frac{a - b + c}{2}}{\sin b \sin c}}.$$

Пусть измерения дали следующие результаты: $a \approx 73^\circ 10'$, $b \approx 61^\circ 30'$ и $c \approx 65^\circ 20'$, тогда будем иметь:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin 34^\circ 40' \sin 38^\circ 30'}{\sin 61^\circ 30' \sin 65^\circ 20'}}.$$

Логарифмируем:

$$\begin{array}{r} \lg \sin 34^\circ 40' = \bar{1},7549 \\ \lg \sin 38^\circ 30' = \bar{1},7941 \\ \hline \bar{1},5490 \\ \hline \lg \sin 61^\circ 30' = \bar{1},9439 \\ \lg \sin 65^\circ 20' = \bar{1},9584 \\ \hline \bar{1},9023 \\ \hline \lg \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \cdot \bar{1},6467 = \bar{1},8234 \end{array}$$

$$\frac{A}{2} = 41^\circ 45',$$

$$A \approx 83^\circ 30'.$$

Задача 3. Найти двугранные углы трехгранного угла, зная его плоские углы α, β и γ.

Решение Как и в предыдущей задаче, обозначим через O вершину данного трехгранного угла и мысленно опишем шаровую поверхность с центром в точке O радиусом $R = 1$ В пересечении этой поверхности с гранями трехгранного угла получится сферический треугольник ABC (рис. 13), у которого стороны a, b и c будут равны соответственно α, β и γ.

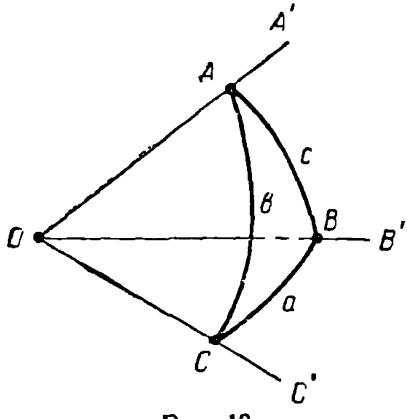


Рис. 13.

По формуле ($1\ abcA$) в треугольнике ABC имеем:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

откуда

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Аналогично, используя формулы ($1\ bcaB$) и ($1\ cabC$), находим:

$$\cos B = \frac{\cos \beta - \cos \gamma \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha},$$

$$\cos C = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Если даны числовые значения α, β и γ, то легко найти с помощью таблиц углы треугольника A, B и C, равные соответствующим двугранным углам данного трехгранного угла. Покажем это на конкретных примерах.

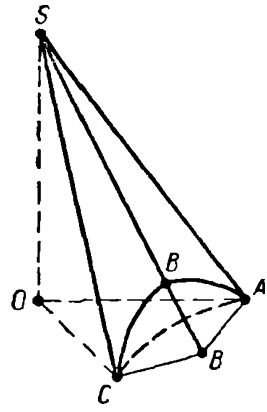


Рис. 14.

Пример 1. Определить угол между смежными боковыми гранями правильной n-угольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен $20°\,00'$. Вычисление провести при $n = 8$.

Решение. На рисунке 14 изображена секция

данной пирамиды, содержащая две смежные боковые грани SBA и SBC, образующие с плоскостью основания пирамиды трехгранный угол с вершиной B. Плоские углы этого трехгранного угла известны:

$$\measuredangle ABC = \frac{180^\circ \cdot n - 360^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \alpha$$

$$\measuredangle SBA = \measuredangle SBC = \frac{180^\circ - 20^\circ\,00'}{2} = 80^\circ\,00' = \beta = \gamma.$$

Искомый двугранный угол x с ребром SB находится между плоскими углами β и γ, следовательно, по первой из формул задачи 3 имеем:

$$\cos x = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\cos\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) - \cos^2 80^\circ\,00'}{\sin^2 80^\circ\,00'} =$$

$$= \frac{-\left(2\cos\frac{360^\circ}{n} + 2\cos^2 80^\circ\,00'\right)}{2\sin^2 80^\circ\,00'} =$$

$$= \frac{-\left(2\cos\frac{360^\circ}{n} + 1 + \cos 160^\circ\,00'\right)}{1 - \cos 160^\circ\,00'} =$$

$$= \frac{-\left(2\cos\frac{360^\circ}{n} + 1 - \cos 20^\circ\,00'\right)}{1 + \cos 20^\circ\,00'}.$$

При $n = 8$ получаем:

$$\cos x = \frac{-(2\cos 45^\circ + 1 - \cos 20^\circ\,00')}{1 + \cos 20^\circ\,00'} \approx$$

$$\approx \frac{-(2\cdot 0{,}7071 + 1 - 0{,}9397)}{1 + 0{,}9397} \approx \frac{-1{,}4745}{1{,}9397} \approx -0{,}7600;$$

откуда $180^\circ - x \approx 40^\circ\,32'$

$x \approx 139^\circ\,28'$.

Пример 2. Найти двугранные углы правильного додекаэдра.

Решение. При каждой вершине додекаэдра сходится по три грани, образующие трехгранные углы. У пра-

вильного додекаэдра гранями служат правильные пятиугольники, поэтому каждый из плоских углов при вершине трехгранного угла будет равен:

$$\frac{180^\circ \cdot 5 - 360^\circ}{5} = 108^\circ,$$

т. е. $\alpha = \beta = \gamma = 108^\circ$.

Понятно, что все двугранные углы будут также равными, следовательно, надо вычислить один из них По установленной выше формуле имеем:

$$\cos x = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\,(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha\; 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Подставляем значение $\alpha = 108^\circ$, получаем:

$$\cos x = \frac{\cos 108^\circ}{1+\cos 108^\circ} = \frac{-\cos 72^\circ}{1-\cos 72^\circ} \approx -\frac{0{,}3090}{0{,}6910} \approx -0{,}447;$$

отсюда $180^\circ - x \approx 63^\circ 30'$,
$x \approx 116^\circ 30'$.

Упражнения.

1. Найти кратчайшие расстояния по земному шару и по прямой линии между Берлином и Токио. Географические координаты Берлина: широта $\varphi_1 = 52^\circ 30'$, долгота $\lambda_1 = 13^\circ 24'$ и Токио: широта $\varphi_2 = 35^\circ 39'$, долгота $\lambda_2 = 139^\circ 45'$.

2. Сколько времени потребуется для перелета из Парижа в Пекин по кратчайшему направлению на самолете с рейсовой скоростью 810 *км/ч*? Географические координаты Парижа: широта $\varphi_1 = 48^\circ 50'$, долгота $\lambda_1 = 2^\circ 20'$; Пекина: широта $\varphi_2 = 39^\circ 54'$, долгота $\lambda_2 = 116^\circ 28'$.

3. Определить кратчайшее расстояние между Женевой и Нью-Йорком и время, за которое это расстояние можно преодолеть на самолете с крейсерской скоростью в 750 *км/ч*. Географические координаты Женевы: широта $\varphi_1 = 46^\circ 12'$, долгота $\lambda_1 = 6^\circ 09'$; Нью-Йорка: широта $\varphi_2 = 40^\circ 43'$, долгота $\lambda_2 = -74^\circ 00'$.

4. В 1937 году русский летчик Валерий Чкалов совершил впервые в истории перелет из Москвы в США через Северный полюс и произвел посадку близ города Портланда (45°30′ с. ш. и 122°30′ з. д.) Определить кратчайшее расстояние между этими пунктами по земному шару

5. Определить двугранные углы у правильного тетраэдра, правильного октаэдра и правильного икосаэдра.

6. Известно, что все плоские правильные треугольники имеют углы по 60°; в сферических же правильных треугольниках углы зависят от сторон. Выведите формулу, выражающую эту зависимость, и докажите (с помощью этой формулы) невозможность существования правильного сферического треугольника с углами по 60°.

7. Найти углы сферического треугольника ABC, зная его стороны $a = 69°34'$, $b = 57°49'$ и $c = 114°16'$.

8. Найти двугранные углы правильной n-угольной пирамиды, у которой при вершине плоский угол равен α. Провести вычисления углов при $n = 10$ и $\alpha = 24°$.

9. Определить число сторон основания правильной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 24°, а угол между смежными боковыми гранями равен 153°.

§ 8. Формулы II группы, выражающие зависимость в сферическом треугольнике между сторонами и противолежащими им углами

Из формулы (I $abc\,A$)

$$\cos a = \cos b\ \cos c + \sin b\ \sin c\ \cos A$$

находим:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\ \cos c}{\sin b\ \sin c},$$

откуда

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(\cos a - \cos b\ \cos c)^2}{\sin^2 b\ \sin^2 c} =$$

$$= \frac{\sin^2 b\ \sin^2 c - \cos^2 a + 2\cos a\ \cos b\ \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b\ \sin^2 c} =$$

$$= \frac{(1-\cos^2 b)\ (1-\cos^2 c) - \cos^2 a + 2\cos a \cos b\ \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\sin^2 b\ \sin^2 c} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\ \cos b\ \cos c}{\sin^2 b\ \sin^2 c}.$$

Разделим теперь обе части равенства на $\sin^2 a$, получим:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\ \cos b\ \cos c}{\sin^2 a\ \sin^2 b\ \sin^2 c};$$

после извлечения квадратного корня будем иметь:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\ \cos b\ \cos c}}{\sin a\ \sin b\ \sin c}.$$

Значение корня мы взяли со знаком плюс, так как углы и стороны сферического треугольника меньше 180° и поэтому их синусы положительны.

Выражение, стоящее в правой части полученного равенства, симметрично относительно элементов a, b и c и не меняет своей величины от их круговой перестановки, следовательно, точно такое же выражение мы получили бы из формул (I $bcaB$) и (I $cabC$) для отношений $\frac{\sin B}{\sin b}$ и $\frac{\sin C}{\sin c}$, а потому будем иметь:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = M, \qquad \text{(II)}$$

где

$$M = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Итак, *синусы сторон сферического треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов.* По аналогии с плоской тригонометрией это предложение называют теоремой синусов сферической тригонометрии.

Примечание. Теорему синусов можно доказать, не опираясь на формулы первой группы.

Действительно, вернемся еще раз к рисунку 10 (стр. 499), на котором изображены сферический треугольник ABC, соответствующий ему трехгранный угол и вспомогательные плоские прямоугольные треугольники CDM, CDN, CMO и CNO (см. описание построений в тексте § 6).

Из треугольников CDM и CDN имеем:

$$CD = CM \cdot \sin A,$$
$$CD = CN \cdot \sin B.$$

Но из треугольников CMO и CNO получаем:

$$CM = CO \cdot \sin b = \sin b \text{ (так как } CO = R = 1),$$
$$CN = CO \cdot \sin a = \sin a,$$

следовательно,

$$CD = \sin b \sin A,$$
$$CD = \sin a \sin B,$$

откуда

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B.$$

или

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}. \qquad \text{(II}abAB\text{)}$$

Аналогичным путем, выполнив соответствующие построения в сферическом треугольнике ABC для угла C, выводится формула

$$\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}. \qquad \text{(II}bcBC\text{)}$$

Теорема синусов сферической тригонометрии, так же как и формулы I группы, используется при решении многих задач. В качестве примера приведем решение следующей задачи из стереометрии:

Требуется определить объем наклонного параллелепипеда, если известны длины его ребер и углы, образуемые этими ребрами.

Пусть ребра параллелепипеда OL, OM и ON, исходящие из вершины O (рис. 15), соответственно равны l, m и n. *Из точки O как из центра радиусом $R = 1$ опишем шаровую поверхность.*

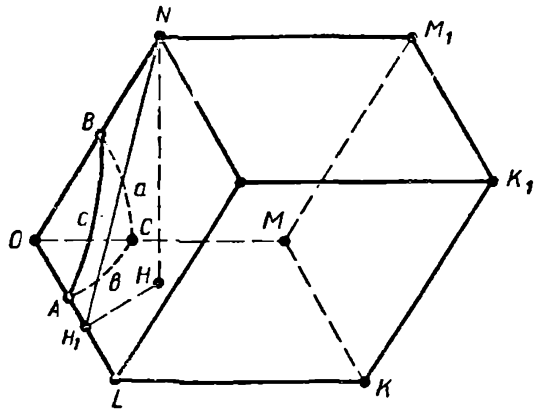


Рис. 15.

В пересечении этой поверхности с гранями трехгранного угла $OLMN$ образуется сферический треугольник ABC. Стороны a, b и c этого треугольника будут равны данным плоским углам трехгранного угла $OLMN$.

Пусть NH—высота параллелепипеда, тогда его объем V равен произведению площади основания $OLKM$ на высоту NH.

Площадь $OLKM = OL \cdot OM \cdot \sin LOM = lm \sin b$.

Для определения высоты NH опустим из вершины N перпендикуляр NH_1 на ребро OL и соединим H_1 с точкой H. В прямоугольном треугольнике NH_1H угол $NH_1H = A$ как линейный угол двугранного угла с ребром OL, поэтому $NH = NH_1 \cdot \sin A$; а так как NH_1 есть катет прямоугольного треугольника ONH_1, то $NH_1 = ON \cdot \sin \measuredangle NOH_1 = n \sin c$ и, следовательно, высота $NH = n \sin c \sin A$.

Таким образом, искомый объем выразится формул

$$V = lmn \sin b \sin c \sin A.$$

Остается подставить сюда значение $\sin A$ из фор лы (II) теоремы синусов:

$$\sin A = M \cdot \sin a = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos}}{\sin b \sin c}$$

тогда окончательно будем иметь:

$$V = lmn\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c} \quad (куб.\ ед$$

По этой формуле можно находить объем всякого п раллелепипеда. В частности, если параллелепипед пря угольный, то $a = b = c = 90°$ и тогда формула прин мает вид:

$$V = lmn \quad (куб.\ ед.).$$

Упражнения.

1. Даны две стороны сферического треугольника $a = 120°31$ $b = 76°44'$ и угол между ними $C = 108°12'$; найти другие его ос ные элементы: c, A и B.

2. Три пункта A, B и C на земном шаре являются вершина некоторого сферического треугольника. Найти площадь этого тр угольника для случая, когда пунктом C является Северный пол земного шара, а пункты A и B имеют соответственно широты φ_1 $= 48°50'$ $\varphi_2 = 45°30'$ и долготы $\lambda_1 = -0°15'$ и $\lambda_2 = 2°20'$.

3. В трехгранном угле известны два плоских угла $\alpha = 48°13'$ $\beta = 37°31'$ и заключенный между ними двугранный угол $\varphi = 55°0$ найти третий его плоский угол и неизвестные двугранные углы.

§ 9. Формулы III группы, выражающие зависимость в сферическом треугольнике между двумя сторонами, углом между ними и углом, лежащим против одной из этих сторон

Предварительно выведем вспомогательные формул содержащие по пяти элементов треугольника, а зате используя теорему синусов (II), перейдем от них к фо мулам третьей группы.

Запишем известные нам формулы (I $abcA$) и (I $bcaB$)

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B.$$

Подставим во вторую формулу значение $\cos a$ из первой формулы, получим:

$$\cos b = \cos b \cos^2 c + \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin a \sin c \cos B,$$

откуда имеем:

$$\cos b (1 - \cos^2 c) = \sin b \sin c \cos c \cos A + \sin a \sin c \cos B.$$

Но $1 - \cos^2 c = \sin^2 c$, поэтому, сокращая на $\sin c$, получаем:

$$\cos b \sin c = \sin b \cos c \cos A + \sin a \cos B,$$

откуда

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A. \quad (acb\ BA)$$

Это и есть вспомогательная формула, связывающая пять элементов сферического треугольника (три стороны и два угла); ее называют формулой синуса стороны на косинус прилежащего угла. Таких формул, очевидно, будет шесть, так как к каждой стороне прилежит по два угла. Так, относительно стороны a можно записать еще одну формулу:

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A. \quad (abc\ CA)$$

да относительно сторон b и c будет по две такие формулы:

$$\sin b \cos A = \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B \quad (bca\ AB)$$

$$\sin b \cos C = \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B; \quad (bac\ CB)$$

$$\sin c \cos A = \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C; \quad (cba\ AC)$$

$$\sin c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C \quad (cab\ BC)$$

Возьмем теперь одну из этих формул, например

$$\sin b \cos A = \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B. \quad (bca\ AB)$$

и исключим из нее элемент b (сторону, лежащую против угла B), выразив $\sin b$ по теореме синусов (II):

$$\frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin a}, \text{ откуда } \sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A},$$

получаем:

$$\sin a \sin B \operatorname{ctg} A = \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B,$$

или

$$\sin B \operatorname{ctg} A = \sin c \operatorname{ctg} a - \cos c \cos B. \quad (III\ caBA)$$

Это и есть одна из формул III группы, содержащая две стороны a, c, угол между ними B и угол A, противолежащий одной из сторон.

Выполнив такую операцию в каждой из пяти остальных вспомогательных формул, получим еще пять формул III группы:

$$\sin B \operatorname{ctg} C = \sin a \operatorname{ctg} c - \cos c \cos B; \quad (\text{III } ac\,BC),$$

$$\sin A \operatorname{ctg} B = \sin c \operatorname{ctg} b - \cos c \cos A; \quad (\text{III } cb\,AB),$$

$$\sin A \operatorname{ctg} C = \sin b \operatorname{ctg} c - \cos b \cos A, \quad (\text{III } bc\,AC),$$

$$\sin C \operatorname{ctg} A = \sin b \operatorname{ctg} a - \cos b \cos C; \quad (\text{III } ba\,CA),$$

$$\sin C \operatorname{ctg} B = \sin a \operatorname{ctg} b - \cos a \cos C. \quad (\text{III } ab\,CB).$$

Покажем на конкретном примере, как с помощью этих формул решаются практические задачи.

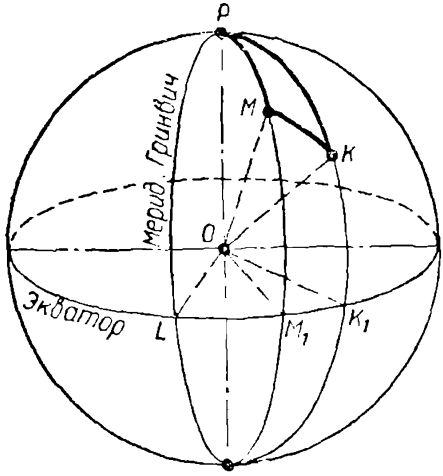


Рис 16

Пусть требуется узнать, под каким углом к меридиану должен вылететь из Парижа самолет, совершающий кратчайший рейс в Афины. Иначе говоря, требуется определить азимут направления Париж — Афины.

По справочнику находим географические координаты Парижа: широта $\varphi_1 = 48°50'$, долгота $\lambda_1 = 2°20'$; Афины: широта $\varphi_2 = 37°58'$, долгота $\lambda_2 = 23°30'$.

Пусть MKP (рис. 16) — сферический треугольник с вершинами в Париже (M), Афинах (K) и на Северном полюсе (P). В этом треугольнике сторона $MP = M_1P - M_1M = 90° - \varphi_1$, сторона $KP = K_1P - K_1K = 90° - \varphi_2$, угол $P = LK_1 - LM_1 = \lambda_2 - \lambda_1$. Самолет должен следовать по дуге MK, поэтому искомым будет угол M, образуемый стороной MK с меридианом MP. Обозначим этот угол через x, тогда по любой из формул III группы, содержащей две стороны (MP и KP), угол между ними (P) и угол, лежащий против одной из них ($M = x$), будем иметь:

$$\sin(\lambda_2 - \lambda_1) \operatorname{ctg} x = \sin(90° - \varphi_1) \operatorname{ctg}(90° - \varphi_2) - \cos(90° - \varphi_1) \cos(\lambda_2 - \lambda_1),$$

откуда

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} - \sin\varphi_1 \operatorname{ctg}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Произведем вычисления, положив

$$\frac{\cos\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)} = s_1 \text{ и } \sin\varphi_1 \operatorname{ctg}(\lambda_2 - \lambda_1) = s_2:$$

$$\begin{array}{r}
\lg\cos\varphi_1 = \lg\cos 48°50' = \bar{1},8185 \\
\lg\operatorname{tg}\varphi_2 = \lg\operatorname{tg} 37°58' = \bar{1},8923 \\
\hline
\bar{1},7108 \\
\hline
\lg\sin(\lambda_2 - \lambda_1) = \lg\sin 21°10' = \bar{1},5577 \\
\hline
\lg s_1 = 0,1531 \\
s_1 = 1,422
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\lg\sin\varphi_1 = \lg\sin 48°50' = \bar{1},8776 \\
\lg\operatorname{ctg}(\lambda_2 - \lambda_1) = \lg\operatorname{ctg} 21°10' = 0,4120 \\
\hline
\lg s_2 = 0,2896 \\
s_2 = 1,948 \\
s_1 = 1,422 \\
\hline
\operatorname{ctg} x = s_1 - s_2 = -0,526 \\
\operatorname{ctg}(180° - x) = 0,526 \\
180° - x = 16°37' \\
x = 163°23'.
\end{array}$$

Упражнения.

1. Даны два угла сферического треугольника $A = 126°18'$, $B = 63°42'$ и сторона между ними $c = 106°44'$. Найти его стороны a и b и угол C.

2. Два двугранных угла, принадлежащих одному и тому же трехгранному углу, равны соответственно $A = 59°32'$, $B = 77°18'$, а плоский угол на их общей грани равен $c = 34°30'$. Найти третий двугранный угол.

3. Под каким углом к меридиану (по какому курсу) вылетает самолет из Брюсселя, совершающий кратчайший рейс в Стокгольм? Географические координаты Брюсселя: широта $\varphi_1 = 50°51'$, долгота $\lambda_1 = 4°38'$; Стокгольма: широта $\varphi_2 = 59°21'$; долгота $\lambda_2 = 18°03'$.

4. В каком пункте большой круг земного шара, проходящий через Мадрид и Берлин, пересекает северный тропик? Географические координаты Мадрида: широта $\varphi_1 = 40°24'$, долгота $\lambda_1 = -3°42'$; Берлина: широта $\varphi_2 = 52°30'$, долгота $\lambda_2 = 13°24'$.

5. Вершинами сферического треугольника на земном шаре служат пункты: Пекин ($\varphi_1 = 39°54'$, $\lambda_1 = 116°28'$), Токио ($\varphi_2 = 35°39'$, $\lambda_2 = 139°45'$) и Северный полюс. Определить сферический избыток и периметр этого треугольника.

§ 10. Формулы IV группы, выражающие зависимость в сферическом треугольнике между всеми тремя углами и одной из его сторон

Возьмем какие-либо две формулы пяти элементов, выведенные нами в предыдущем параграфе, например:

$$\sin c \cos A = \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C; \quad (cba\ AC)$$

$$\sin a \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C. \quad (cab\ BC)$$

Заменим в них синусы сторон синусами углов на основании теоремы синусов (§ 8, II):

$$\sin c = M \sin C, \ \sin b = M \sin B \text{ и } \sin a = M \sin A,$$

получим:

$$M \sin C \cos A = M \sin B \cos a - M \cos b \sin A \cos C,$$

$$M \sin C \cos B = M \sin A \cos b - M \cos a \sin B \cos C;$$

после сокращения на M и записи в ином порядке будем иметь:

$$\cos a \sin B = \cos b \sin A \cos C + \cos A \sin C; \quad (*),$$

$$\cos b \sin A = \cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C. \quad (**).$$

Подставим в равенство (*) значение $\cos b$, полученное из равенства (**):

$$\cos b = \frac{\cos a \sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin A},$$

получим:

$$\cos a \sin B = \cos a \sin B \cos^2 C + \cos B \sin C \cos C + \cos A \cos C$$

или

$$\cos a \sin B (1 - \cos^2 C) = \cos B \sin C \cos C + \cos A \sin C.$$

Но $1 - \cos^2 C = \sin^2 C$, поэтому сокращение на $\sin C$ дает:

$$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A,$$

откуда

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}. \quad (IV\ a\ ABC)$$

Так мы пришли к первой формуле IV группы, выражающей косинус стороны сферического треугольника через круговые функции его углов. Две другие форму-

лы этой группы получаются из нее круговой перестановкой букв:

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A}; \qquad \text{(IV } bBCA\text{)}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}. \qquad \text{(IV } cCAB\text{)}$$

Эти формулы показывают еще раз, что сферический треугольник вполне определяется своими тремя углами. Отсюда, в частности, следует известный признак равенства сферических треугольников по трем углам, не выполняющийся для плоских треугольников.

Применим выведенные формулы для решения следующей з а д а ч и.

Для изготовления модели трехгранного угла делают выкройку его плоских углов. Какой величины следует выкроить плоские углы, чтобы склеить из них такой трехгранный угол, у которого двугранные углы находятся в отношении 4 : 5 : 6, а их сумма равна 300°.

Пусть $OA'B'C'$ — изображение искомого трехгранного угла (рис. 13). Представим себе сферическую поверхность радиуса $R = 1$ с центром в точке O. В пересечении этой поверхности с гранями трехгранного угла образуется сферический треугольник ABC, у которого углы A, B и C будут находиться в отношении 4 : 5 : 6, а их сумма будет равна 300°.

Из соотношений

$$A : B : C = 4 : 5 : 6$$

$$\text{и} \quad A + B + C = 300°$$

находим $A = 80°$, $B = 100°$ и $C = 120°$.

Плоские углы трехгранного угла $OA'B'C'$ измеряются сторонами сферического треугольника ABC. Для отыскания сторон воспользуемся формулами (IV):

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} = \frac{\cos 80° + \cos 100° \cos 120°}{\sin 100° \sin 120°} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \cos 80°}{\sin 80° \sin 60°} \approx 0{,}306,$$

откуда $a \approx 72°$;

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A} = \frac{\cos 100° + \cos 120° \cdot \cos 80°}{\sin 120° \sin 80°} =$$

$$= -\frac{\frac{3}{2}\cos 80°}{\sin 60° \sin 80°} \approx -0{,}306,$$

откуда $b \approx 108°$;

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{\cos 120° + \cos 80° \cos 100°}{\sin 80° \sin 100°} =$$

$$= -\frac{\cos 60° + \cos^2 80°}{\sin^2 80°} \approx -0{,}546,$$

откуда $c \approx 123°$.

Итак, надо выкроить плоские углы в 72°, 108° и 123°.

Упражнения.

1. Даны углы сферического треугольника: $A = 62°06'$, $B = 54°36'$ и $C = 70°14'$; найти его стороны a, b и c.

2. Найти плоские углы трехгранного угла, зная его двугранные углы: $A = 47°59'$, $B = 130°47'$ и $C = 56°49'$.

3. Чтобы изготовить из картона модель трехгранного угла, делают сперва выкройку его плоских углов. Какой величины следует взять плоские углы на выкройке для изготовления модели трехгранного угла, у которого двугранные углы равны $A = 123°15'$, $B = 50°00'$ и $C = 84°07'$.

4. Доказать, что в правильной n-угольной пирамиде двугранный угол α при основании и двугранный угол β при боковом ребре связаны соотношением:

$$\sin \alpha = \frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

§ 11. Формулы, выражающие зависимости между сторонами и углами прямоугольного сферического треугольника

Как известно, в плоском треугольнике не может быть более одного прямого угла. В сферическом же треугольнике может быть один, два и даже три прямых угла. Возьмем, например, трехгранный угол $OXYZ$ (рис.

17), у которого ребра взаимно перпендикулярны и, следовательно, все двугранные углы прямые. Опишем из его вершины O как из центра сферу. В пересечении этой сферы с гранями трехгранного угла получится сферический треугольник ABC, у которого все три угла A, B и C будут прямыми.

Сферический треугольник называют прямоугольным, если в нем хотя бы один угол равен 90°. В том случае, когда в сферическом треугольнике только один угол является прямым, противолежащую этому углу сторону называют гипотенузой, а прилежащие стороны — катетами.

Если положить угол $C = 90°$ в тех формулах, которые выражают зависимость между элементами сферического треугольника и содержат C, то получаются следующие соотношения для прямоугольного сферического треугольника:

$$\cos c = \cos a \cos b, \ldots \quad \text{(I)}$$

т. е. *косинус гипотенузы равен произведению косинуса катетов*:

$$\left.\begin{aligned} \sin a &= \sin c \sin A, \\ \sin b &= \sin c \sin B, \end{aligned}\right\} \ldots \quad \text{(II)}$$

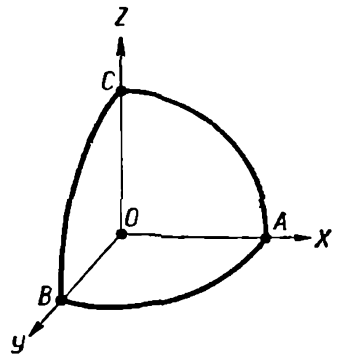


Рис. 17.

т. е. *синус катета равен произведению синуса гипотенузы на синус угла, противолежащего катету*;

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} a &= \operatorname{tg} c \cos B, \\ \operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} c \cos A, \\ \operatorname{tg} a &= \sin b \operatorname{tg} A, \\ \operatorname{tg} b &= \sin a \operatorname{tg} B, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

т. е. *тангенс катета равен тангенсу гипотенузы, умноженному на косинус угла между ними* (две первые формулы), или *тангенс катета равен произведению синуса другого катета на тангенс угла, противоположного катету* (последние две формулы);

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B, \\ \cos A &= \cos a \sin B, \\ \cos B &= \cos b \sin A. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

С помощью этих формул можно найти все основные элементы прямоугольного сферического треугольника (стороны и углы), если известны какие-либо две из них.

Пусть, например, известны гипотенуза $c = 146°19'$ и катет $b = 159°32'$ сферического треугольника ABC и требуется определить катет a и углы A и B, прилежащие к гипотенузе (рис. 18).

По формуле (I)

$$\cos c = \cos a \cos b$$

находим:

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos b} = \frac{\cos 146°19'}{\cos 159°32'} = \frac{\cos 33°41'}{\cos 20°28'},$$

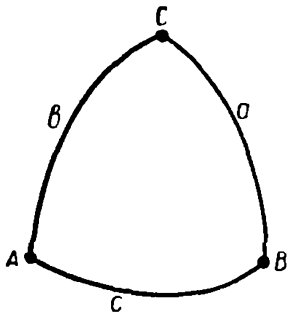


Рис. 18.

$$\begin{aligned} \lg \cos 33°41' &= \bar{1},9202 \\ \lg \cos 20°28' &= \bar{1},9717 \\ \hline \lg \cos a &= \bar{1},9485 \\ a &= 27°21' \end{aligned}$$

По формуле (III)

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A$$

имеем:

$$\cos A = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} c = \operatorname{tg} 159°32' \times$$

$$\times \operatorname{ctg} 146°19' = \operatorname{tg} 20°28' \cdot \operatorname{ctg} 33°41',$$

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} 20°28' &= \bar{1},5719 \\ \lg \operatorname{ctg} 33°41 &= 0,1762 \\ \hline \lg \cos A &= \bar{1},7481 \\ A &= 55°57' \end{aligned}$$

По формуле (II)

$$\sin b = \sin c \sin B$$

имеем:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin 159°32'}{\sin 146°19'} = \frac{\sin 20°28'}{\sin 33°41'},$$

$$\begin{aligned} \lg \sin\ 20°28' &= \bar{1},5436 \\ \lg \sin\ 33°41' &= \bar{1},7440 \\ \hline \lg \sin B &= \bar{1},7996 \end{aligned}$$

$$B = \begin{cases} 39°5' \\ 140°55' \end{cases}$$

Остается выяснить, какое из этих значений B удовлетворяет условию задачи.

Из формулы (III)

$$\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B$$

видно, что $\operatorname{tg} b$ и $\operatorname{tg} B$ имеют одинаковые знаки (так как $\sin a > 0$), следовательно, катет b и противолежащий ему угол B должны быть оба либо меньше 90°, либо больше 90°. А так как по условию задачи $b > 90°$, то следует взять $B = 140°55'$; первое значение B не годится.

Итак, задача решена и попутно доказана теорема: *катет прямоугольного сферического треугольника и противолежащий ему угол всегда или оба больше 90° или оба меньше 90°.*

На основании формулы (I)

$$\cos c = \cos a \cos b$$

читатель может убедиться в справедливости следующей теоремы: *если в прямоугольном сферическом треугольнике оба катета больше 90° или оба меньше 90°, то гипотенуза меньше 90°; если же один из катетов больше 90°, а другой меньше 90°, то гипотенуза больше 90°.*

Формулы для прямоугольного сферического треугольника с успехом применяются при решении многих задач из реальной жизни. Рассмотрим, например, следующую задачу из практики мореплавания.

Корабль, вышедший из гавани A курсом S 20° 30′ O[1], должен плыть по дуге большого круга земного шара до экватора. Определить, где и под каким углом он пересечет экватор и сколько времени ему плыть до экватора, если известны географические координаты гавани A: широта $\varphi = 43°30'$, долгота $\lambda = 144°20'$.

Курс $S\,20°30'\,O$ означает уклонение от южного направления к востоку на 20°30′.

Для наглядности изобразим схематично (от руки) земной шар с экватором (рис. 19), обозначив на нем точкой гавань A. Затем проведем через эту точку дугу AB большого круга, по которой плывет корабль, и дугу AC меридиана, на котором расположена гавань A.

[1] S 20°30′ O читается так: 20°30′ к юго-востоку.

В сферическом треугольнике ABC угол C прямой (так как меридианы перпендикулярны экватору), угол $A = 20°30'$ и сторона $AC = \varphi = 43°30'$.

По формуле (III) $\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} A$ имеем:

$$\operatorname{tg} BC = \sin AC \cdot \operatorname{tg} A = \sin 43°30' \cdot \operatorname{tg} 20°30' \approx 0{,}2574,$$

откуда $BC \approx 14°26'$.

Находим долготу пункта B:

$$\lambda + BC = 144°20' + 14°26' = 158°46'.$$

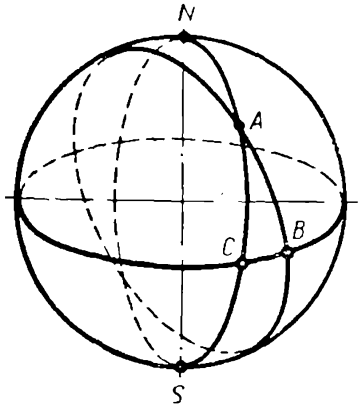


Рис. 19.

По формуле (III) $\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B$ находим: $\operatorname{tg} B = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin a} = \dfrac{\operatorname{tg} 43°30'}{\sin 14°26'} \approx 3{,}806$, откуда $B \approx 75°17'$.

Угол, образованный дугой AB с меридианом, дополняет B до 90°, следовательно, курс корабля в пункте B будет ***S*** $14°43'$ ***O***.

Для определения длины дуги AB воспользуемся формулой (III) $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A$, по которой

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos A} = \frac{\operatorname{tg} 43°30'}{\cos 20°30'} \approx 1{,}013,$$

откуда $c \approx 45°23'$; в радианах $c \approx 0{,}7921$, в километрах $c \approx 0{,}7921 \cdot R = 0{,}7921 \cdot 6370 \approx 5050$ (*км*).

Допустим, что средняя скорость корабля 40 *км/ч*, тогда он будет плыть от гавани A до экватора около 126 часов.

Упражнения.

1. Даны катеты прямоугольного сферического треугольника $a = 124°18'$ и $b = 73°35'$; найти его гипотенузу c и углы A и B.

2. В прямоугольном сферическом треугольнике известны гипотенуза $c = 37°48'$ и косвенный угол $A = 123°17'$; найти другие его стороны и углы.

3. Найти кратчайшее расстояние по земному шару между пунктами A и B, зная, что разность долгот этих пунктов равна 90°, а широты равны соответственно 46°21′ и —22°54′.

4. Где расположен пункт пересечения экватора с большим кругом земного шара, проходящим через Париж и Стокгольм? Геогра-

фические координаты Парижа: $\varphi_1 = 48°50'$, $\lambda_1 = 2°20'$; Стокгольма: $\varphi_2 = 59°21'$, $\lambda_2 = 18°03'$.

5. Корабль из Лиссабона ($\varphi = 38°42'$ с. ш. и $\lambda = 9°12'$ в. д.) плывет по дуге большого круга к экватору, держа курс S 22°47′ W[1] (т. е. отклоняется от южного направления к западу на 22°47′). Где и под каким курсом он пересечет экватор и сколько ему плыть до экватора?

6. Наклонная MO образует с плоскостью P угол α (рис. 20); прямая ON, лежащая в этой плоскости, образует с наклонной угол γ, а с ее проекцией угол β. Доказать, что между углами α, β и γ имеет место следующая зависимость:

$$\cos\alpha \cos\beta = \cos\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

Используя эту зависимость, проверить справедливость теоремы о трех перпендикулярах.

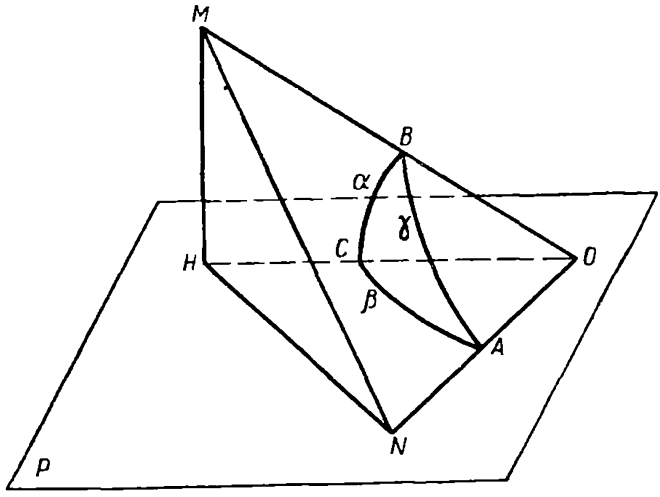


Рис. 20.

Указание. Лучи OM, OH и ON образуют трехгранный угол; сфера произвольного радиуса с центром O пересекается с этим углом по прямоугольному сферическому треугольнику ABC, с гипотенузой γ и катетами α и β. Равенство (*) выражает известную зависимость между сторонами такого сферического треугольника.

Доказательство данного равенства можно провести и без использования сферической тригонометрии. В самом деле, проведем $HN \perp ON$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $MN \perp ON$. В образовавшихся прямоугольных треугольниках имеем:

$$\cos\gamma = \frac{ON}{OM}, \quad ON = OH \cdot \cos\beta, \quad OM = \frac{OH}{\cos\alpha},$$

откуда

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta.$$

[1] S 22°47′ W читается так: 22°47′ к юго-западу.

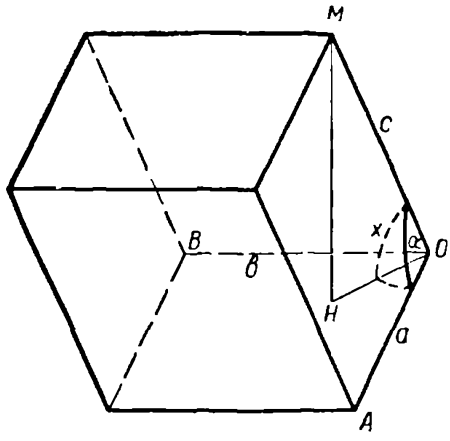


Рис. 21.

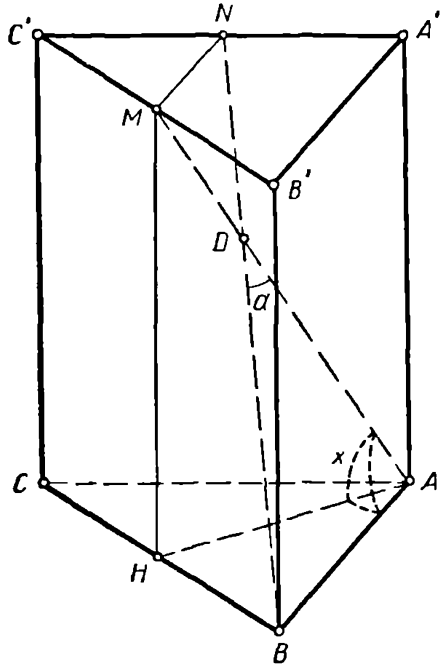


Рис. 22.

Данное соотношение облегчает решение многих задач по стереометрии, встречающихся в стабильных учебных пособиях для средней школы (см., например, П. В. Стратилатов, Сборник задач по тригонометрии, Учпедгиз, 1957, § 19, задачи 373, 374, 375, 376, 377, 378(2), 381, 382, 385 и некоторые другие).

Остановимся на решении двух задач из указанного сборника.

Задача 374. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из одной вершины, a, b и c; ребра a и b взаимно-перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Определить объем параллелепипеда и угол между ребром c и плоскостью основания.

Решение. Дадим изображение параллелепипеда (рис. 21), где ребра OA, OB и OM равны соответственно a, b и c, причем $\sphericalangle BOA = 90°$ $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM = \alpha$, отрезок MH — высота параллелепипеда и, следовательно, $\sphericalangle AOH = 45°$.

Обозначив объем параллелепипеда через V, а угол MOH через x, будем иметь: $V = AO \cdot BO \cdot MH = abc \sin x$.

Заметив, что к углам MOA, MOH и AOH применимо соотношение (*) (см. задачу 6), получаем:

$$\cos x \cdot \cos 45° = \cos \alpha,$$

откуда

$$\cos x = \sqrt{2} \cos \alpha, \quad \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha} = \sqrt{-\cos 2\alpha},$$

следовательно,

$$V = abc \sqrt{-\cos 2\alpha}, \text{ где } 45° < \alpha < 135°.$$

Задача 377. В правильной треугольной призме сторона основания равна a. Две вершины верхнего основания соединены с серединами противоположных им сторон нижнего основании. Определить объем призмы, если угол между проведенными прямыми, обращенный к плоскости основания, равен α.

Решение. Совершенно безразлично, какое из оснований правильной призмы считать верхним, поэтому рисунок 22 также соответствует условию задачи. На нем прямые AM и BN, соединяющие вершины A и B одного из оснований призмы с серединами M и N противоположных сторон другого основания, лежат в одной плоскости (так как $MN \parallel A'B' \parallel AB$) и образуют при пересечении угол ADB, равный α. Отрезок MH, параллельный CC', служит высотой призмы и является катетом прямоугольного треугольника HAM. Обозначив угол треугольника HAM через x и заметив, что катет $AH = a \cdot \cos 30° = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, выражаем высоту MH и объем V призмы так:

$$MH = AH \cdot \operatorname{tg} x = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{tg} x;$$

$$V = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 60° \cdot MH = \frac{3}{8} a^3 \operatorname{tg} x.$$

Заметив, что к углам $MAH = x$, $HAB = 30°$ и $BAM = 90° - \frac{\alpha}{2}$ применима формула (*) [см. задачу 6], получаем:

$$\cos x \cdot \cos 30° = \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right),$$

откуда

$$\cos x = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2 60° - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\sin (60° + \alpha) \sin (60° - \alpha)}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

и, следовательно,

$$V = \frac{3}{8} a^3 \cdot \frac{\sqrt{\sin (60° + \alpha) \sin (60° - \alpha)}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \text{ где } 0 < \alpha < 60°.$$

ГЛАВА III

ПРИЛОЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИИ В АСТРОНОМИИ

§ 12. Небесная сфера и ее элементы

Человеку, находящемуся в ясную звездную ночь на открытой местности (например, в поле или на море), кажется, что все звезды удалены от него на одинаковом расстоянии и расположены на внутренней поверхности очень большого шара. Такую воображаемую поверхность астрономы называют небесной сферой. За центр небесной сферы принимается центр земного шара, а радиус ее считается произвольным и как угодно большим.

Для выяснения других элементов небесной сферы, употребляемых в астрономии, представим себя в роли наблюдателя. Отвесная или вертикальная линия, проходящая через точку, на которой мы стоим, перпендикулярна плоскости видимого горизонта и пересекает небесную сферу в двух диаметрально противоположных точках: одна из этих точек расположена у нас над головой и называется зенитом, а другая—под нами и называется надиром.

Для определения положения звезд на небе астрономы вместо видимого горизонта используют так называемый математический горизонт, т. е. линию пересечения небесной сферы с плоскостью, перпендикулярной отвесной линии и проходящей через центр земного шара. При этом предполагают, что глаз наблюдателя расположен в центре сферы. Такое соглашение не должно нас беспокоить, так как расстояния до звезд столь велики[1], что при наблюдении можно смело прене-

[1] Установлено, что свет от ближайшей к нам яркой звезды (α Центавра) идет более 4 лет, а скорость распространения света около 300 тыс. *км/сек*.

брегать размерами земного шара, не допуская каких-либо ощутимых погрешностей. На рисунке 23 дано изображение небесной сферы с центром C и горизонтом $NWSO$, где точками N, W, S и O отмечены в плоскости горизонта направления на север (Nord), запад (West), юг (Süd) и восток (Ost). Линию NS называют полуденной, так как в полдень тени от предметов падают как раз по этому направлению. Точки зенита и надира обозначены соответственно буквами Z и Z'.

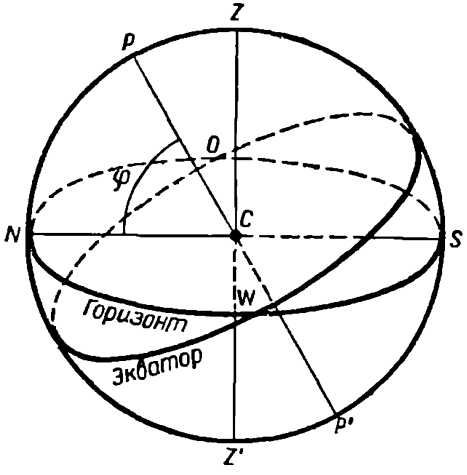


Рис. 23.

Наблюдая небо в звездную ночь, мы замечаем, что небесная сфера вместе со звездами вращается вокруг некоторой оси, проходящей через наш глаз, и совершает за сутки полный оборот. Ось суточного вращения небесной сферы называется осью мира. Точки пересечения небесной сферы с осью мира называются полюсами мира.

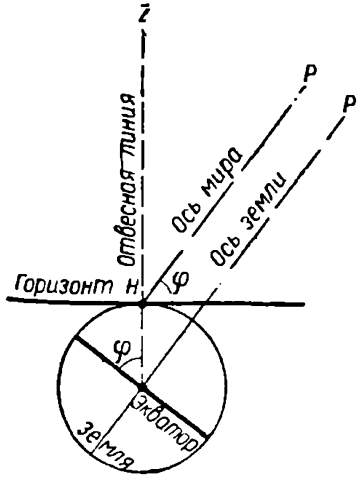


Рис. 24.

Читателю, разумеется, известно, что кажущееся вращение небесной сферы есть следствие суточного вращения Земли вокруг своей оси, поэтому ось мира и ось Земли имеют одинаковое направление. В северном полушарии Земли это направление легко определяется по Полярной звезде, почти совпадающей с Северным полюсом мира (расстояние между ними около 1°). Южный полюс мира можно видеть только с южного полушария Земли. На рисунке 23 полюсы мира обозначены

буквами P и P' и, следовательно, прямой PP' изображена ось мира. Понятно, что угол наклона оси мира к плоскости горизонта равен географической широте места наблюдения (см. рис. 24) и равен приблизительно угловой высоте Полярной звезды над горизонтом. Если бы мы находились на Северном полюсе земного шара, то Полярная звезда оказалась бы над нами в зените и ось мира совпала бы с отвесной линией и с осью Земли.

Для определения положения звезд на небе астрономы ввели также понятия небесный меридиан и небесный экватор.

Небесным экватором называют большой круг небесной сферы, плоскость которого перпендикулярна оси мира. Такой круг удобен для астрономов тем, что он не зависит от места наблюдения, тогда как круг плоскости горизонта меняет свое положение при переходе наблюдателя из одного пункта земного шара в другой.

Небесным меридианом называют большой круг небесной сферы, проходящий через полюс мира и точку зенита. Плоскость небесного меридиана пересекает плоскость горизонта по полуденной линии SN (рис. 23), а плоскость экватора пересекается с плоскостью горизонта по линии OW (восток-запад).

§ 13. Определение положения небесных светил с помощью сферических координат

Подобно тому как на земном шаре положение любого пункта определяется двумя географическими координатами (долготой и широтой), так и на небесной сфере положение каждого светила можно определить двумя сферическими координатами. В астрономии различают несколько систем сферических координат, из которых наиболее употребительны горизонтальная и экваториальная системы. Рассмотрим каждую из них.

1. **В горизонтальной системе координат** положение любой точки на небесной сфере (рис. 25) определяется высотой (h) и азимутом (A).

Под высотой (h) точки M понимают угол QCM, образуемый радиусом CM с плоскостью горизонта. Такой угол лежит в плоскости вертикального круга, проходящего через зенит и данную точку M, и чи-

сленно равен дуге QM этого круга, поэтому иногда говорят, что высота (h) выражает угловое расстояние точки M от горизонта. Вместо высоты (h) употребляют часто зенитное расстояние (Z) точки M от зенита, равное $90°—h$.

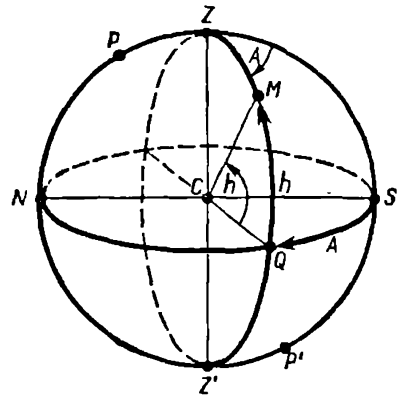


Рис. 25.

Азимутом (A) точки M называют угол, образованный плоскостью вертикального круга, проходящего через эту точку, с плоскостью небесного меридиана. Этот угол отсчитывается от точки S к западу; численно он равен дуге SQ горизонта.

2. **Экваториальная система** небесных координат построена по одному принципу с системой географических координат на земном шаре. Координатная сетка этой системы, так же как и географическая, образуется меридианами и параллелями. Меридианом или кругом склонения на небесной сфере называют всякий большой круг, проходящий через полюсы мира. Параллелями называют круги, по которым небесная сфера пересекается плоскостями, перпендикулярными оси мира. Наибольшим из таких кругов является экватор. Понятно, что через каждую точку M на небесной сфере, отличную от полюсов, проходит одна параллель и один меридиан — круг склонения этой точки (рис. 26).

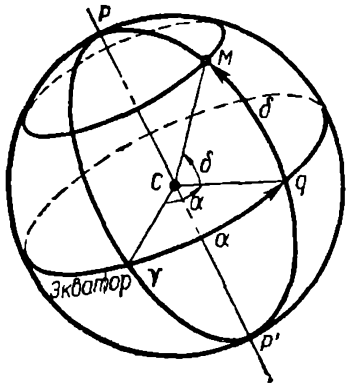


Рис. 26.

Положение точки на небе в этой системе также определяется двумя координатами: склонением (δ) и прямым восхождением (α).

Склонением (δ) точки M называют угловое расстояние этой точки от небесного экватора или дугу qM круга склонения, проходящего через точку q. У точек

северной половины небесной сферы склонение (δ) считается положительным, а для точек южной половины — отрицательным.

Прямым восхождением (α) точки M называют угол между начальным или нулевым кругом склонения и тем кругом склонения, который проходит через точку M. За начальный круг склонения принят меридиан, проходящий через точку весеннего равноденствия, отмеченную на рисунке особым астрономическим знаком γ. В этой точке 21 марта Солнце пересекает экватор, переходя по эклиптике[1] с южной половины небесной сферы на северную. Прямое восхождение (α) точки M измеряется дугой γq, отсчитываемой от точки γ против часовой стрелки (если смотреть с северного полюса мира).

Как видим, склонение небесного светила аналогично географической широте, прямое восхождение аналогично географической долготе, а начальный круг склонения служит аналогом Гринвичского меридиана.

Так как экваториальные координаты не зависят ни от места положения наблюдателя на земном шаре, ни от времени наблюдения, то ими пользуются обычно для составления карты неба и занесения небесных светил в каталоги. Для определения времени и места положения на земном шаре требуется измерение горизонтальных координат светил путем наблюдений.

Чтобы лучше выяснить, как связаны между собой экваториальные и горизонтальные координаты одного и того же светила, рассмотрим изображение небесной сферы с экватором $BWB'O$ и горизонтом $NWSO$, соответствующем положению наблюдателя на некоторой широте φ (рис. 27).

Система горизонта с ее вертикальными кругами представляется наблюдателю неподвижной, а система экватора с ее параллелями и меридианами (т. е.

[1] **Эклиптикой** называется большой круг, по которому Солнце в течение года перемещается на небесной сфере. Плоскость эклиптики наклонена к плоскости небесного экватора под углом в $23°27'$ и пересекает экватор в точках весеннего и осеннего равноденствий.

кругами склонения) постоянно вращается вокруг оси PP' в направлении с востока на запад, причем каждый момент времени один из ее меридианов проходит через небесный меридиан PZ.

Возьмем на небесной сфере какую-нибудь звезду X. Через нее проходит некоторый круг склонения PXP' и некоторый вертикальный круг ZXZ'. Сферический треугольник ZPX, вершинами которого служат зенит Z, полюс мира P и сама звезда X, называют параллактическим треугольником. В нем легко определяются стороны и два угла.

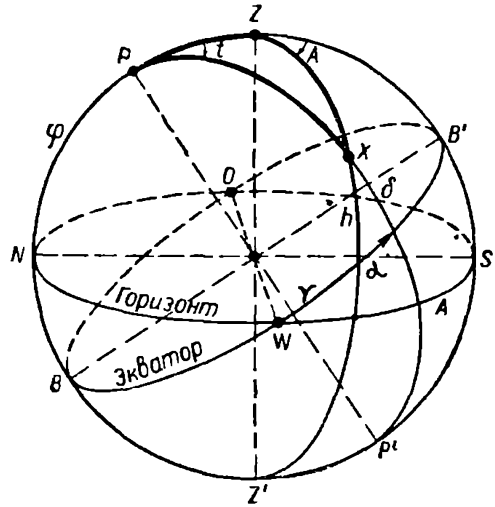


Рис. 27.

Сторона PZ дополняет до 90° широту места наблюдения, т. е. равна 90°—φ, и, таким образом, представляет для данного места неизменную величину.

Сторона PX дополняет до 90° склонение звезды X, т. е. равна 90°—δ, и, следовательно, для всех мест является неизменной величиной.

Сторона ZX дополняет до 90° высоту звезды X, т. е. равна 90°—h, и поэтому с вращением небесной сферы вокруг оси мира непрерывно меняется.

Угол PZX дополняет до 180° азимут звезды X, т. е. $\sphericalangle PZX = 180° - A$, и, следовательно, тоже непрерывно меняется с вращением небесной сферы.

Угол ZPX называют часовым углом и обозначают через t. Он тоже непрерывно меняется с вращением небесной сферы и представляет тот угол, на который повернулся круг склонения звезды X после своего прохождения через небесный меридиан PZS. Поскольку небесная сфера вместе со всеми звездами вращается вокруг оси мира PP' равномерно и делает полный оборот за 24 часа, то каждый круг склонения поворачивается в течение одного часа на угол 360° : 24 = 15°. Таким об-

разом, по времени, прошедшему с момента прохождения звезды через небесный меридиан или, как говорят, с момента верхней кульминации звезды, можно определить величину угла t в градусах и минутах. Если, например, после верхней кульминации звезды прошло 2 часа 19 минут, то угол $t = 15° \cdot 2\frac{19}{60} = 34°45'$.

§ 14. Задачи из астрономии и их решение

Задача 1. Из астрономического справочника известно, что 18 мая склонение Солнца $\delta = 19°30'$. Где оно будет находиться в этот день через 2 часа 45 минут после верхней кульминации в Москве?

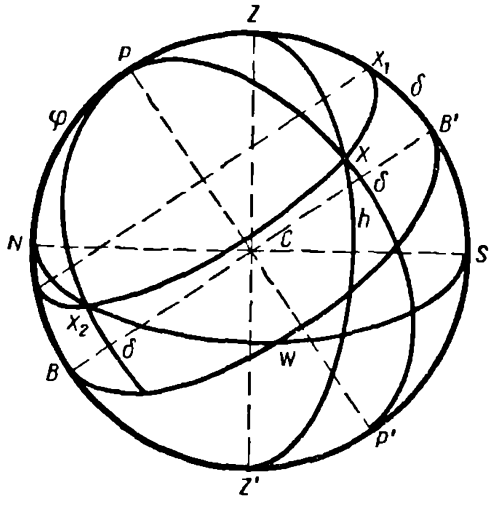


Рис. 28.

Решение. Широта обсерватории Москвы $\varphi = 55°44'$. В момент верхней кульминации Солнце находится в некоторой точке X_1 небесного меридиана (рис. 28), и в этот момент в Москве бывает полдень. За 2 часа 45 минут круг склонения Солнца повернется к западу на угол $t = 15° \cdot 2\frac{45}{60} = 41°15'$, и Солнце займет на небесной сфере новое положение X.

Рассмотрим параллактический треугольник PZX. В нем известны часовой угол $XPZ = t$ и две стороны $PZ = 90° - \varphi$ и $PX = 90° - \delta$. Для определения положения Солнца надо найти горизонтальные координаты точки X: высоту h и азимут A.

Заметив, что дуга $ZX = 90° - h$, применим к треугольнику PZX формулу I из § 6 для косинуса стороны ZX:

$$\cos ZX = \cos PZ \cos PX + \sin PZ \sin PX \cos \measuredangle ZPX,$$

т. е.

$$\cos(90°-h) = \cos(90°-\varphi)\cos(90°-\delta)+\sin(90°-\varphi)\times \times \sin(90°-\delta)\cos t,$$

или

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t.$$

Для удобства вычислений с помощью логарифмов внесем обозначения:

$$\sin\varphi\sin\delta = s_1 \text{ и } \cos\varphi\cos\delta\cos t = s_2:$$

$$\begin{aligned} \lg\sin\varphi &= \lg\sin 55°44' = \bar{1},9172 \\ \lg\sin\delta &= \lg\sin 19°30' = \bar{1},5235 \\ \hline \lg s_1 &= \bar{1},4407 \\ s_1 &= 0,2758 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg\cos\varphi &= \lg\cos 55°44' = \bar{1},7505 \\ \lg\cos\delta &= \lg\cos 19°30' = \bar{1},9743 \\ \lg\cos t &= \lg\cos 41°15' = \bar{1},8762 \\ \hline \lg s_2 &= \bar{1},6010 \\ s_2 &= 0,3990 \\ \hline \lg h = s_1+s_2 &= 0,6748 \\ h &= 42°26' \text{—высота Солнца.} \end{aligned}$$

Так как в параллактическом треугольнике угол PZX дополняет азимут точки X до 180°, то для определения азимута Солнца можно также использовать формулу I, но для косинуса стороны PX, т. е.

$$\cos PX = \cos PZ\cos ZX + \sin PZ\sin ZX\cos \measuredangle PZX.$$

Используя известные, получаем:

$$\cos(90°-\delta) = \cos(90°-\varphi)\cos(90°-h) + \sin(90°-\varphi)\times \times\sin(90°-h)\cos(180°-A)$$

или

$$\sin\delta = \sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cos h\cos A,$$

откуда

$$\cos A = \frac{\sin\varphi\sin h-\sin\delta}{\cos\varphi\cos h}.$$

Выполняем вычисления:

$$\sin\varphi\sin h-\sin\delta = 0,8264\cdot 0,6748-0,3338 = 0,2239,$$

следовательно,

$$\cos A = \frac{0,2239}{\cos\varphi \cos h}$$

$$\begin{array}{r} \lg 0,2239 = \overline{1},3501 \\ \hline \lg \cos\varphi = \overline{1},7505 \\ \lg \cos h = \overline{1},8681 \\ \hline \overline{1},6186 \\ \hline \lg \cos A = \overline{1},7315 \\ A = 57°23' \end{array}$$

Итак, высота Солнца равна 42°26′, а азимут равен 57°23′, т. е. Солнце находится в направлении *S*57 23′ *W*.

Задача 2. На сколько самый длинный день в Ташкенте короче, чем в Москве?

Решение. Находим широту обсерватории Москвы $\varphi_1 = 55°44'$ и широту обсерватории Ташкента $\varphi_2 = 41°20'$. Самый длинный день в северном полушарии бывает 22 июня. В этот день склонение Солнца $\delta = 23°30'$. За половину дня Солнце совершило путь от точки своей верхней кульминации X_1 до точки захода X_2 (рис. 28), а круг его склонения повернулся на так называемый часовой угол X_1PX_2, который обозначают через t. Для отыскания этого угла воспользуемся прямоугольным сферическим треугольником PNX_2, в котором гипотенуза $PX_2 = 90° - \delta$, катет $PN = \varphi$ и $\angle NPX_2 = 180° - t$.

По формуле III из § 11 имеем:

$$\operatorname{tg} PN = \operatorname{tg} PX_2 \cdot \cos \angle NPX_2$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(90° - \delta) \cdot \cos(180° - t),$$

откуда

$$\cos(180° - t) = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta.$$

Для Москвы:

$$\cos(180° - t_1) = \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg} 55°44' \cdot \operatorname{tg} 23°30' =$$

$$= 1,4677 \cdot 0,4348 \approx 0,6381;\ 180° - t_1 \approx 50°21',$$

$$t_1 \approx 129°39',$$

в часах $t_1 \approx \frac{129°39'}{15°} = 8$ *ч* 39 *мин*.

следовательно, продолжительность самого длинного дня в Москве равна 17 *ч* 18 *мин*.

Для Ташкента

$$\cos(180°-t_2) = \operatorname{tg}\varphi_2 \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}41°20' \cdot \operatorname{tg}23°30' =$$
$$= 0{,}8795 \cdot 0{,}4348 \approx 0{,}3834;\ 180° - t_2 \approx 67°27',$$
$$t_2 = 112°33',$$

в часах $t_2 \approx \frac{112°33'}{15°} = 7$ *ч* 30 *мин*, следовательно, самый длинный день в Ташкенте равен 15 часам, т. е. короче, чем в Москве, на 2 часа 18 мин.

Задача 3. В астрономическом справочнике находим, что 30 мая склонение Солнца $\delta = 21°46'$. Наблюдения показали, что в этот день Солнце зашло через 8 *ч* 15 *мин* звездного времени после своей верхней кульминации. Какова географическая широта места наблюдения?

Решение. Пусть Солнце кульминировало в точке X_1 (рис. 28), а зашло в точке X_2, тогда за 8 *ч* 15 *мин* его круг склонения повернулся на угол $X_1PX_2 = 15° \times$ $\times\ 8\frac{15}{60} = 123°45'$.

Искомая широта φ является катетом прямоугольного сферического треугольника PNX_2, в котором угол $NPX_2 = 180° - \sphericalangle X_1PX_2 = 180° - 123°45' = 56°15'$, а гипотенуза $PX_2 = 90° - \delta$. Применим к этому треугольнику формулу III из § 11:

$$\operatorname{tg} NP = \operatorname{tg} PX_2 \cdot \cos NPX_2,$$

получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(90°-\delta) \cdot \cos 56°15' = \operatorname{ctg}21°46' \cdot \cos 56°15' \approx$$
$$\approx 2{,}504 \cdot 0{,}5555 \approx 1{,}3910,$$
$$\varphi \approx 54°17'.$$

Задача 4. Известно, что 21 декабря склонение Солнца $\delta = -23°30'$. В какой точке горизонта заходит Солнце в этот день в Ленинграде?

Решение. Обозначим искомую точку горизонта через X_2 (рис. 29). Сферический треугольник PNX_2 является прямоугольным с прямым углом при вершине N. Его катет $PN = \varphi$ (широта Пулковской обсерватории $\varphi = 59°46'$), а гипотенуза $PX_2 = 90° - \delta$.

По формуле 1 из § 11 имеем:

$$\cos PX_2 = \cos PN \cdot \cos NX_2,$$

т. е.

$$\cos(90°-\delta) = \cos\varphi \cos NX_2.$$

Заметив, что $NX_2 = 180° - SX_2$, где $SX_2 = A$—искомый азимут точки X_2, получаем:

$$\cos(90°-\delta) = \cos\varphi \cdot \cos(180°-A),$$

откуда

$$\cos A = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi} = \frac{\sin 23°30'}{\cos 59°46'}.$$

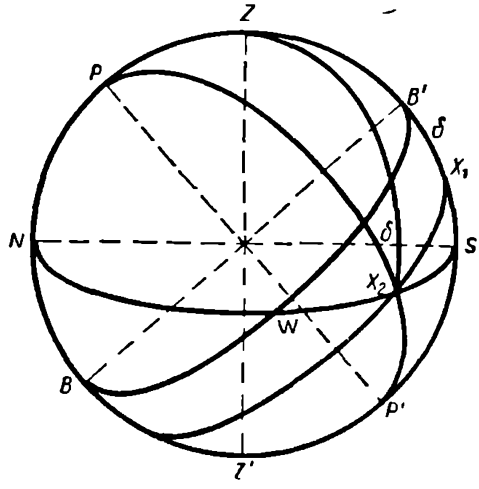


Рис. 29.

Выполняем вычисления:

$$\lg \sin 23°30' = \bar{1},6007$$
$$\lg \cos 59°46' = \bar{1},7020$$
$$\lg \cos A = \bar{1},8987$$
$$A \approx 37°13'$$

Итак, 21 декабря в Ленинграде Солнце заходит в направлении S $37°13'$ W.

Задача 5. Известно, что 21 декабря склонение Солнца $\delta = -23°30'$. На какой широте день в эти сутки равен только трем часам?

Решение. По условию задачи половина дня равна 1,5 часа. За это время Солнце описывает путь от точки верхней кульминации X_1 до точки захода X_2 (рис. 29), а его круг склонения повертывается вокруг оси мира на так называемый часовой угол

$$t = X_1PX_2 = 15° \cdot 1,5 = 22°30'.$$

Как и в предыдущей задаче, рассмотрим прямоугольный сферический треугольник PNX_2. В нем катет $NP = \varphi$, гипотенуза $PX_2 = 90° - \delta$ и угол $NPX_2 = 180° - t$.

По формуле III из § 11 имеем:

$$\operatorname{tg} NP = \operatorname{tg} PX_2 \cdot \cos \sphericalangle NPX_2,$$

т. е. $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(90°-\delta) \cdot \cos(180°-t) = -\operatorname{ctg}\delta \cos t.$

Используя данные, получаем:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{ctg}(-23°30')\cos 22°30' = 2{,}300 \cdot 0{,}9239 \approx 2{,}125;$$
$$\varphi \approx 64°48'.$$

Задача 6. В некотором пункте северного полушария установлен вертикальный стержень длиной $l = 2{,}00$ *м*. Через 4 *ч* 10 *мин* звездного времени после верхней кульминации Солнца он отбрасывает на горизонтальную плоскость тень длиной $l_1 = 3{,}50$ *м*. Определить географическую широту этого пункта, если склонение Солнца в день наблюдения $\delta = 17°30'$.

Решение. Вертикальный стержень и его тень на горизонтальной плоскости являются катетами прямоугольного треугольника, гипотенуза которого указывает направление на Солнце (рис. 30), поэтому высота Солнца h определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} h = \frac{l}{l_1} = \frac{2{,}00}{3{,}50} \approx 0{,}571,$$
$$h \approx 29°40'.$$

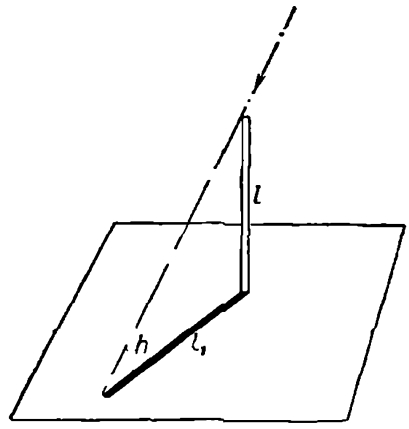


Рис. 30.

Пусть Солнце кульминировало в точке X_1, а через 4 *ч* 10 *мин* заняло положение X (рис. 28). Находим часовой угол $X_1PX = t$, на который повернулся круг склонения Солнца за 4 *ч* 10 *мин*:

$$t = 15° \cdot 4\,\frac{10}{60} = 62°30'.$$

Замечаем, что в параллактическом треугольнике PZX известны три элемента: угол $ZPX = t$, сторона $PX = 90° - \delta$ и сторона $ZX = 90° - h$, а для решения задачи достаточно найти его третью сторону $PZ = 90° - \varphi$.

По формуле 1 из § 6 для косинуса стороны ZX имеем:

$$\cos(90° - h) = \cos(90° - \varphi) \cdot \cos(90° - \delta) + \sin(90° - \varphi) \times \sin(90° - \delta)\cos t,$$

или

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t.$$

Остается решить это уравнение относительно φ.

Разделив обе части на $\sin\delta$, получим:

$$\frac{\sin h}{\sin\delta} = \sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{ctg}\delta\cos t.$$

Введем вспомогательный угол α, положив $\operatorname{ctg}\delta\cos t = \operatorname{tg}\alpha$, будем иметь:

$$\sin\varphi + \cos\varphi\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin h}{\sin\delta},$$

откуда

$$\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha = \frac{\sin h\cos\alpha}{\sin\delta}$$

или

$$\sin(\varphi+\alpha) = \frac{\sin h\cos\alpha}{\sin\delta}.$$

Перейдем к вычислениям.

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}17°30'\cdot\cos 62°30' = 3{,}172\cdot 0{,}4617 = 1{,}464,$$

следовательно, $\alpha \approx 55°40'$;

$$\sin(\varphi+\alpha) = \frac{\sin 29°40'\cdot\cos 55°40'}{\sin 17°30'} \approx \frac{0{,}4950\cdot 0{,}5640}{0{,}3007} \approx 0{,}929,$$

откуда $\varphi+\alpha \approx 68°20'$ и $\varphi+\alpha \approx 111°,40'$.

Для северного полушария годится только второй ответ, дающий $\varphi = 111°40' - \alpha \approx 56°,0'$.

Задача 7. Из астрономических таблиц находим, что 25 апреля склонение Солнца $\delta = 13°07'$. В котором часу оно заходит в этот день в Москве?

Решение. Солнце заходит на горизонте в некоторой точке X_2 (рис. 28). Для решения задачи надо найти так называемый часовой угол $X_2PZ = t$.

Рассмотрим прямоугольный сферический треугольник PNX_2. В нем катет $NP = \varphi$, гипотенуза $PX_2 = 90° - \delta$ и угол $NPX_2 = 180° - t$. По формуле III из § 11 имеем:

$$\operatorname{tg} NP = \operatorname{tg} PX_2\cdot\cos NPX_2,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(90° - \delta)\cos(180° - t),$$

откуда

$$\cos(180° - t) = \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\delta.$$

Широта обсерватории Москвы $\varphi = 55°44'$, следовательно,

$$\cos(180° - t) = \operatorname{tg}55°44'\cdot\operatorname{tg}13°07' = 1{,}4677\cdot 0{,}2330 = 0{,}3420;$$

$$180° - t \approx 70°,\quad t \approx 110°,$$

в часах $t = \frac{110°}{15°} \approx 7{,}33\ ч \approx 7\ ч\ 20\ мин$,

т. е. солнце заходит через 7 *ч* 20 *мин* звездного времени после своей верхней кульминации.

Чтобы получить обычное гражданское время захода солнца, надо внести несколько поправок.

1. Вычисленное нами звездное время определено в предположении, что Солнце со всеми звездами совершает одинаковое движение. В действительности же оно, кроме обычного суточного вращения вокруг мировой оси, имеет еще собственное годовое движение по эклиптике, благодаря чему 365 средних солнечных суток равны 366 звездным суткам. Поэтому для перехода от звездного времени к среднему солнечному надо сделать поправку: $7\ ч\ 20\ мин \cdot \frac{365}{366} \approx 7\ ч\ 19\ мин$. Следовательно, по среднему солнечному времени заход солнца произойдет через 7 *ч* 19 *мин* после его верхней кульминации.

2. Чтобы перейти от среднего солнечного времени к истинному солнечному времени, надо вычесть еще одну поправку, вызываемую разницей во времени между кульминацией истинного и среднего солнц. Эта поправка вычисляется по специальному уравнению времени на каждый день и указывается в астрономических таблицах. На 25 апреля она равна 2 минутам, следовательно, по истинному солнечному времени заход Солнца произойдет в 7*ч* 17 *мин*.

3. Следующая поправка вызывается тем, что Москва отнесена ко II поясу местного времени, средний меридиан которого на 30° восточнее Гринвича, а меридиан обсерватории Москвы находится от Гринвича на 37°38′ (долгота обсерватории Москвы $\lambda = 37°38'$). Разница в 7°38′ дает во времени 30 минут, поэтому солнце заходит в Москве в 7 *ч* 17 *мин*—30 *мин*=6 *ч* 47 *мин*.

4. Остается, наконец, принять во внимание, что для более рационального расходования электроэнергии на освещение декретом СНК СССР от 16 июня 1930 г. часовые стрелки по всей нашей стране передвинуты на час вперед. Получающийся при этом счет времени называется декретным, поэтому по декретному времени в Москве 25 апреля солнце заходит в 7 *ч* 47 *мин* вечера, или в 19 *ч* 47 *мин*, если вести счет времени от начала суток.

Упражнения.

1. 16 сентября склонение Солнца $\delta = 2°44'$. В какой точке неба находится оно в Вашингтоне ($\varphi = 38°53'$ с. ш.) через 4 *ч* 20 *мин* после своей верхней кульминации?

2. Определить продолжительность дня в Амстердаме ($\varphi = 52°23'$) 21 июня. Склонение Солнца в этот день $\delta = 23°30'$.

3. Какова продолжительность самого короткого дня в Стокгольме ($\varphi = 59°21'$)? Такой день, как известно, бывает 22 декабря во время зимнего солнцестояния при склонении Солнца $\delta = -23°27'$.

4. 21 июня склонение Солнца $\delta = 23°30'$. На какой широте день в эти сутки равен трем часам?

5. Определить длину тени, отбрасываемой на горизонтальную поверхность зданием Московского университета 1 июля в 16 *ч* 20 *мин.* звездного времени, если высота здания $h_1 = 242$ *м*, а склонение Солнца в этот день $\delta = 23°06'$. Широта обсерватории Москвы $\varphi = 55°44'$.

6. 26 января склонение Солнца $\delta = -18°46'$. В какой точке горизонта заходит Солнце в этот день в Берлине ($\varphi = 52°30'$)?

7. Какие горизонтальные координаты (высоту h и азимут A) будет иметь Солнце во время самого длинного дня в Брюсселе ($\varphi = 50°51'$) в 7 *ч* утра? Самый длинный день бывает, как известно, во время летнего солнцестояния 22 июня, когда склонение Солнца $\delta = 23°30'$.

8. Через сколько времени после своей верхней кульминации находится Солнце в Париже ($\varphi = 48°50'$) во время самого длинного дня (т. е. при $\delta = 23°30'$) прямо на западе? На какой высоте находится Солнце в этот момент и сколько времени остается еще до его захода?

ПРИЛОЖЕНИЕ КРУГОВЫХ ФУНКЦИЙ В АЛГЕБРЕ

ГЛАВА IV

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ПРЕДСТАВЛЕННЫМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ ВИДЕ

§ 15. Геометрическое изображение комплексных чисел на плоскости и конкретное истолкование действий I ступени с этими числами

Из курса школьной алгебры известно, что всякое комплексное число имеет вид:

$$x + yi, \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

где x и y — действительные числа, а i — так называемая мнимая единица, квадрат которой равен минус единице. Число x называют действительной частью, а yi — мнимой частью комплексного числа (1).

Два комплексных числа $x_1 + y_1 i$ и $x_2 + y_2 i$ считаются равными, если равны их действительные части и равны коэффициенты мнимых частей, т. е. $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Действия I ступени (сложение и вычитание) с комплексными числами производят по формулам:

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$
$$(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

Так, например, применив эти формулы, найдем, что:

$$(2 + 7i) + (1 - 5i) = 3 + 2i,$$
$$(2 + 7i) - (1 - 5i) = 1 + 12i.$$

Естественно поставить вопрос: имеют ли какой-либо геометрический смысл указанные операции с комплексными числами?

В поисках ответа на этот вопрос вспомним, какое конкретное геометрическое толкование было дано в алгебре сложению и вычитанию действительных чисел. Каждое действительное число x мы изображали точкой M на числовой оси (рис. 31) так, чтобы длина направленного отрезка $\overline{OM}$ была равна $|x|$, а направление отрезка соответствовало знаку числа x: если $x>0$, то направление $\overline{OM}$ совпадает с направлением оси, при $x<0$ направление $\overline{OM}$ противоположно направлению оси

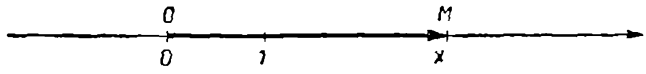


Рис. 31.

Правило сложения и вычитания действительных чисел выражается при этом в геометрическом сложении соответствующих направленных отрезков на числовой оси. Пусть, например, требуется найти сумму и разность чисел -5 и $+3$. На числовой оси этим числам соответствуют точки $A(-5)$ и $B(+3)$ (рис. 32). Находим сумму направ-

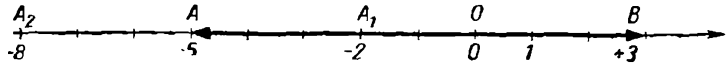


Рис. 32.

ленных отрезков $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$:

$$\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AA_1}=\overline{OA_1},$$

где $\overline{AA_1}=\overline{OB}$; видим, что величина[1] отрезка $\overline{OA_1}$ равна -2, следовательно,

$$(-5)+(+3)=-2.$$

Вычитание направленных отрезков также сводится к сложению, а именно:

$$\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{OA}+(-\overline{OB});$$

[1] Величиной направленного отрезка, расположенного на оси, мы называем его длину, взятую со знаком плюс, если направление отрезка совпадает с направлением оси, и со знаком минус, если направление отрезка противоположно направлению оси.

а так как $-\overline{OB} = \overline{BO}$, то получаем:

$$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{OA} + \overline{BO} = \overline{OA} + \overline{AA_2} = \overline{OA_2},$$

где $\overline{AA_2} = \overline{BO}$.

Видим, что величина отрезка $\overline{OA_2}$ равна -8, следовательно,

$$(-5) - (+3) = -8.$$

Вернемся опять к комплексным числам. Нельзя ли и с такими числами поступать аналогичным путем, т. е. изображать их точками и операции с ними сводить к соответствующим операциям с направленными отрезками?

Полный ответ на этот вопрос был дан великим немецким математиком Карлом Фридрихом Гауссом (1777 — 1855). Гаусс предложил изображать комплексные числа точками на плоскости с осями координат OX и OY так, чтобы числу $x + yi$ соответствовала точка $M(x, y)$ с координатами x и y (рис. 33).

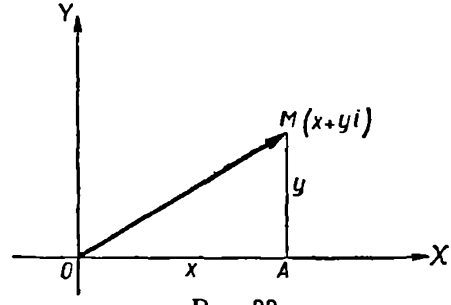


Рис. 33.

Нетрудно видеть, что при этом каждому комплексному числу соответствует на плоскости единственная точка и, наоборот, каждой точке плоскости соответствует вполне определенное единственное комплексное число. Такую плоскость называют обычно числовой или Гауссовой плоскостью, причем ось OX называют действительной, а ось OY — мнимой, так как точками оси OX изображаются комплексные числа вида $x + 0i$, отождествляемые с действительными числами, а точками оси $0y$ изображаются чисто мнимые комплексные числа вида $0 + yi$.

Аналогия с действительными числами проходит и далее: так же как на числовой оси, каждому действительному числу x соответствует направленный отрезок $\overline{OM}$ с началом в точке O и концом в точке $M(x)$ (рис.31), так и на плоскости Гаусса каждому комплексному числу $x + yi$ соответствует направленный отрезок $\overline{OM}$ с началом в точке O и концом в точке $M(x, y)$.

Из прямоугольного треугольника OMA нетрудно найти длину вектора $\overline{OM}$; она выразится числом $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Это число называют модулем комплексного числа $x+yi$. Если, в частности, $y=0$, то комплексное число имеет вид $x+0i$, т. е. является действительным; в этом случае модуль комплексного числа совпадает с абсолютным значением действительного числа:

$$r=\sqrt{x^2+0^2}=|x|.$$

Учитывая это обстоятельство, модуль комплексного числа $x+yi$ записывают также в виде $|x+yi|$.

Аналогия с действительными числами сохраняется и в отношении действий сложения и вычитания: сложение

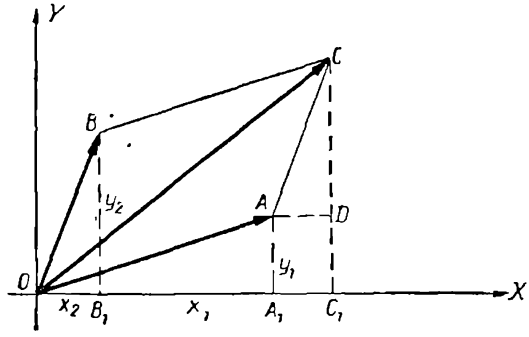


Рис. 34.

и вычитание комплексных чисел также отражает сложение и вычитание соответствующих векторов на плоскости.

Действительно, пусть даны комплексные числа

$$z_1=x_1+y_1i \text{ и } z_2=x_2+y_2i.$$

На плоскости Гаусса им соответствуют две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ и векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ (рис. 34). Отметим, что $OA_1=x_1$, $A_1A=y_1$, $OB_1=x_2$ и $B_1B=y_2$. Построим на отрезках $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ как на сторонах параллелограмм $AOBC$. Тогда вектор $\overline{OC}$, служащий диагональю параллелограмма, равен сумме векторов $\overline{OA}+\overline{OB}$, а точке C будет соответствовать комплексное число z, равное сумме данных чисел z_1 и z_2, т. е.

$$z=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i.$$

В самом деле, проведем $CC_1 \parallel OY$ и $AD \parallel OX$, получим прямоугольный треугольник ACD, равный треугольнику OBB_1 по гипотенузе и острому углу, а потому будем иметь:

$$OC_1 = OA_1 + AD = OA_1 + OB_1 = x_1 + x_2,$$
$$C_1C = C_1D + DC = A_1A + B_1B = y_1 + y_2$$

и, следовательно, точке C соответствует комплексное число $z = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$.

Итак, сложение комплексных чисел тесно связано с геометрическим сложением векторов на плоскости, а последнее, как известно, имеет реальный смысл и широкое применение в физике и механике.

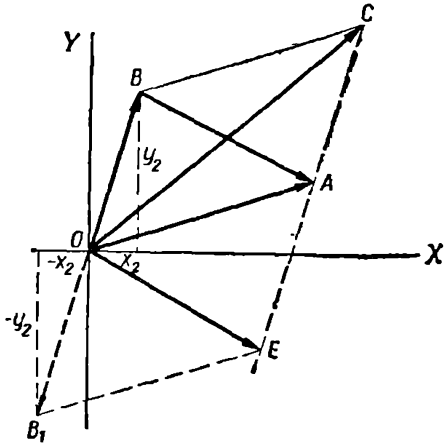


Рис. 35.

Вычитание комплексных чисел также отражает геометрическое вычитание векторов на плоскости.

Пусть точкам A и B (рис. 35) соответствуют числа

$$z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{и} \quad z_2 = x_2 + y_2 i.$$

Найдем разность векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$:

$$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{OA} + (-\overline{OB}) = \overline{OA} + \overline{OB_1},$$

где $\overline{OB_1} = -\overline{OB}$, так как вектор $\overline{OB_1}$ имеет одинаковую длину с вектором $\overline{OB}$, но противоположно направлен этому вектору. Понятно, что точке B_1 соответствует комплексное число $(-x_2) + (-y_2)i = -z_2$.

По правилу сложения векторов находим:

$$\overline{OA} + \overline{OB_1} = \overline{OE},$$

причем, по доказанному выше, вектору $\overline{OE}$ соответствует комплексное число z', равное сумме чисел z_1 и $-z_2$, т. е.

$$z' = z_1 + (-z_2) = [x_1 + (-x_2)] + [y_1 + (-y_2)]i =$$
$$= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i = z_1 - z_2.$$

Как видим, разности векторов

$$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{OE}$$

соответствует разность комплексных чисел

$$z_1 - z_2 = z'.$$

Отметим попутно, что вектор $\overline{OE}$ можно заменить равным ему вектором $\overline{BA}$, который служит второй диагональю параллелограмма $AOBC$ и имеет направление от конца «вычитаемого» вектора $\overline{OB}$ к концу «уменьшаемого» вектора $\overline{OA}$.

Наконец, вернемся еще раз к сложению комплексных чисел, чтобы установить важную зависимость между модулями этих чисел и модулем их суммы. Так как модули комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ равны длинам векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, то будем иметь:

$$|z_1 + z_2| = OC, \quad |z_1| = OA, \quad |z_2| = OB = AC$$

(OB и AC равны как противоположные стороны параллелограмма).

Но отрезки OC, OA и AC образуют треугольник OAC, поэтому справедливо соотношение:

$$OA - AC \leqslant OC \leqslant OA + AC,$$

откуда получаем:

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

т. е. *модуль суммы не больше суммы модулей слагаемых и не меньше разности модулей слагаемых.*

Вопросы и упражнения.

1. На плоскости Гаусса построить точки и направленные отрезки, соответствующие следующим числам: 1, $-\sqrt{2}$, i, $-2i$, $3 + 5i$, $1 - i\sqrt{2}$, $-\sqrt{3} - i$.

2. Найти модули чисел, заданных в предыдущем упражнении, и указать геометрический смысл этих модулей.

3. Доказать, что комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда модуль его равен нулю.

4. Записать общий вид комплексных чисел, изображающихся на плоскости Гаусса:

1) точками оси OX;

2) точками оси OY;

3) точками биссектрисы угла XOY;

4) точками прямой, параллельной оси OY и отсекающей на оси OX отрезок $OA = 1$.

5. Какому условию должны удовлетворять величины x и y комплексного числа $z = x + yi$, которому соответствует на плоскости Гаусса:

1) точка, принадлежащая второй четверти
2) точка, расположенная ниже оси OX,
3) точка, принадлежащая биссектрисам координатных углов,
4) точка, лежащая на окружности с центром O и радиусом $R = 2$?

6. На плоскости Гаусса найти геометрическое место точек, соответствующих комплексным числам вида:

1) $z = x + 0i$;
2) $z = 0 + yi$;
3) $z = x + yi$, когда $x > 0$ и $y > 0$;
4) $z = x + yi$, когда $x > 0$, а $y < 0$;
5) $z = x + yi$, когда $y = x$;
6) $z = x + yi$, когда $y = -x$;
7) $z = x + yi$, когда $y = 3x$;
8) $z = 4 + yi$;
9) $z = x - 2i$;
10) $z = x + yi$, когда $y = x^2$;
11) $z = x + yi$, когда $y > x^2$;
12) $z = x + yi$, когда $x^2 + y^2 = 1$;
13) $z = x + yi$, когда $|z| = 2$;
14) $z = x + yi$, когда $1 \leqslant |z| \leqslant 2$.

7. На плоскости Гаусса (рис 36) изображен квадрат $ABCD$ со стороной, равной 1. Записать комплексные числа, соответствующие вершинам квадрата. Найти сперва геометрическим путем (используя соответствующие векторы), а потом алгебраическим путем:

1) сумму и разность чисел, соответствующих точкам A и D;
2) » » » » » A и B;
3) » » » » » C и D;
4) » » » » » A и C.

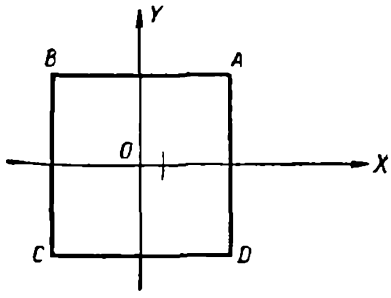


Рис. 36.

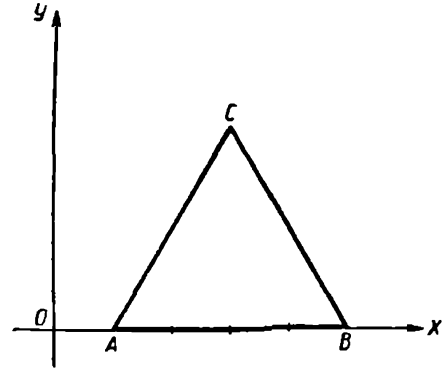


Рис. 37.

8. На плоскости Гаусса (рис. 37) изображен равносторонний треугольник ABC с основанием $AB = 4$ и расположенным на оси OX так, что отрезок $OA = 1$.

Требуется:

1) записать комплексные числа, соответствующие точкам A, B и C;

2) найти модули этих чисел;

3) найти сумму и разность чисел, изображенных точками A и C, а затем точками B и C;

4) найти сумму чисел, изображенных точками A, B и C.

§ 16. Комплексные числа в тригонометрической форме

Возьмем комплексное число $z = x + yi$; на числовой плоскости ему соответствует точка M с координатами x, y (рис. 38) или вектор $\overrightarrow{OM}$.

Обозначим через r длину вектора $\overrightarrow{OM}$, а через φ — угол, который образует вектор с положительным направлением оси OX. Затем опишем радиусом r окружность с центром в точке O.

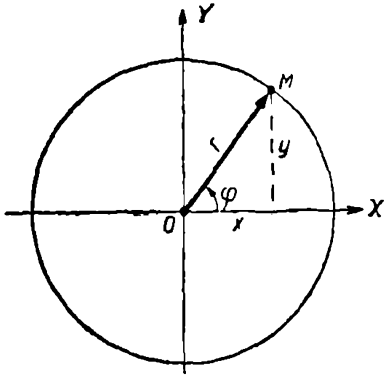


Рис. 38.

По определению круговых функций угла имеем:

$$\frac{x}{r} = \cos\varphi \quad \text{и} \quad \frac{y}{r} = \sin\varphi,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Используя эти соотношения, данное комплексное число можно записать в следующем виде:

$$z = x + yi = r\cos\varphi + i\cdot r\sin\varphi$$

или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Это и есть так называемая тригонометрическая форма комплексного числа.

Число r, как известно, называют модулем комплексного числа z, а число φ — его аргументом, что коротко иногда записывают так:

$$|z| = r, \quad \arg z = \varphi.$$

Равенства (1) дают возможность находить модуль и аргумент комплексного числа, не прибегая к геометрическим построениям.

Действительно, возведем эти равенства в квадрат и сложим результаты по частям, получим:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$

откуда

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (3)$$

Зная модуль r, можно по формулам (1) определить аргумент φ, что мы покажем на примерах. Однако следует иметь в виду, что аргумент φ для данного комплексного числа определяется неоднозначно. Если комплексное число z имеет вид

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

то будет верным в силу периодичности синуса и косинуса любое из следующих представлений этого числа:

$$z = r[\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)],$$

где k — произвольное целое число. Это отнюдь не противоречит утверждению, что каждое комплексное число изображается единственным вектором, так как все углы вида $\varphi + 2\pi k$ с начальной стороной OX имеют второй своей стороной один и тот же луч OM.

Отметим, что можно говорить о нуле-векторе, т. е. точке с модулем нуль без указания аргумента этой точки.

Примеры. 1. Записать в тригонометрической форме число $z = -45 - i\cdot 15\sqrt{3}$.

По формуле (3) находим модуль этого числа:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-45)^2 + (-15\sqrt{3})^2} = 30\sqrt{3};$$

соотношения (1) дают:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{-45}{30\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{-15\sqrt{3}}{30\sqrt{3}} = -\frac{1}{2},$$

откуда, учитывая знаки синуса и косинуса, находим:

$$\varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi.$$

Итак, $-45 - 15\sqrt{3}\cdot i = 30\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

Верна будет и такая запись:

$$-45-15\sqrt{3}\,i = 30\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)\right],$$

где k — целое.

Примечание. При отыскании аргумента φ комплексного числа $x+iy$, когда $x \neq 0$, можно пользоваться равенством $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, вытекающим из соотношений (1); четверть, в которой следует брать искомый угол φ, легко определить по знакам x и y, т. е. по знакам координат точки $M(x, y)$, изображающей данное комплексное число.

Так, в данном примере имеем: $x = 45$, $y = -15\sqrt{3}$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-15\sqrt{3}}{-45} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Число изображается точкой $M(-45; -15\sqrt{3})$, расположенной в III четверти следовательно, угол $\varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{8}\pi$.

2. Даны два сопряженных комплексных числа: $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ и $z_2 = \sqrt{3} - 3i$. Требуется записать в тригонометрической форме каждое из этих чисел, их сумму и их разность.

Решение. 1) Находим модули данных чисел:

$$r_1 = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

$$r_2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Находим аргументы φ_1 и φ_2:

$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, число z_1 изображается в I четверти, следовательно, $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$;

$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$, число z_2 изображается в IV четверти, следовательно, $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$.

Итак, $z_1 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

$$z_2 = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

2) Находим сумму и разность данных комплексных чисел:

$$z_1 + z_2 = 2\sqrt{3} + 0 \cdot i;\ z_1 - z_2 = 0 + 6i.$$

Определяем модули:

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 0^2} = 2\sqrt{3};\ |z_1 - z_2| = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6.$$

Определяем аргумент суммы φ_3:

$$\cos\varphi_3 = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1,\ \sin\varphi_3 = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0,\ \varphi_3 = 0.$$

Определяем аргумент разности φ_4:

$$\cos\varphi_4 = \frac{0}{6} = 0,\quad \sin\varphi_4 = \frac{6}{6} = 1,\ \varphi_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, получаем:

$$z_1 + z_2 = 2\sqrt{3}(\cos 0 + i\sin 0);$$

$$z_1 - z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Замечание Комплексным числам z_1 и z_2 соответствуют на плоскости Гаусса (рис. 39) векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, симметричные относительно оси OX. Это обстоятельство не случайно. Всякие сопряженные комплексные числа изображаются на числовой плоскости векторами, симметричными относительно действительной оси.

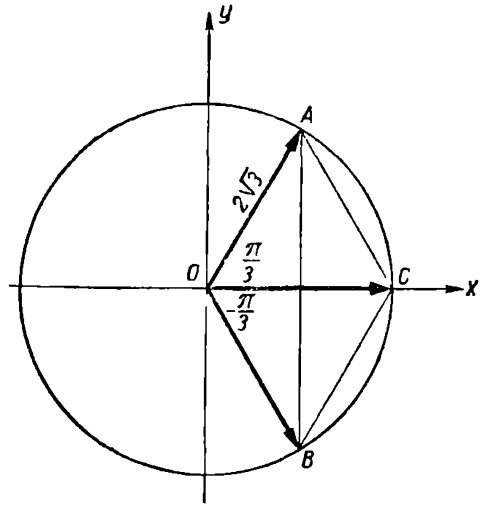


Рис 39.

Построив на векторах $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ (как на сторонах) параллелограмм, получаем еще два вектора $\overline{OC}$ и $\overline{BA}$. Первый из них, как известно (§ 15), выражает сумму $\overline{OA} + \overline{OB}$, а второй — разность $\overline{OA} - \overline{OB}$. То обстоятельство, что вектор $\overline{OC}$ оказался на действительной оси OX, а вектор $\overline{BA}$ перпендикулярен этой оси, вполне согласуется как с тригонометрической формой суммы и разности данных чисел z_1 и z_2, так и с тем, что $z_1 + z_2 = 2\sqrt{3}$ — число действительное, а $z_1 - z_2 = 6i$ — чисто мнимое число.

Полезно, наконец, заметить, что

длина вектора $\overline{BA} = |z_1 - z_2| = 6$,

длина вектора $\overline{OC} = |z_1 + z_2| = 2\sqrt{3}$.

Вопросы и упражнения.

1. На рисунке 36 (стр. 545) на плоскости Гаусса изображен квадрат $ABCD$. Запишите в тригонометрической форме комплексные числа, соответствующие вершинам этого квадрата и серединам его сторон.

2. На плоскости Гаусса постройте окружность с центром O и радиусом $R = 2$, разделите ее на 12 равных частей точками A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_{11}$ так, чтобы точка A_0 принадлежала лучу OX. Запишите в тригонометрической форме комплексные числа, соответствующие точкам A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_{11}$.

3. Запишите в тригонометрической форме следующие числа:
-2, $3i$, $\sqrt{3} - i$, $-5 + 5i$.

4. Найти общий тригонометрический вид комплексных чисел, которые изображаются на плоскости Гаусса точками луча OM, образующего с осью OX угол $\varphi = \frac{\pi}{7}$.

5. Найти на плоскости Гаусса геометрическое место точек, соответствующих комплексным числам вида:

1) $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$;

2) $z = r\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$;

3) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, когда $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$;

4) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, когда $r > 1$;

5) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, когда $\begin{cases} 1 < r < 3. \\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

§ 17. Действие II ступени с комплексными числами в тригонометрической форме и геометрическое истолкование этих действий

Как известно из алгебры, произведение комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, находится по правилу умножения двучленов с учетом, что $i^2 = -1$. Короче:

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \qquad (1)$$

Еще проще находится произведение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Действительно, пусть даны в такой форме два числа:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

По формуле (1) получаем:

$$z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)].$$

Но по теореме сложения круговых функций

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2),$$
$$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2),$$

следовательно,

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \qquad (2)$$

Как видим, умножение комплексных чисел в тригонометрической форме сводится к умножению модулей этих чисел и сложению аргументов. Причем это правило справедливо для любого числа сомножителей z_1, z_2, $z_3,\ldots,z_n$, т. е.

$$z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n = r_1r_2\ldots r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)]. \qquad (2a)$$

Убедимся в этом методом математической индукции.

1. Если число сомножителей $n = 2$, то формула (2а) совпадает с уже доказанным равенством (2).

2. Допустим, что формула (2а) справедлива для произведения $n-1$ комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, заданных в тригонометрической форме, т. е.

$$z_1\cdot z_2\ldots z_{n-1} = r_1r_2\ldots r_{n-1}[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{n-1}) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{n-1})],$$

или короче:

$$z_1\cdot z_2\ldots z_{n-1} = R(\cos A + i\sin A),$$

где $R = r_1r_2\ldots r_{n-1}$ и $A = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1}$.

3. Находим произведение чисел $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}, z_n$:

$$z_1\cdot z_2\ldots z_{n-1}z_n = (z_1z_2\ldots z_{n-1})\cdot z_n = \left[\begin{array}{c}\text{сочетательное свойство}\\ \text{произведения}\end{array}\right]$$
$$= R(\cos A + i\sin A)\cdot r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) = \left[\begin{array}{c}\text{допущение 2-го}\\ \text{шага}\end{array}\right]$$
$$= R\cdot r_n[\cos(A + \varphi_n) + i\sin(A + \varphi_n)]. \quad [\text{по формуле (2)}]$$

Подставив значения R и A, получаем:

$$z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_{n-1}\cdot z_n = r_1r_2\ldots r_{n-1}r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1} + \varphi_n] + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1} + \varphi_n)].$$

Итак, теорема доказана.

Пусть, например, требуется найти произведение комплексных чисел:

$$z_1 = 1{,}5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \text{ и } z_3 = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

По доказанному правилу получаем:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 1{,}5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = -1 +$$

$$+ i \cdot 0 = -1.$$

Результат получился весьма неожиданный: произведение заданных мнимых чисел оказалось действительным числом, равным —1. Почему? Ответ на этот вопрос раскрывается геометрическим объяснением операции умножения комплексных чисел.

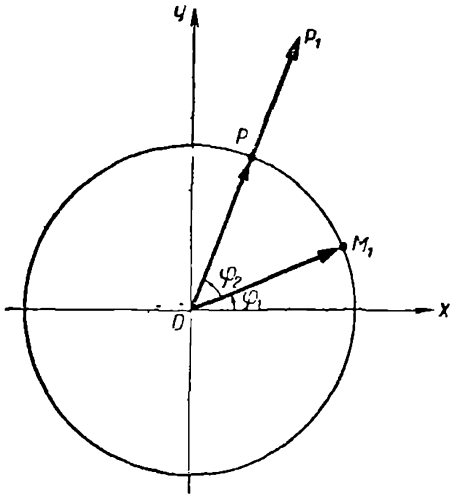


Рис. 40.

Действительно, построим на плоскости Гаусса вектор $\overrightarrow{OM_1}$, соответствующий числу $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ (рис. 40).

Повернем этот вектор на угол φ_2, получим новый вектор $\overrightarrow{OP}$, образующий с осью OX угол $\varphi_1 + \varphi_2$; длина у него по-прежнему будет равна r_1. Вектор $\overrightarrow{OP}$ будет соответствовать комплексному числу z_1' с модулем r_1 и аргументом $\varphi_1 + \varphi_2$, т. е.

$$z_1' = r_1[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Теперь подвергнем вектор $\overrightarrow{OP}$ «растяжению» (или «сжатию») в r_2 раз, получим новый вектор $\overrightarrow{OP_1}$, образу-

ющий с осью OX прежний угол $\varphi_1+\varphi_2$ и имеющий длину в $r_1 \cdot r_2$ единиц. Понятно, что этому вектору соответствует новое комплексное число z с модулем $r_1 r_2$ и аргументом $\varphi_1 + \varphi_2$, т. е.

$$z = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Но такой же результат можно получить умножением данного числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ на комплексное число $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, следовательно, *умножение на комплексное число z_2 равносильно повороту соответствующего вектора на угол φ_2 и его растяжению (или сжатию) в r_2 раз, где φ_2 — аргумент числа z_2 и r_2 — модуль этого числа.*

В частности, умножение на i равносильно повороту вектора на угол $\frac{\pi}{2}$, так как

$$i = 0 + 1 \cdot i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

а умножение на -1 равносильно повороту на угол π, так как

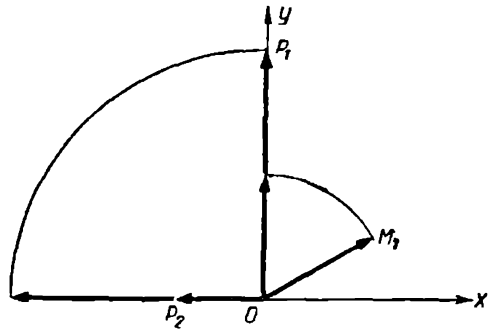


Рис. 41.

$$-1 = -1 + 0 \cdot i = 1(\cos\pi + i\sin\pi).$$

В предыдущем примере число $z_1 = 1{,}5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ умножили на $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, а затем полученное произведение умножили еще на число $z_3 = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Геометрически это значит, что вектор $\overline{OM_1}$, изображающий число z_1 (рис. 41), повернули на угол $\frac{\pi}{3}$ и растянули вдвое, затем полученный таким путем вектор $\overline{OP_1}$ повернули еще на угол $\frac{\pi}{2}$ и сжали в 3 раза; в результате получился вектор $\overline{OP_2}$, расположенный на действительной оси OX. Величина этого вектора равна -1, т. е. произведению данных комплексных чисел.

Перейдем теперь к делению комплексных чисел в тригонометрической форме.

Частное двух чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, из которых второе не равно нулю, можно записать в виде произведения:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)};$$

умножим числитель и знаменатель этой дроби на $(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$, получим:

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = \frac{1}{r_2}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$$

или

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}\left[\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\right]\varphi_2. \qquad (3)$$

Таким образом, можно записать:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\frac{1}{r_2}\Big[\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\Big],$$

откуда по правилу умножения получаем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \qquad (4)$$

Итак, *при делении комплексных чисел в тригонометрической форме делятся модули чисел, а аргументы вычитаются.*

Пример. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$,

$$z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{7} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7} - \frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{21}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{21}\right)\right].$$

Рекомендуем читателю самостоятельно выяснить геометрический смысл деления как действия, обратного умножению.

Вопросы и упражнения.

1. Найти произведение чисел $z_1 = 0{,}25\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ и $z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$ и дать геометрическое истолкование операции умножения.

2. Найти произведение чисел: $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ и $z_3 = 0{,}5\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$ и дать геометрическое объяснение получаемому результату.

3. Вектор $\overline{OM}$, изображающий на плоскости Гаусса число $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, повернули на угол $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ вокруг точки O, а затем растянули в отношении $1 : \sqrt{2}$. Какое число соответствует полученному таким путем вектору?

4. На плоскости Гаусса даны:

1) вектор $\overline{OM}_1$, соответствующий числу $z_1 = \sqrt{2}(\cos 1{,}5 + i\sin 1{,}5)$, и 2) вектор $\overline{OM}_2$, соответствующий числу $z_2 = \sqrt{3}(\cos 2{,}4 + i\sin 2{,}4)$.

Какими геометрическими преобразованиями можно перевести вектор $\overline{OM}_1$ в $\overline{OM}_2$? Какая алгебраическая операция соответствует этим преобразованиям?

5. Найти частное: $\dfrac{1{,}2(\cos 0{,}3 + i\sin 0{,}3)}{0{,}5(\cos 1 + i\sin 1)}$.

6. Найти кратчайшим путем:

1) произведение $(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot i$;

2) частное $(\cos\alpha + i\sin\alpha) : i$.

7. Найти $x = \dfrac{3a^2b}{2c}$ и $y = \dfrac{1}{abc}$, при $a = \cos 1 + i\sin 1$, $b = 2(\cos 2 + i\sin 2)$ и $c = 3(\cos 3 + i\sin 3)$.

8. Проверить равенство:

$$(1+i)(1+i\sqrt{3})(\cos\varphi + \sin\varphi) = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\varphi + \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{7\pi}{12}\right)\right].$$

9. Число $\cos 361 + i\sin 361$ является произведением 19 комплексных чисел. Найти эти числа, если известно, что модули их равны, а аргументы образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 2.

10. Доказать, что при $A+B+C=\pi$ выполняется равенство: $(\cos A + i\sin A)(\cos B + i\sin B)(\cos C + i\sin C) = -1$.

§ 18. Действия III ступени с комплексными числами в тригонометрической форме

Мы видели, как просто выполняется умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Но еще более ощутимо преимущество такой формы комплексных чисел в операциях возведения в степень и извлечения корня.

Пусть требуется возвести в n-ю степень число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Опираясь на определение степени с натуральным показателем и правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме, получаем:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot \ldots \cdot r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = rr\ldots r[\cos(\varphi + \varphi + \ldots + \varphi) + i\sin(\varphi + \varphi + \ldots + \varphi)] = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т. е.

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1)$$

Итак, *чтобы возвести комплексное число в степень с натуральным показателем, достаточно возвести в эту степень модуль числа и умножить аргумент на показатель степени.*

При $r = 1$ равенство (1) дает так называемую формулу Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (2)$$

Эта формула справедлива и при $n = 0$ (что проверяется непосредственно), а также при целом отрицательном показателе.

Действительно,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi}.$$

Но по формуле (3, § 17)

$$\frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi),$$

следовательно,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi). \qquad (3)$$

Пример. Число $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ возведем в восьмую степень, получим:

$$z^8 = 2^8\left(\cos\frac{\pi}{12}\cdot 8 + i\sin\frac{\pi}{12}\cdot 8\right) = 256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

а $z^{-8} = 2^{-8}\left[\cos\frac{\pi}{12}(-8) + i\sin\frac{\pi}{12}(-8)\right] =$

$$= \frac{1}{256}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Рассмотрим теперь извлечение корня из комплексного числа. Найдем корень n-й степени из числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Обозначим модуль искомого числа через ρ, а аргумент через Θ, тогда

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\Theta + i\sin\Theta);$$

по определению корня имеем:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = [\rho(\cos\Theta + i\sin\Theta)]^n,$$

или

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta).$$

Но два комплексных числа равны только в том случае, когда равны их модули, а аргументы равны или отличаются друг от друга на кратное 2π, поэтому

$$\rho^n = r \text{ и } n\Theta = \varphi + 2\pi k \quad (k \text{ — целое}),$$

откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$ и $\Theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, где $\sqrt[n]{r}$ — арифметический корень, так как модуль ρ есть число неотрицательное.

Таким образом, искомое число

$$u = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \quad (4)$$

Число k в формуле (4) может принимать любое целое значение, однако достаточно ограничиться значениями $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, при которых получим n различных значений искомого корня:

$$u_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$u_1 = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

$$u_2 = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot 2\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)\right],$$

$$u_3 = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot 3\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot 3\right)\right],$$

. . . . . .

$$u_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(n-1)\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(n-1)\right)\right].$$

Если положить $k = n,\ n+1,\ \ldots$, то значения корня начнут повторяться; так

$$u_n = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot n\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\cdot n\right)\right] =$$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) = u_0,$$

$$u_{n+1} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(n+1)\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\pi}{n}(n+1)\right)\right] = u_1 \text{ и т. д.}$$

Примеры.

1. Найдем корень третьей степени из числа $z = -2i$. Для этого запишем данное число в тригонометрическом виде:

$$r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2,$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{2} = 0, \quad \sin\varphi = \frac{-2}{2} = -1.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ и потому

$$z = -2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

По формуле (4) имеем:

$$u = \sqrt[3]{-2i} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right).$$

Полагая $k=0,\ 1,\ 2$, находим все значения корня:

$$u_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i\sqrt[3]{2},$$

$$u_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right),$$

$$u_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right).$$

2. Найдем все значения корня $\sqrt[5]{1}$. Запишем 1 в тригонометрической форме:

$$1=1+0\cdot i,\quad r=1,\ \varphi=0.$$

Поэтому $1=\cos 0+i\sin 0$.

По формуле (4) имеем:

$$u=\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2\pi k}{5}+i\sin\frac{0+2\pi k}{5}.$$

Полагая $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, находим:

$$u_0=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$u_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5},$$

$$u_2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5},$$

$$u_3=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5},$$

$$u_4=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}.$$

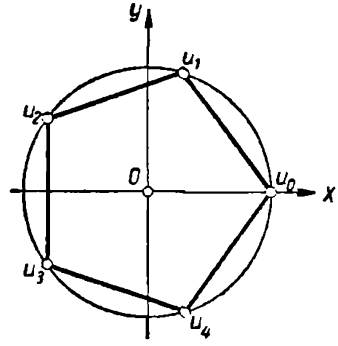


Рис 42.

Изобразим числа u_0, u_1, u_2, u_3 и u_4 точками на числовой плоскости. У этих чисел модули одинаковы и равны 1, следовательно, соответствующие им точки будут лежать на окружности с центром O и радиусом $r=1$ (рис. 42). А так как аргументы этих чисел 0, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ и $\frac{8\pi}{5}$ образуют арифметическую прогрессию, члены которой делят промежуток $[0;\ 2\pi]$ на 5 равных частей, то указанные точки разделят окружность на 5 равных частей.

Вообще значения корня u_0, u_1, u_2, ... , u_{n-1}, определяемые по формуле (4), изображаются на числовой плоскости точками окружности с центром в начале координат и радиусом, равным модулю этих чисел $\sqrt[n]{r}$, причем окружность делится этими точками на n равных частей. Причина понятна: модули у всех чисел одинаковы, а аргументы

$$\frac{\varphi}{n},\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot 2,\ \frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot 3,\ \ldots,$$

$$\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}(n-1)$$

образуют арифметическую прогрессию, члены которой делят промежуток $[0;\ 2\pi]$ на n равных частей.

Вопросы и упражнения.

1. Дайте геометрическое истолкование операции возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической форме.

Указание. Рассмотрите векторы на плоскости Гаусса, соответствующие числам $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$, и выясните, какими преобразованиями можно совершить переход от первого вектора ко второму.

2. Найти кратчайшим путем следующие степени:

$$(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^{12};\quad (3-i\sqrt[4]{9})^{24};\quad [(1-i)^n]^4.$$

3. Доказать, что $(1+i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right)$.

4. Извлечь корни: $\sqrt{i}$; $\sqrt[3]{2-2i}$; $\sqrt[4]{-4}$; $\sqrt[5]{32}$.

5. Вычислить $\sqrt{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

6. Доказать, что

$$[(1+\cos x)+i\sin x]^n=2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2}+i\sin\frac{nx}{2}\right).$$

ГЛАВА V

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ КРУГОВЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ СЛЕДСТВИЙ

§ 19. Круговые функции от суммы n аргументов

В основном курсе тригонометрии доказана справедливость следующих тождеств:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2, \tag{1}$$

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{1 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}. \tag{3}$$

Эти тождества называют теоремами сложения круговых функций, так как с их помощью круговые функции от суммы двух аргументов выражаются через соответствующие функции этих аргументов.

А нельзя ли найти аналогичные тождества для круговых функций от суммы $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ любого числа аргументов?

Оказывается, это можно сделать, используя установленное нами в предыдущем параграфе правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме.

Действительно, найдем по такому правилу произведение комплексных чисел:

$$\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1, \quad \cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2, \quad \ldots, \quad \cos\alpha_n + i\sin\alpha_n,$$

получим

$$(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n) =$$
$$= \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

В левой части этого равенства вынесем за скобки $\cos\alpha_1$ $\cos\alpha_2$, ..., $\cos\alpha_n$, получим:

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n[(1+i\operatorname{tg}\alpha_1)(1+i\operatorname{tg}\alpha_2)\ldots(1+i\operatorname{tg}\alpha_n)]=$$
$$=\cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n).$$

Двучлены в квадратных скобках отличаются между собой только вторыми слагаемыми, поэтому их произведение можно найти по формуле:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\ldots(x+a_n)=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+$$
$$+S_3x^{n-3}+\ldots+S_n,$$

где

$$S_1=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n,$$
$$S_2=a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n,$$
$$S_3=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\ldots+a_{n-2}a_{n-1}a_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n=a_1a_2a_3\ldots a_n.$$

В нашем произведении $x=1$, $a_1=i\operatorname{tg}\alpha_1$, $a_2=i\operatorname{tg}\alpha_2$, $a_3=i\operatorname{tg}\alpha_3$, ..., $a_n=i\operatorname{tg}\alpha_n$, поэтому

$$S_1=i(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n),$$
$$S_2=i^2(\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_3+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_{n-1}\operatorname{tg}\alpha_n),$$
$$S_3=i^3(\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_4+\ldots+$$
$$+\operatorname{tg}\alpha_{n-2}\operatorname{tg}\alpha_{n-1}\operatorname{tg}\alpha_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_n=i^n\cdot\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3\ldots\operatorname{tg}\alpha_n;$$

короче: $S_1=it_1$, $S_2=i^2t_2$, $S_3=i^3t_3$, ..., $S_n=i^nt_n$,
где t_1 — сумма тангенсов,
t_2 — сумма произведений тангенсов, взятых по два,
t_3 — сумма произведений тангенсов, взятых по три.
и т. д., t_n — произведение всех тангенсов.
Итак,

$$(1+i\operatorname{tg}\alpha_1)(1+i\operatorname{tg}\alpha_2)(1+i\operatorname{tg}\alpha_3)\ldots(1+i\operatorname{tg}\alpha_n)=$$
$$=1+it_1+i^2t_2+i^3t_3+\ldots+i^nt_n.$$

Заменив степени i их значениями ($i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$ и т. д.) и выделив действительную часть и мнимую часть, получим:

$$(1+i\operatorname{tg}\alpha_1)(1+i\operatorname{tg}\alpha_2)(1+i\operatorname{tg}\alpha_3)\ldots(1+i\operatorname{tg}\alpha_n)=$$
$$=(1-t_2+t_4-t_6+\ldots)+i(t_1-t_3+t_5-\ldots).$$

Следовательно,

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=$$
$$=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n(1-t_2+t_4-t_6+\ldots)+$$
$$+i\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n(t_1-t_3+t_5-\ldots).$$

Сравнивая действительные части и коэффициенты мнимых частей, получаем:

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n(1-t_2+$$
$$+t_4-t_6+\ldots), \qquad (1a)$$

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n(t_1-$$
$$-t_3+t_5-\ldots), \qquad (2a)$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=\frac{t_1-t_3+t_5-\ldots}{1-t_2+t_4-t_6+\ldots}. \qquad (3a)$$

Эти формулы являются обобщением формул (1), (2) и (3), так как последние получаются из них как частные случаи при $n=2$. Так, например, (1a) и (3a) при $n=2$ дают:

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2(1-t_2)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2(1-$$
$$-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{t_1}{1-t_2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2}{1-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

При $n=3$ те же формулы дают:

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3[1-(\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2+$$
$$+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_3+\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3)]=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3-$$
$$-\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3-\sin\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3-\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=\frac{t_1-t_3}{1-t_2}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3}{1-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_3-\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3},$$

в частности при $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi k$ (k — целое) левая часть этого равенства обращается в нуль и, следовательно, в правой части будем иметь:

$$\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3=\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3.$$

Замечание. Если в равенствах (1а), (2а) и (3а) положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$ и проделать соответствующие преобразования то получим формулы, выражающие $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$ и $\operatorname{tg} n\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Однако в этом месте мы не будем останавливаться на выводе таких формул, так как существует еще более простой способ их получения, основанный на одном замечательном свойстве степени комплексного числа, который мы изложим в следующем параграфе.

Упражнения.

Используя формулы (1а), (2а) и (3а) при $n = 3$ и $n = 4$, доказать следующие теоремы:

1) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$

2) Если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, то $\alpha+\beta+\gamma = \pi n$ (n — целое).

3) Если $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = 1$, то $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$ (k — целое).

4) Если $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi n$ (n—целое), то $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

5) Если числа α, β, и γ принадлежат интервалу $(0; \frac{\pi}{2})$, то $\sin(\alpha+\beta+\gamma) < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.

§ 20. Круговые функции от кратного аргумента

В основном курсе тригонометрии были установлены формулы:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi},$$

выражающие круговые функции от удвоенного аргумента через соответствующие функции этого аргумента. Используя выведенную выше формулу Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \qquad (1)$$

можно найти аналогичные формулы для круговых функций от утроенного аргумента, от учетверенного и т. д., т. е. от аргумента любой кратности.

Для этого представим левую часть равенства (1) по формуле бинома Ньютона, будем иметь:

$$\cos^n\varphi + iC_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + i^2C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi +$$

$$+ i^3C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots + i^n\sin^n\varphi = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Теперь заменим степени i их значениями ($i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ и т. д.) и выделим действительную и мнимую части, получим:

$$(\cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi -$$

$$- C_n^6\cos^{n-6}\varphi\sin^6\varphi + \ldots) + i(C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi -$$

$$- C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots) =$$

$$= \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Приняв во внимание, что у равных комплексных чисел должны быть равны действительные части и коэффициенты мнимых частей, получаем:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi -$$

$$- C_n^6\cos^{n-6}\varphi\sin^6\varphi + \ldots, \qquad (2)$$

$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi +$$

$$+ C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots, \qquad (3)$$

откуда

$$\operatorname{tg} n\varphi = \frac{C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots}{\cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - C_n^6\cos^{n-6}\varphi\sin^6\varphi + \ldots}. \qquad (4)$$

Рассмотрим частные случаи.

При $n = 2$ получаем уже известные нам формулы:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - C_2^2\cos^0\varphi\sin^2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi;$$

$$\sin 2\varphi = C_2^1\cos\varphi\sin\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi;$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{C_2^1\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi - C_2^2\cos^0\varphi\sin^2\varphi} = \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

При $n = 3$ имеем:

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - C_3^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = C_3^1 \cos^2 \varphi \sin \varphi - C_3^3 \cos^0 \varphi \sin^3 \varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi;$$

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi}{\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi} = \frac{3 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}^3 \varphi}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

При $n = 5$;

$$\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - C_5^2 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + C_5^4 \cos \varphi \sin^4 \varphi =$$

$$= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi.$$

И т. д.

Упражнения.

1. Выразить $\sin 6\alpha$ и $\cos 6\alpha$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.
2. Дано: $\sin \varphi = a$; найти $\sin 5\varphi$.
3. Доказать справедливость неравенств:
а) $\cos 2\varphi \leqslant \cos^2 \varphi$;
б) $\cos 3\alpha + 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha \leqslant 1$.
4. Проверить тождество:

$$\frac{\operatorname{tg} 3\alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha}{3 \operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha} \equiv \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

5. Решить уравнения:
а) $\sin^3 x + \sin 3x = 0$;
б) $\cos^5 x = \cos 5x$;
в) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 3x - \sin 3x$.

§ 21. Круговые функции от n-й доли аргумента

В основном курсе тригонометрии доказывается, что

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

А как же будут выражаться круговые функции от $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\alpha}{4}$, $\frac{\alpha}{5}$ и т. д., т. е. от аргумента $\frac{\alpha}{n}$, где n — любое натуральное, большее 2?

Такая задача оказывается весьма трудной, так как выражение $\cos\frac{\alpha}{n}$ и $\sin\frac{\alpha}{n}$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ связано с необходимостью решения алгебраического уравнения n-й степени.

Действительно, чтобы выразить $\cos\frac{\alpha}{n}$ через $\cos\alpha$, положим в формуле (2) предыдущего параграфа $n\varphi = \alpha$ и, следовательно, $\varphi = \frac{\alpha}{n}$, получим:

$$\cos\alpha = \cos^n\frac{\alpha}{n} - C_n^2\cos^{n-2}\frac{\alpha}{n}\sin^2\frac{\alpha}{n} + C_n^4\cos^{n-4}\frac{\alpha}{n}\sin^4\frac{\alpha}{n} - \ldots.$$

Обозначив $\cos^n\frac{\alpha}{n}$ через x и заметив, что $\sin^{2k}\frac{\alpha}{n} = \left(1-\cos^2\frac{\alpha}{n}\right)^k = (1-x^2)^k$, приходим к уравнению:

$$x^n - C_n^2x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots - \cos\alpha = 0 \ldots. \quad (*)$$

Подробные исследования показывают, что это уравнение имеет n действительных корней, но только при некоторых значениях n эти корни могут быть выражены через коэффициенты уравнения с помощью радикалов. Следовательно, поставленная нами задача разрешима только для некоторых натуральных значений n.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

При $n=2$ уравнение (*) принимает вид:

$$x^2 - C_2^2x^0(1-x^2) - \cos\alpha = 0,$$

т. е. $2x^2 - 1 - \cos\alpha = 0$,
откуда

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

т. е. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ — знакомая нам уже формула.

При $n=4$ уравнение (*) дает:

$$x^4 - C_4^2x^2(1-x^2) + C_4^4x^0(1-x^2)^2 - \cos\alpha = 0$$

или

$$8x^4 - 8x^2 + 1 - \cos\alpha = 0,$$

$$16x^4 - 16x^2 + 2(1-\cos\alpha) = 0,$$

$$(4x^2)^2 - 4(4x^2) + 2(1-\cos\alpha) = 0,$$

откуда

$$4x^2 = 2 \pm \sqrt{2(1+\cos\alpha)},$$

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{2}},$$

т. е.

$$\cos\frac{\alpha}{4} = \pm \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{2}}.$$

При $n = 3$ уравнение (*) дает:

$$x^3 - C_3^2 x(1 - x^2) - \cos\alpha = 0$$

или

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0.$$

Получилось уравнение третьей степени, для решения которого школьных знаний математики недостаточно.

Это уравнение имеет интересный геометрический смысл, и мы рассмотрим его подробно далее при изложении общей теории решения алгебраических уравнений третьей степени.

§ 22. Использование тригонометрической и показательной форм комплексных чисел для преобразования некоторых тригонометрических выражений

Пример 1 В механике и в землемерном деле при решении некоторых задач приходится проектировать ломаную линию на оси координат и вычислять величину таких проекций.

Рассмотрим частный случай, когда ломаная $A_0A_1A_2 \ldots A_{m-1}$ выпуклая и правильная; т. е. является частью правильного многоугольника $A_0A_1A_2 \ldots A_{m-1}A_m \ldots A_{n-1}$ (рис. 43).

Проекция отрезка на ось, как известно, равна длине этого отрезка, умноженной на косинус угла, под кото-

рым он наклонен к оси. Проекцией ломаной называют сумму проекций составляющих ее отрезков.

В данном случае все отрезки ломаной имеют одинаковую длину; обозначим ее через a.

Пусть угол наклона первого отрезка $\overline{A_0A_1}$ к оси Ox равен α, а внешний угол многоугольника $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}$

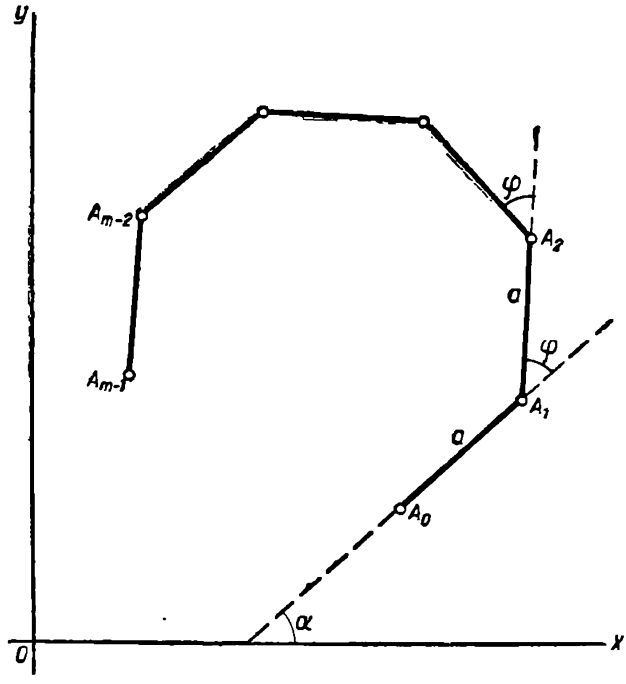


Рис. 43.

равен φ. Тогда проекции ломаной $A_0A_1A_2\ldots A_{m-1}$ на оси координат Ox и Oy выразятся суммами:

$$P_x = a\cos\alpha + a\cos(\alpha+\varphi) + a\cos(\alpha+2\varphi) + \ldots + a\cos[\alpha+(m-1)\varphi],$$

$$P_y = a\sin\alpha + a\sin(\alpha+\varphi) + a\sin(\alpha+2\varphi) + \ldots + a\sin[\alpha+(m-1)\varphi].$$

Как видим, задача свелась к вычислению сумм:

$$X = \cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \ldots + \cos[\alpha+(m-1)\varphi], \qquad (1x)$$

$$Y = \sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \ldots + \sin[\alpha+(m-1)\varphi]. \qquad (1y)$$

Для облегчения вычислений используют обычно таблицы логарифмов, поэтому данные суммы надо преобразовать к виду, удобному для логарифмирования. С этой целью запишем следующее очевидное равенство:

$$X + iY = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + [\cos(\alpha+\varphi) + i\sin(\alpha+\varphi)] +$$
$$+[\cos(\alpha+2\varphi)+i\sin(\alpha+2\varphi)]+\ldots+[\cos(\alpha+\overline{m-1}\,\varphi)+$$
$$+ i\sin(\alpha+\overline{m-1}\,\varphi)].$$

Заметив, что при любом натуральном k
$\cos(\alpha+k\varphi)+i\sin(\alpha+k\varphi)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)$,

$$\cos k\varphi + i\sin k\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^k,$$

внесем обозначение:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = q,$$

получим:

$$\cos(\alpha + k\varphi) + i\sin(\alpha + k\varphi) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot q^k.$$

Применив эту формулу к каждому слагаемому суммы $X+iY$, получим:

$$X + iY = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1}) =$$
$$=(\cos\alpha+ i\sin\alpha)\frac{1-q^m}{1-q} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{1-\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{1-\cos\varphi - i\sin\varphi}$$

По известным формулам тригонометрии имеем:

$$1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad 1-\cos m\varphi = 2\sin^2\frac{m\varphi}{2},$$

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, \quad \sin m\varphi = 2\sin\frac{m\varphi}{2}\cos\frac{m\varphi}{2},$$

поэтому

$$X + iY = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot\frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{m\varphi}{2} - i\cos\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2} - i\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Умножим числитель и знаменатель последней дроби на i, а затем выполним указанные операции над комплексными числами в тригонометрической форме, получим последовательно:

$$X + iY = \frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\frac{\cos\frac{m\varphi}{2} + i\sin\frac{m\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\left[\cos\frac{m-1}{2}\varphi + i\sin\frac{m-1}{2}\varphi\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left[\cos\left(\alpha + \frac{m-1}{2}\varphi\right) + i\sin\left(\alpha + \frac{m-1}{2}\varphi\right)\right]$$

или

$$X + iY = \frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\left(\alpha + \frac{m-1}{2}\varphi\right) +$$

$$+ i\frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\left(\alpha + \frac{m-1}{2}\varphi\right).$$

Сравнивая действительные части, а затем коэффициенты мнимых частей, получим:

$$X = \frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\left(\alpha + \frac{m-1}{2}\varphi\right), \qquad (2x)$$

$$Y = \frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\left(\alpha + \frac{m-1}{2}\varphi\right), \qquad (2y)$$

где X и Y — известные суммы $(1x)$ и $(1y)$.

В частном случае, когда $\alpha = 0$, эти формулы принимают вид:

$$X_0 = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos(m-1)\varphi =$$

$$= \frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\left(\frac{m-1}{2}\varphi\right), \qquad (3x)$$

$$Y_0 = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin(m-1)\varphi =$$

$$= \frac{\sin\frac{m\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\left(\frac{m-1}{2}\varphi\right). \qquad (3y)$$

Рекомендуем читателю подумать, какой вид будут иметь найденные формулы в том случае, когда ломаная $A_0A_1A_2\ldots A_{m-1}$ будет замкнутой и, следовательно, образует правильный многоугольник.

Следует отметить, что выведенные нами формулы дают целый ряд интересных следствий.

Так, например, если в формулах (2_x) и (2_y) положить $\alpha = x$ и $\varphi = 2x$, то они дадут следующие тождества:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2m-1)x \equiv \frac{\sin 2mx}{2\sin x},$$

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2m-1)x \equiv \frac{\sin^2 mx}{\sin x}.$$

Если в формулах $(3x)$ и $(3y)$ положить $\varphi = x + \pi$, то будем иметь:

$$1 - \cos x + \cos 2x - \cos 3x + \ldots + (-1)^{m-1}\cos(m-1)x =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{m(x+\pi)}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}\cos\frac{m-1}{2}(x+\pi),$$

$$-\sin x + \sin 2x - \sin 3x + \ldots + (-1)^{m-1}\sin(m-1)x =$$

$$= \frac{\sin\dfrac{m(x+\pi)}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}\sin\frac{m-1}{2}(x+\pi).$$

Пример 2. Одна из классических задач механики состоит в отыскании центра тяжести различных фигур. Для определения координат центра тяжести плоской фигуры пользуются формулами:

$$X_c = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}, \quad Y_c = \frac{p_1y_1 + p_2y_2 + \ldots + p_ny_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — веса частей, на которые разбита данная фигура, а $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ — координаты центров тяжестей этих частей.

Рассмотрим случай, когда данной фигурой является правильная однородная ломаная линия $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$

(рис. 44). Проведем оси координат OX и OY, как указано на рисунке (за начало осей координат мы взяли центр окружности, проходящей через вершины ломаной). Пусть C — искомый центр тяжести, $B_1, B_2, \ldots B_n$ — середины звеньев ломаной (т. е. центры тяжестей этих звеньев), $B_1', B_2', \ldots, B_n'$ — их проекции на ось OX, $OA_1 = R$ — радиус окружности, $OB_1 = OB_2 = \ldots = OB_n = r$ — апофема ломаной и $\measuredangle A_0OA_n = \beta$. Угол $B_1'OB_1 = \frac{\beta}{2n} = \alpha$, угол $B_2'OB_2 = 3\alpha, \ldots,$ угол $B_n'OB_n = (2n-1)\alpha$.

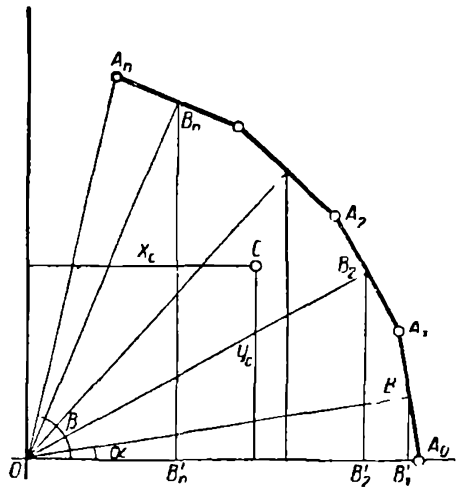


Рис. 44.

Из соответствующих прямоугольных треугольников находим:

$$r = R\cos\alpha;$$

$$A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = a = 2R\sin\alpha;$$

$$B_1'B_1 = y_1 = r\sin\alpha;$$

$$B_2'B_2 = y_2 = r\sin 3\alpha;$$

. . . . . .

$$B_nB_n = y_n = r\sin(2n-1)\alpha.$$

Из однородности ломаной следует также, что $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = a \cdot \delta$, где δ — плотность материала, поэтому исходные формулы принимают вид:

$$X_c = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \text{ и } Y_c = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

Таким образом, ордината центра тяжести ломаной выразится так:

$$Y_c = \frac{r[\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha]}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} R\cos\alpha\,[\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha].$$

При решении предыдущей задачи (пример 1, стр. 572) была установлена формула, по которой

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha},$$

следовательно, окончательно

$$Y_c = \frac{R}{n} \operatorname{ctg} \alpha \sin^2 n\alpha.$$

Аналогично, спроектировав точки B_1, $B_2, \ldots, B_n$ на ось OY, получим:

$$x_1 = r\cos\alpha,\ x_2 = r\cos 3\alpha, \ldots,\ x_n = r\cos(2n-1)\alpha,$$

следовательно,

$$X_c = \frac{r[\cos\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha]}{n}.$$

Подставив значение $r = R\cos\alpha$ и применив установленную выше (пример 1, стр. 572) формулу, получим:

$$X_c = \frac{R}{2n} \operatorname{ctg} \alpha \sin 2n\alpha.$$

Пример 3. Преобразовать суммы:

$$S_1 = \cos^2 a + \cos^2(a+h) + \cos^2(a+2h) + \ldots + \cos^2[a+(m-1)h] \text{ и}$$

$$S_2 = \sin^2 a + \sin^2(a+h) + \sin^2(a+2h) + \ldots + \sin^2[a+(m-1)h]$$

к виду, удобному для вычисления.

Решение. Заметив, что $S_1 + S_2 = m$, приходим к заключению, что достаточно преобразовать одну из этих сумм, например S_1, тогда другая выразится равенством: $S_2 = m - S_1$.

Применив к каждому слагаемому суммы S_1 формулу

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

получим:

$$S_1 = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\{\cos 2a + \cos(2a+2h) + \cos(2a+4h) + \ldots + \cos[2a+(m-1)2h]\}.$$

Для вычисления полученной суммы косинусов положим в формуле (2_x) $\alpha = 2a$ и $\varphi = 2h$, будем иметь

$$\cos 2a + \cos(2a+2h) + \cos(2a+4h) + \ldots + \cos[2a+(m-1)2h] = \frac{\sin mh}{\sin h}\cos[2a+(m-1)2h],$$

следовательно,

$$S_1 = \frac{m}{2} + \frac{\sin mh}{2\sin h}\cos[2a + (m-1)2h].$$

Пример 4. Преобразовать к виду, удобному для вычислений, следующие суммы:

$S_1 = \cos x + C_n^1 \cos 2x + C_n^2 \cos 3x + \ldots + C_n^n \cos(n+1)x$ и

$S_2 = \sin x + C_n^1 \sin 2x + C_n^2 \sin 3x + \ldots + C_n^n \sin(n+1)x.$

Решение. Умножим вторую сумму на i и сложим с первой, получим:

$$S_1 + iS_2 = (\cos x + i\sin x) + C_n^1(\cos 2x + i\sin 2x) +$$

$$+ C_n^2(\cos 3x + i\sin 3x) + \ldots + C_n^n[\cos(n+1)x +$$

$$+ i\sin(n+1)x] = (\cos x + i\sin x) + C_n^1(\cos x + i\sin x)^2 +$$

$$+ C_n^2(\cos x + i\sin x)^3 + \ldots + C_n^n(\cos x + i\sin x)^{n+1}.$$

Внесем обозначение: $\cos x + i\sin x = z$, получим:

$$S_1 + iS_2 = z + C_n^1 z^2 + C_n^2 z^3 + \ldots + C_n^n z^{n+1} = (1+z)^n \cdot z =$$

$$= (1 + \cos x + i\sin x)^n(\cos x + i\sin x).$$

Но $(1 + \cos x + i\sin x)^n = \left(2\cos^2\frac{x}{2} + i\,2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^n =$

$$= \left[2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)\right]^n =$$

$$= 2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right),$$

следовательно,

$$S_1 + iS_2 = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right)(\cos x + i\sin x) =$$

$$= 2^n\cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{n+2}{2}x + i\sin\frac{n+2}{2}x\right).$$

Сравнивая действительные части и коэффициенты мнимых частей, получаем:

$$S_1 = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{n+2}{2}x;$$

$$S_2 = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\sin\frac{n+2}{2}x.$$

Пример 5. Выразить $\sin^m a$ и $\cos^m a$ через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных a.

Решение этой задачи для частного случая, когда $n = 2$, дается в основном курсе тригонометрии. А именно:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \quad \text{и} \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

Для решения задачи в общем случае используем тригонометрическую форму комплексных чисел и известные операции с ними.

Возьмем комплексные числа:

$$u = \cos a + i \sin a \quad \text{и} \quad v = \cos a - i \sin a.$$

Замечаем, что:

$$u + v = 2 \cos a, \tag{1}$$

$$u - v = 2i \sin a, \tag{2}$$

$$u^n = \cos na + i \sin na, \quad v^n = \cos na - i \sin na.$$

$$u^n + v^n = 2 \cos na, \tag{3}$$

$$u^n - v^n = 2i \sin na, \tag{4}$$

$$u^n \cdot v^n = 1. \tag{5}$$

Теперь возведем обе части равенства (1) в m-ю степень, получим:

$$2^m \cos^m a = (u + v)^m = u^m + C_m^1 u^{m-1} v + C_m^2 u^{m-2} v^2 + \ldots +$$
$$+ C_m^2 u^2 v^{m-2} + C_m^1 u v^{m-1} + v^m.$$

Объединяя в группы члены, равноотстоящие от крайних, получим:

$$2^m \cos^m a = (u^m + v^m) + C_m^1 uv (u^{m-2} + v^{m-2}) +$$
$$+ C_m^2 u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) + \ldots .$$

Принимая во внимание формулы (3) и (5), получаем

$$2^m \cos^m a = 2 \left[\cos ma + C_m^1 \cos (m-2) a + \right.$$
$$\left. + C_m^2 \cos (m - 4) a + \ldots\right]$$

или

$$2^{m-1} \cos^m a = \cos ma + C_m^1 \cos (m - 2) a +$$
$$+ C_m^2 \cos (m - 4) a + \ldots .$$

Чтобы получить аналогичную формулу для $\sin^m a$. возведем в m-ю степень обе части равенства (2):

$$2^m i^m \sin^m a = (u - v)^m = u^m - C_m^1 u^{m-1} v + C_m^2 u^{m-2} v^2 - \\ - C_m^3 u^{m-3} v^3 + \ldots \mp C_m^1 u v^{m-1} \pm v^m ,$$

где верхние знаки берутся при четном m, а нижние—при нечетном m.

Соединив члены, равноотстоящие от крайних, получим

$$2^m i^m \sin^m a = (u^m \pm v^m) - C_m^1 uv (u^{m-2} \pm v^{m-2}) + \\ + C_m^2 u^2 v^2 (u^{m-4} \pm v^{m-4}) - C_m^3 u^3 v^3 (u^{m-6} \pm v^{m-6}) + \ldots$$

Наконец, используя формулы (3), (4) и (5), получаем: при четном m:

$$2^{m-1} (-1)^{\frac{m}{2}} \sin^m a = \cos m a - C_m^1 \cos (m-2) a + \\ + C_m^2 \cos (m-4) a - C_m^3 \cos (m-6) a + \ldots ;$$

при нечетном m:

$$2^{m-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin^m a = \sin m a - C_m^1 \sin (m-2) a + \\ + C_m^2 \sin (m-4) a - C_m^3 \sin (m-6) a + \ldots$$

При $m = 2$ выведенные формулы дают известные уже тождества.

При $m = 3$ получаем:

$$1)\ 2^2 \cos^3 a = \cos 3a + 3 \cos a,$$

т. е.

$$\cos^3 a = \frac{1}{4} (\cos 3a + 3 \cos a);$$

$$2)\ 2^2 (-1) \sin^3 a = \sin 3a - 3 \sin a,$$

т. е.

$$\sin^3 a = \frac{1}{4} (3 \sin a - \sin 3a).$$

Упражнения.

1. Проверить равенство:

$$\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha} = \operatorname{tg} \frac{n\alpha}{2} .$$

Указание. Воспользоваться выведенными в данном параграфе формулами ($3x$ и $3y$).

2. Проверить равенство:

$$\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}=0.$$

Указание. Воспользоваться формулой ($3x$).

3. Не пользуясь таблицами, найти сумму:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}.$$

4. Проверить равенства:

1) $1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}\cdot 2+\cos\frac{2\pi}{n}\cdot 3+\ldots+\cos\frac{2\pi}{n}(n-1)=0;$

2) $\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}\cdot 2+\sin\frac{2\pi}{n}\cdot 3+\ldots+\sin\frac{2\pi}{n}(n-1)=0.$

Какой геометрический смысл этих равенств?

Указание. Левые части данных равенств выражают проекции правильного n-угольника на оси координат OX и OY при условии, что одна из сторон многоугольника параллельна оси OX.

ГЛАВА VI

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ПРИ РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 23. Двучленные уравнения и их приложение в теории построения правильных многоугольников

Двучленными алгебраическими уравнениями n-й степени называют уравнения вида:

$$az^n + b = 0,$$

где a и b — комплексные числа, неравные 0.

Разделим обе части этого уравнения на a, а затем внесем обозначение: $\frac{b}{a} = -A$, получим:

$$z^n - A = 0, \qquad (1)$$

откуда $z^n = A$ и $z = \sqrt[n]{A}$.

Раньше (см. § 18, стр. 557) было показано, что корень $\sqrt[n]{A}$ имеет n различных значений, выражающихся формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$; буквами r и φ в этой формуле обозначены соответственно модуль и аргумент числа A.

Там же было установлено, что на числовой плоскости указанные значения корня (z_0, z_1, z_2, . . . , z_{n-1}) изображаются точками, которые делят окружность с центром в начале координат O и радиусом, равным $\sqrt[n]{r}$, на n равных частей. Соеди-

нив эти точки последовательно хордами, получим правильный n-угольник.

Итак, мы пришли к заключению, что построение правильного n-угольника можно свести к решению двучленного алгебраического уравнения (1) и построению его корней на плоскости Гаусса. В частности, построение правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R = 1$ (рис. 45), сводится к решению уравнения

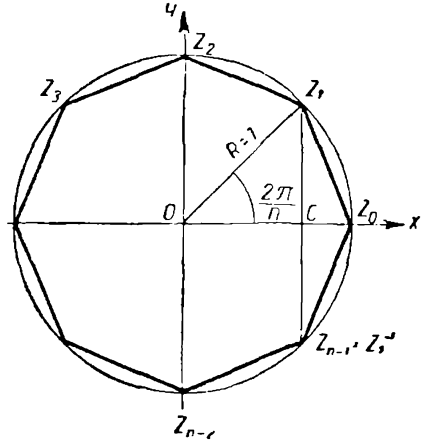


Рис. 45.

$$z^n - 1 = 0, \qquad (2)$$

корни которого выразятся формулой:

$$z = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \sin\frac{2\pi k}{n},$$

дающей при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ соответственно

$$\left.\begin{aligned} z_0 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\ z_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}, \\ z_2 &= \cos\frac{2\pi}{n}\cdot 2 + i \sin\frac{2\pi}{n}\cdot 2, \\ z_3 &= \cos\frac{2\pi}{n}\cdot 3 + i \sin\frac{2\pi}{n}\cdot 3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n-1} &= \cos\frac{2\pi}{n}(n-1) + i \sin\frac{2\pi}{n}(n-1). \end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

Одна из вершин искомого правильного n-угольника уже известна: она соответствует первому корню уравнения ($z_0 = 1$) и лежит на пересечении окружности с лучом OX. Если мы сможем построить смежную вершину этого многоугольника, соответствующую корню z_1, то, отложив затем циркулем на окружности дугу $z_0 z_1$ n раз, получим все вершины многоугольника. Но эту вершину мы смогли

бы построить и в том случае, если бы был известен отрезок $OC = \cos\frac{2\pi}{n}$. Такой отрезок легко выразить через z_1.

Действительно,

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

$$z_1^{-1} = \cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) = \cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n},$$

следовательно, $z_1 + z_1^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{n}$, $\frac{z_1 + z_1^{-1}}{2} = \cos\frac{2\pi}{n}$ и потому

$$OC = \frac{z_1 + z_1^{-1}}{2}. \tag{3}$$

Последняя формула играет большую роль в теории построения правильных многоугольников. В самом деле, левая часть уравнения (2) разлагается на множители:

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1),$$

поэтому получаем два уравнения:

$$z - 1 = 0$$

и

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0. \tag{4}$$

Корень $z_0 = 1$ принадлежит первому уравнению, следовательно, остальные корни $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ принадлежат уравнению (4); из предыдущих рассуждений ясно, что для построения правильного n-угольника достаточно найти из уравнения (4) число, равное $z_1 + z_1^{-1}$, и построить отрезок $OC = \frac{z_1 + z_1^{-1}}{2}$.

Покажем это на примере.

Пусть требуется построить правильный пятиугольник.

При $n = 5$ уравнение (2) принимает вид:

$$z^5 - 1 = 0$$

или

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0.$$

Первый множитель дает корень $z_0 = 1$, остальные корни z_1 z_2, z_3 и z_4 принадлежат второму множителю.

Приравниваем его нулю, получаем возвратное уравнение:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Разделив обе части на z^2, получим:

$$z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} = 0$$

или

$$(z^2 + z^{-2}) + (z + z^{-1}) + 1 = 0.$$

Внесем обозначение:

$$z + z^{-1} = x, \qquad (*)$$

получим:

$$(z + z^{-1})^2 = x^2,$$

откуда

$$z^2 + z^{-2} = x^2 - 2,$$

следовательно, уравнение примет вид:

$$x^2 - 2 + x + 1 = 0,$$

или

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Решаем это уравнение, находим:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},$$

Так как искомый отрезок $OC = \frac{z_1 + z_1^{-1}}{2} > 0$, то в равенстве (*) следует положить $x = x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ тогда $z_1 + z_1^{-1} = x_1$ и $OC = \frac{z_1 + z_1^{-1}}{2} = \frac{x_1}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

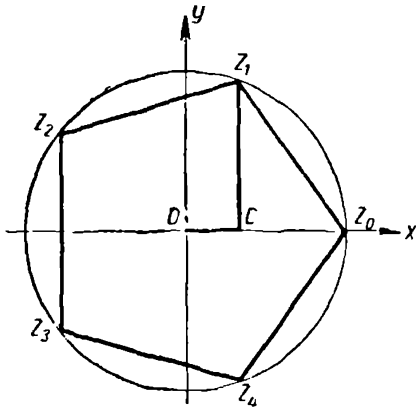


Рис. 46.

Остается выполнить следующие построения:

1. На числовой плоскости Гаусса описываем окружность с центром в начале координат O и радиусом $R = 1$ (рис. 46).

2. Построим отрезок $AB = \sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными 2 и 1 (рис. 47).

3. Построим отрезок $BD = AB - 1 = -1 + \sqrt{5}$.

4. Разделим отрезок BD на 4 равные части, получим $BE = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

5. На оси OX (рис. 46) отложим отрезок $OC = BE = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

6. В точке C восстановим перпендикуляр к OX, который пересечет окружности в искомой вершине пятиугольника, соответствующей корню $z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

7. Отложим циркулем на окружности дугу $z_0 z_1$ еще три раза, получим остальные вершины пятиугольника, соответствующие корням z_2, z_3 и z_4. Найденные вершины последовательно соединим хордами.

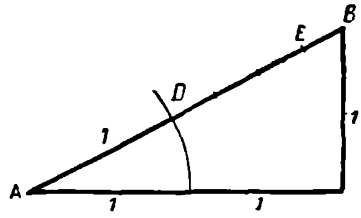


Рис. 47.

Задачи на построение правильных многоугольников относятся к числу классических задач геометрии. Математики древней Греции умели строить с помощью циркуля и линейки правильные многоугольники с числом сторон $n = 3, 4, 5, 6, 15$, а также и такие, которые получаются из перечисленных путем удвоения числа сторон. Вопрос о возможности построения циркулем и линейкой других правильных многоугольников оставался нерешенным до конца XVIII столетия. И только в 1796 году Гаусс, используя теорию комплексных чисел и некоторые другие сведения из алгебры, установил, что правильный многоугольник с n сторонами может быть построен циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда n — простое число вида $2^{2^m} + 1$, или $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \ldots p_s$, где k — целое неотрицательное, а $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа вида $2^{2^m} + 1$[1].

[1] По имени Гаусса простые числа вида $2^{2^m} + 1$ называют гауссовыми числами. В настоящее время известно только пять таких чисел, получающихся при $m = 0$ 1, 2, 3 и 4, а именно: 3, 5, 17, 257 и 65 337; при $m = 5$ и 6 формула $2^{2^m} + 1$ дает составные числа а при $m > 6$ пока вид чисел не установлен

Так, например, числа 17 и 257 — простые, представимые в виде $2^{2^m}+1$ ($17=2^{2^2}+1$ и $257=2^{2^3}+1$), следовательно, правильные 17-угольник и 257-угольник возможно построить циркулем и линейкой[1]. Простое число 7 непредставимо в виде $2^{2^m}+1$, следовательно, правильный 7-угольник невозможно построить циркулем и линейкой.

Правильный 120-угольник можно построить циркулем и линейкой, так как $120=2^3\cdot 3\cdot 5$, где 3 и 5 — различные простые числа, представимые в виде $2^{2^m}+1$ ($3=2^{2^0}+1$, $5=2^2+1$), но правильный 9-угольник нельзя построить циркулем и линейкой, так как $9=3^2=3\cdot 3$ — произведение двух равных простых чисел.

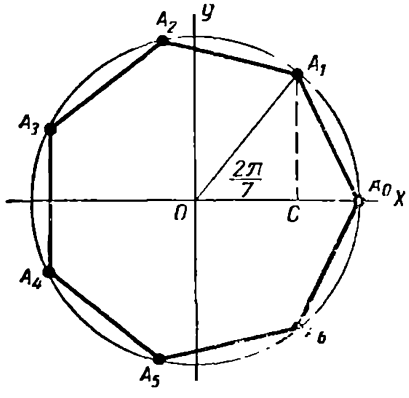


Рис. 48.

В невозможности построения циркулем и линейкой некоторых правильных многоугольников можно убедиться и не опираясь на теорему Гаусса. Докажем это, например, для семиугольника методом от противного.

1. Допустим, что некто построил правильный семиугольник циркулем и линейкой (рис. 48)

2. Опишем около этого многоугольника окружность и проведем через ее центр O (как показано на рисунке) оси координат Гаусса: OX — действительная ось и OY — мнимая ось.

3. Примем за единицу на действительной оси OX отрезок OA_0, равный радиусу окружности. Тогда радиус OA_1 спроектируется на эту ось в отрезок $OC=\cos\frac{2\pi}{7}$, а вершины многоугольника $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_6$

[1] Способ построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника Гаусс открыл в 19-летнем возрасте. Этому открытию он придавал очень большое значение и завещал выгравировать правильный 17-угольник, вписанный в круг, на своем надгробном памятнике, что и было исполнено.

будут служить изображениями комплексных чисел:

$$z_0 = 1 = \cos 0 + i \sin 0,$$
$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7},$$
$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{7} \cdot 2 + i \sin \frac{2\pi}{7} \cdot 2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$z_6 = \cos\frac{2\pi}{7} \cdot 6 + i \sin \frac{2\pi}{7} \cdot 6.$$

Заметив, что эти числа являются корнями уравнения

$$z^7 - 1 = 0, \qquad (1^0)$$

а отрезок $OC = \frac{z_1 + z_1^{-1}}{2}$ приходим к выводу: если принять допущение 1-го шага о возможности построения правильного семиугольника циркулем и линейкой, то этими же средствами может быть построен и отрезок

$$OC = \frac{z_1 + z_1^{-1}}{2}$$

4. Разложим на множители левую часть уравнения (1^0), получим:

$$(z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0,$$

откуда

$$z - 1 = 0$$
$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \qquad (2^0)$$

Разделим на z^3 обе части последнего уравнения, получаем:

$$z^3 + z^2 + z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = 0,$$

или

$$(z^3 + z^{-3}) + (z^2 + z^{-2}) + (z + z^{-1}) + 1 = 0.$$

Внесем подстановку $z + z^{-1} = x$, получаем:

$(z + z^{-1})^2 = x^2$, откуда $z^2 + z^{-2} = x^2 - 2$;

$(z + z^{-1})^3 = x^3$, откуда $z^3 + z^{-3} = x^3 - 3x$.

Следовательно, уравнение примет вид:

$$x^3 - 3x + x^2 - 2 + x + 1 = 0,$$

или

$$x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0 \qquad (3^0)$$

Обозначим корни этого уравнения через x_1, x_2 и x_3. Учитывая подстановку $z + z^{-1} = x$, замечаем, что исходное уравнение (2^0) заменилось тремя уравнениями:

$$z + z^{-1} = x_1,\ z + z^{-1} = x_2 \text{ и } z + z^{-1} = x_3, \qquad (4^0)$$

поэтому его корни z_1, z_2, z_3, . . . , z_8 будут корнями этих трех уравнений.

Нас интересует больше всего корень z_1, так как через него выражается отрезок $OC = \frac{z_1 + z_1^{-1}}{2}$; этот корень будет принадлежать одному из уравнений (4^0), пусть, например, первому, тогда

$$z_1 + z_1^{-1} = x_1$$

и, следовательно, $x_1 = 2OC$.

Принимая во внимание вывод 4-го шага, замечаем, что один из корней уравнения (3^0) $(x_1 = 2OC)$ можно построить циркулем и линейкой.

Но делители свободного члена уравнения (3^0) + 1 и —1 не являются его корнями, следовательно, это уравнение вообще не имеет рациональных корней. А из теории геометрических построений известно, что при таких условиях ни один из корней кубического уравнения не может быть построен циркулем и линейкой [1]

Получили противоречие. Следовательно, допущение 1-го шага неверно, т. е. правильный семиугольник циркулем и линейкой построить невозможно.

Аналогичным путем можно доказать невозможность построения циркулем и линейкой правильного девятиугольника. Рекомендуется читателю провести это доказательство самостоятельно. Для облегчения доказательства следует учесть возможность преобразования уравнения

$$z^9 - 1 = 0$$

к виду

$$(z^3 - 1)(z^6 + z^3 + 1) = 0.$$

[1] В теории геометрических построений доказывается следующая теорема: *корни алгебраического уравнения третьей степени с рациональными коэффициентами можно построить с помощью циркуля и линейки только в том случае, когда хотя бы один из корней этого уравнения является рациональным.*

§ 24. Алгебраические уравнения третьей степени и задача о трисекции угла

При исследовании одного из вопросов теории круговых функций (см. стр. 568) нами было получено уравнение третьей степени:

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение представляет большой интерес, так как к нему сводится решение классической задачи древности о трисекции угла.

В самом деле, пусть требуется разделить на три равные части данный угол $AOB = \alpha$ (рис. 49). Предположим, что эта задача решена, т. е. построен угол $AOM = \frac{1}{3} \sphericalangle AOB = \varphi$. Проведем оси прямоугольных координат XOY, как показано на рисунке 49, и опишем окружность с центром O и радиусом $R = 1$. Из точек пересечения окружности с лучами OB и OM опустим на ось OX перпендикуляры B_1C и M_1D. По определению косинуса будем иметь:

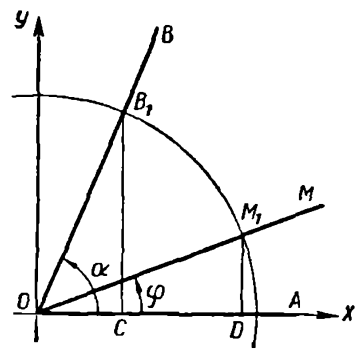


Рис. 49.

$$\cos\alpha = OC, \quad \cos\varphi = OD.$$

Понятно, что для решения задачи достаточно знать отрезок OD, так как положение точки M_1, а следовательно, и луча OM вполне определяется этим отрезком. Обозначив его через x, получим:

$$\cos\varphi = OD = x.$$

По условию

$$\alpha = 3\varphi,$$

следовательно,

$$\cos\alpha = \cos 3\varphi. \qquad (*)$$

Но $$\cos 3\varphi = \cos(2\varphi + \varphi) = \cos 2\varphi \cos\varphi - \sin 2\varphi \sin\varphi =$$

$$= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\cos\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi =$$

$$= \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi = \cos^3\varphi - 3(1 - \cos^2\varphi)\cos\varphi =$$

$$= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

поэтому равенство (*) можно записать и так:

$$\cos\alpha = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

или

$$4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi - \cos\alpha = 0.$$

В соответствии с принятым обозначением подставим x вместо $\cos\varphi$, получим указанное выше уравнение (1):

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0.$$

Итак, действительно задача о трисекции угла α сводится к решению уравнения (1) и построению отрезка OD, равного корню этого уравнения.

Любопытно отметить, что греческие математики не владели общей теорией решения кубических уравнений, но задачу о трисекции прямого угла и некоторых других углов они решили циркулем и линейкой.

Объясняется это тем, что для таких углов уравнение (1) разрешимо в квадратных радикалах.

Так, например, если угол $\alpha = 90°$, то $\cos\alpha = 0$ и уравнение (1) принимает вид:

$$4x^3 - 3x = 0, \text{ или } x(4x^2 - 3) = 0,$$

откуда $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Один из этих корней x_2 и будет косинусом искомого угла $\varphi = \frac{90°}{3}$; действительно, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Однако существует бесконечное множество углов α, не допускающих решения уравнения (1) в квадратных радикалах.

Возьмем, например, угол $\alpha = 60°$. Так как $\cos 60° = \frac{1}{2}$, то уравнение (1) примет вид:

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0,$$

или

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Положив $2x = z$, получим:

$$z^3 - 3z - 1 = 0.$$

Делителями свободного члена (—1) являются числа $+1$ и -1, но ни одно из этих чисел не является корнем уравнения, следовательно, это уравнение не имеет рациональных корней, а его иррациональные корни не могут быть выражены квадратными радикалами. А нельзя ли и такие корни построить циркулем и линейкой?

Ответ на этот вопрос был дан только в конце XIX столетия, когда была доказана теорема, что корни кубического уравнения с рациональными коэффициентами построить циркулем и линейкой нельзя, если среди этих корней нет ни одного рационального.

После этого стало ясно, что трисекция угла в 60° (как и многих других углов) циркулем и линейкой невозможна.

К алгебраическим уравнениям третьей степени приводят многие задачи геометрии, механики, физики и различных прикладных наук. Возьмем, например, следующую задачу из технической практики.

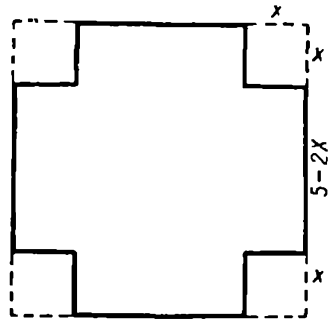


Рис. 50.

Из квадратного листа железа размерами 50×50 *см* требуется изготовить открытый ящик в форме прямоугольного параллелепипеда вместимостью 8 *л*.

Для этого мастер вырезает по углам листа четыре одинаковых квадрата (как показано на рис. 50), а оставшиеся выступающие части листа загибает и сваривает или склепывает. Понятно, что мастеру надо знать размер вырезанных квадратов. Обозначим сторону такого квадрата через x *дм*, тогда высота ящика будет также равна x *дм*, а сторона квадрата, служащего днищем ящика, будет равна $(5-2x)$ *дм*, поэтому ящик будет иметь объем $v = x(5-2x)^2$ *дм*^{3}. По условию этот объем равен 8 *дм*^{3}, следовательно,

$$x(5-2x)^2 = 8,$$

или

$$4x^3 - 20x^2 + 25x - 8 = 0.$$

Как видим, эта задача свелась также к уравнению третьей степени.

Алгебраический способ решения уравнения третьей степени был найден в первой половине XVI в. почти одновременно Николой Тарталья (1500—1557) и Джиронимо Кардано (1501—1576). Между ними разгорелся спор о приоритете открытия. Н. Тарталья держал свое открытие в секрете, а Д. Кардано опубликовал, после чего Тарталья заявил, что Кардано до публикации работы узнал от него способ решения уравнения третьей степени. Следует заметить, что проблема решения кубических уравнений была поставлена до Н. Тарталья и Д. Кардано, она, так сказать, «носилась в воздухе», и ничего нет удивительного в том, что была решена почти одновременно и независимо друг от друга несколькими математиками.

Перейдем к решению уравнений третьей степени.

Всякое уравнение третьей степени можно записать в виде:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{2}$$

Если в этом уравнении положить $x = y - \frac{a}{3}$ и проделать соответствующие преобразования, то оно примет более простой вид:

$$y^3 + py + q = 0, \tag{3}$$

где $p = -\frac{a^2}{3} + b$, $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$.

Теперь введем два новых вспомогательных неизвестных u и v; положив $y = u + v$, получим:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

откуда, после раскрытия скобок и перегруппировки членов, будем иметь:

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0 \tag{4}$$

Наложим на вспомогательные неизвестные u и v дополнительное условие, чтобы выполнялось равенство:

$$3uv + p = 0 \text{ или } uv = -\frac{p}{3}, \tag{5}$$

тогда уравнение (4) примет вид:

$$u^3 + v^3 + q = 0 \tag{6}$$

и, следовательно, заменится системой двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} u^3 + v^3 + q &= 0, \\ uv &= -\frac{p}{3} \end{aligned}\right\} \qquad (6,\ 5)$$

Возведем последнее уравнение в куб, получим новую систему:

$$\left.\begin{aligned} u^3 + v^3 + q &= 0, \\ u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{aligned}\right\} \qquad (6,\ 5а)$$

из которой видно, что u^3 и v^3 являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 + qt - \frac{p_3}{27} = 0.$$

Решая это уравнение, находим:

$$t_{1,\,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

следовательно, можно положить:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad (7)$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad (8)$$

откуда

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \qquad (7а)$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (8а)$$

и потому

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (9)$$

Это и есть так называемая формула Кардано.

Формулой Кардано надо пользоваться разумно. В самом деле, неизвестное y она выражает в виде суммы двух кубических радикалов. А так как каждый кубический ра-

дикал из данного числа имеет 3 различных значения, то, складывая каждое значение первого радикала с различными значениями второго радикала, мы получим 9 значений для y, тогда как уравнение третьей степени имеет только три корня. Появление посторонних (лишних) значений для искомой величины y объясняется тем, что мы возвели в степень уравнение (5) и тем самым заменили систему (6; 5) неэквивалентной ей системой (6; 5а). Чтобы избежать этого, надо для $y = u + v$ брать только такие пары значений u и v, которые удовлетворяют уравнению (5).

$$uv = -\frac{p}{3}.$$

т. е. произведение которых равно $-\frac{p}{3}$.

Покажем, как найти такие значения u и v.

Обозначим для краткости правую часть равенства (7) через A^3, получим:

$$u^3 = A^3.$$

Пусть $u_0 = A$ — один из корней этого уравнения. Внесем замену: $u = zA$, получим:

$$z^3A^3 = A^3.$$

откуда $z^3 = 1$ и, следовательно, $z = \cos\frac{2\pi k}{2} + i\sin\frac{2\pi k}{3}$.

При $k = 0,1$ и 2 находим:

$$z_0 = 1;$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = z_1^2$$

следовательно, для u получаем три значения:

$$u_0 = A. \qquad u_1 = z_1A \text{ и } u_2 = z_1^2A$$

Аналогичным путем, обозначив правую часть равенства (8) через B^3 и один из корней уравнения $v^3 = B^3$ через B получим три значения для v:

$$v_0 = B, \quad v_1 = z_1B \text{ и } v_2 = z_1^2B.$$

Пусть пара $u_0 = A$ и $v_0 = B$ удовлетворяет условию:

$$u_0 v_0 = A \cdot B = -\frac{p}{3},$$

тогда другой искомой парой будет $u_1 = z_1 A$ и $v_2 = z_1^2 B$, так как

$$u_1 v_2 = z_1^3 A \cdot B = A \cdot B = -\frac{p}{3};$$

наконец, третьей искомой парой будет $u_2 = z_1^2 A$ и $v_1 = z_1 B$, так как

$$u_2 v_1 = z_1^3 A \cdot B = A \cdot B = -\frac{p}{3}.$$

Все остальные пары значений u и v не удовлетворяют условию $uv = -\frac{p}{3}$, что легко обнаруживается подстановкой.

Итак, решение кубического уравнения (3) запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= u_0 + v_0, \\ y_1 &= z_1 u_0 + z_1^2 v_0, \\ y_2 &= z_1^2 u_0 + z_1 v_0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где $u_0 = A$ и $v_0 = B$ — два значения кубических радикалов формулы Кардано, удовлетворяющие условию: $u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$, а z_1 — одно из мнимых значений $\sqrt[3]{1}$, а именно:

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если значение z_1 подставить в формулу (10) и сделать преобразования, то решение уравнения (3) представится в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= u_0 + v_0. \\ y_1 &= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0). \\ y_2 &= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0). \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Приведем конкретный пример.

Пусть требуется решить уравнение

$$x^3 - 6x^2 + 24x + 31 = 0.$$

Положив $x = y + 2$ и выполнив преобразование, получим

$$y^3 + 12y + 63 = 0.$$

Итак, $p = 12$, $q = 63$, следовательно, по формуле Кардано (9) получаем:

$$y = u + v = \sqrt[3]{-\frac{63}{2} + \sqrt{\frac{63^2}{4} + \frac{12^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{63}{2} - \sqrt{\frac{63^2}{4} + \frac{12^3}{27}}},$$

где

$$u = \sqrt[3]{-\frac{63}{2} + \sqrt{\frac{63^2}{4} + \frac{12^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{63}{2} + \frac{65}{2}} = \sqrt[3]{1},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{63}{2} - \sqrt{\frac{63^2}{4} + \frac{12^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{63}{2} - \frac{65}{2}} = \sqrt[3]{-64}.$$

Находим пару значений u и v, удовлетворяющую условию (5), т. е.

$$uv = -4.$$

В данном примере такими значениями будут $u_0 = 1$ и $v_0 = -4$, следовательно, по формуле (11) получим:

$$y_0 = 1 - 4 = -3.$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}(1 - 4) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + 4) = \frac{3}{2} + i\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(1 - 4) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + 4) = \frac{3}{2} - i\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Учитывая первоначальную подстановку $x = y + 2$, находим окончательный ответ:

$$x_0 = y_0 + 2 = -1,$$

$$x_1 = y_1 + 2 = \frac{7}{2} + i\,\frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2 = y_2 + 2 = \frac{7}{2} - i\,\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Вернемся опять к формуле Кардано. Мы уже заметили, с какой осторожностью надо отбирать значения кубических радикалов, входящих в эту формулу, чтобы получить верное решение уравнения. Теперь мы обратим внимание читателя еще на одно «коварное» свойство формулы Кардано, которое долгое время было непонятной загадкой для математиков.

Это свойство выражается в следующем: если все корни кубического уравнения действительные и различные, то каждый из них передается формулой Кардано в виде громоздкой суммы двух мнимых выражений с кубическими радикалами.

В самом деле, рассмотрим все возможные случаи, к которым приводит формула Кардано: $y = u + v$, где

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ и}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{4} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

при решении уравнения (3) с действительными коэффициентами p и q.

Если $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ (как это было в предыдущем примере), то $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ — действительное положительное число. В этом случае под знаками кубических радикалов будут также действительные числа $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ и $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, и потому каждый из этих радикалов будет иметь по одному действительному значению и по два мнимых значения;

обозначив действительные значения u и v через u_0 и v_0, получим по формулам (11) для y три значения, из которых одно действительное и два мнимых.

Еще более простой случай, когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$. В этом случае $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, поэтому равны и действительные значения u_0 и v_0, вследствие чего их разность $u_0 - v_0 = 0$ и формулы (11) дают:

$$y_0 = u_0 + v_0, \quad y_1 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) \text{ и}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_0 + v_0).$$

Как видим, все корни уравнения оказались действительными, а два из них даже равными.

Наконец, рассмотрим последний случай, когда $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$.

В этом случае $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ — мнимое число, поэтому u и v будут иметь только мнимые значения, в частности, мнимой будет и та пара значений u и v, которая удовлетворяет условию $uv = -\frac{p}{3}$, вследствие чего каждый из корней уравнения выразится в виде суммы кубических радикалов из мнимых чисел. Более того, известным немецким математиком Кронекером (1823—1891) было доказано, что от указанных мнимостей нельзя избавиться никакими алгебраическими преобразованиями. И несмотря на это, оказывается, что именно в данном случае корнями уравнения должны быть действительные числа.

В самом деле, в данном случае

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} =$$

$$= \sqrt{(-1)\left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} = i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}},$$

следовательно,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}. \qquad (*)$$

Извлекая кубический корень по известному правилу (§ 18), получим для него три мнимых значения. Обозначив одно из значений этого корня через $u_0 = a_0 + b_0 i$ и используя условие

$$u_0 v_0 = -\frac{p}{3},$$

найдем соответствующее значение для v_0:

$$v_0 = -\frac{p}{3u_0} = -\frac{p\cdot(a_0 - b_0 i)}{3\,(a_0 + b_0 i)\,(a_0 - b_0 i)} = -\frac{p\,(a_0 - b_0 i)}{3\left(a_0^2 + b_0^2\right)}.$$

Но $a_0^2 + b_0^2$ — квадрат модуля числа u_0, который можно найти из равенства (*) так:

$$a_0^2 + b_0^2 = |u_0|^2 = |u|^2 = \sqrt[3]{\left|-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right|^2} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}.$$

Подставив найденное значение $a_0^2 + b_0^2$, получим:

$$v_0 = -\frac{p\,(a_0 - b_0 i)}{3\left(-\frac{p}{3}\right)} = a_0 - b_0 i.$$

Как видим, числа u_0 и v_0 сопряженные. Заметив, что их сумма $u_0 + v_0 = 2a_0$, а разность $u_0 - v_0 = 2b_0 i$, по формулам (11) получаем:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= u_0 + v_0 = 2a_0. \\ y_1 &= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0) = \\ &= -a_0 - b_0\sqrt{3}, \\ y_2 &= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0) = \\ &= -a_0 + b_0\sqrt{3}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Как и было сказано, все корни уравнения оказались действительными и различными.

Надо заметить, что в XVI в. понятие комплексного числа еще не было введено и операция извлечения квадратного корня из отрицательного числа считалась невозможной. Поэтому Кардано и его современники не понимали, как при $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ могут получиться действительные корни. Их попытки избавиться от мнимостей в формуле Кардано были безуспешными, и поэтому случай, когда $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, они называли неприводимым. Такое название сохраняется и теперь.

Рассмотрим конкретный пример уравнения, соответствующего такому случаю. Для простоты мы можем сами составить уравнение, имеющее заведомо известные различные действительные корни, например: $y_0=1$, $y_1=3$ и $y_2=-4$; его можно записать в таком виде:

$$(y-1)(y-3)(y+4)=0.$$

После раскрытия скобок получим: $y^3-13y+12=0$.

Как видим: $p=-13$, $q=12$, следовательно,

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{12^2}{4}+\frac{(-13)^3}{27}=-\frac{1225}{27}<0,$$

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=$$

$$=\sqrt[3]{-6+\sqrt{-\frac{1225}{27}}}=\sqrt[3]{-6+i\,\frac{35\sqrt{3}}{9}},$$

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-6-i\,\frac{35\sqrt{3}}{9}}.$$

Формула Кардано дает:

$$y=u+v=\sqrt[3]{-6+i\,\frac{35\sqrt{3}}{9}}+$$

$$+\sqrt[3]{-6-i\,\frac{35\sqrt{3}}{9}}.$$

Как и следовало ожидать, ответ представился весьма громоздким выражением, не имеющим по внешнему ви-

ду ничего общего с известными нам корнями уравнения: 1. 3 и — 4.

Встает вопрос: как найти эти корни?

Оказывается, это можно сделать с помощью тригонометрии Все рассуждения проведем сперва в общем виде, а потом вернемся к данному примеру

Для сокращения записи внесем обозначение

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -D^2,$$

весьма удобное, так как в неприводимом случае (который мы и рассматриваем) $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$; тогда

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-D^2}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + Di}$$

Чтобы извлечь корень третьей степени из комплексного числа $-\frac{q}{2} + Di$, представим это число в тригонометрической форме. Для этого найдем его модуль r и аргумент φ по известному правилу (§ 16):

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{q^2}{4} + D^2} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \\ \cos\varphi &= -\frac{q}{2r} \text{ и } \sin\varphi = \frac{D}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Зная r и φ, можем записать:

$$-\frac{q}{2} + Di = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

следовательно (§ 18),

$$u = \sqrt[3]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right).$$

Формулы (12) подсказывают нам, что достаточно взять одно из значений u при $k = 0$, т. е.

$$u_0 = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right).$$

Так как в формулах (12) использовано обозначение: $u_0 = a_0 + b_0 i$, то имеем:

$$a_0 = \sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad b_0 = \sqrt[3]{r}\sin\frac{\varphi}{3};$$

$$y_0 = 2a_0 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$y_1 = -a_0 - b_0\sqrt{3} = -\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3} - \sqrt[3]{r}\sin\frac{\varphi}{3}\cdot\sqrt{3} =$$

$$= 2\sqrt[3]{r}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\varphi}{3}\right) =$$

$$= 2\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\varphi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right) =$$

$$= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right).$$

$$y_2 = -a_0 + b_0\sqrt{3} = -\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt[3]{r}\sin\frac{\varphi}{3}\cdot\sqrt{3} =$$

$$= 2\sqrt[3]{r}\left(-\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\varphi}{3}\right) =$$

$$= 2\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\varphi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right) =$$

$$= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Итак, корни уравнения (в неприводимом случае) выразились формулами:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}, \\ y_1 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right). \\ y_2 &= 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

где r и φ вычисляются по формулам (13).

Любопытно отметить, что неприводимый случай кубического уравнения тесно связан с задачей о трисекции угла. Это видно уже из того, что при отыскании его

корней (14) приходится находить $\cos\frac{\varphi}{3}$ по данному значению $\cos\varphi$, определяемому коэффициентами уравнения. Это обстоятельство подсказывает еще один путь решения уравнения

$$y^3 + py + q = 0, \tag{15}$$

в случае, когда

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0. \tag{16}$$

Возьмем известное тождество

$$4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3} \equiv \cos\varphi, \tag{17}$$

к которому сводится задача о трисекции угла φ. Положим в нем $\cos\frac{\varphi}{3} = t$, получим:

$$4t^3 - 3t = \cos\varphi. \tag{17a}$$

К такому же виду возможно, оказывается, преобразовать и данное уравнение (15) Действительно, положим в нем

$$y = 2t\sqrt{\frac{|p|}{3}} \tag{18}$$

получим:

1) при $q < 0$ $4t^3 - 3t = \sqrt{\frac{27\,q^2}{4\,|\,p\,|^3}}$;

2) при $q > 0$ $4t^3 - 3t = -\sqrt{\frac{27\,q^2}{4|\,p\,|^3}}$.

Тождество (17а) подсказывает нам, что уравнение 1) будет выполняться, если в нем положить

$$\sqrt{\frac{27\,q^2}{4\,|\,p\,|^3}} = \cos\varphi. \tag{19}$$

Последнее вполне возможно так как из неравенства (16) видно, что $\frac{p^3}{27}$ — отрицательное число, причем $\frac{q^2}{4} < \left|\frac{p^3}{27}\right|$, или $27\,q^2 < 4\,|\,p\,|^3$, и, следовательно.

$$\sqrt{\frac{27\,q^2}{4\,|\,p\,|^3}} < 1$$

Формула (19) дает возможность вычислять $\cos\varphi$, а следовательно, и угол φ с помощью логарифмических

таблиц. Зная φ, найдем $\frac{\varphi}{3}$, $\frac{\varphi+2\pi}{3}$ и $\frac{\varphi+4\pi}{3}$; числа $t_1=\cos\frac{\varphi}{3}$, $t_2=\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}$ и $t_3=\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$ и будут корнями уравнения 1), что легко проверить непосредственной подстановкой.

Подставим в левую часть уравнения 1), например, $t_3=\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}$, получим

$$4\cos^3\frac{\varphi+4\pi}{3}-3\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}\equiv\cos 3\left(\frac{\varphi+4\pi}{3}\right)=$$

$$=\cos\varphi=\sqrt{\frac{27q^2}{4|p|^3}}.$$

Используя подстановку (18), найдем корни уравнения (15):

$$\left.\begin{aligned} y_1&=2t_1\sqrt{\frac{|p|}{3}}=2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},\\ y_2&=2t_2\sqrt{\frac{|p|}{3}}=2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3}.\\ y_3&=2t_3\sqrt{\frac{|p|}{3}}=2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}. \end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Понятно, что в уравнении (2) (т. е. при $q>0$) следует положить

$$\cos\varphi=-\sqrt{\frac{27q^2}{4|p|^3}}$$

Вернемся снова к уравнению

$$y^3-13y+12=0,$$

корни которого 1, 3 и -4 мы не смогли найти, так как формула Кардано выразила их в виде суммы двух кубических радикалов из мнимых выражений. Применим последний из указанных выше способов решения таких уравнений. Так как в данном уравнении $q=12>0$, то подстановкой (18)

$$y=2t\sqrt{\frac{|p|}{3}}$$

оно приведется к виду:

$$4t^3-3t=-\sqrt{\frac{27q^2}{4|p|^3}},$$

и, следовательно, надо положить $\cos\varphi=-\sqrt{\frac{27q^2}{4|p|^3}}$

Подставив значения $q = 12$ и $p = -13$, получим:

$$\cos\varphi = -\sqrt{\frac{27\cdot 12^2}{4\cdot 13^3}},$$

$$\text{или } \cos(180^\circ - \varphi) = \sqrt{\frac{81\cdot 12}{13^3}}.$$

Используя четырехзначные таблицы логарифмов, получаем:

$$\lg\cos(180^\circ - \varphi) = \bar{1},8230$$
$$180^\circ - \varphi = 48^\circ 18',$$
$$\varphi = 131^\circ 42',$$

следовательно, $\frac{\varphi}{3} = 43^\circ 54'$; $\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 163^\circ 54'$,

$$\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 283^\circ 54'.$$

По формулам (20) корни уравнения выразятся так:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\frac{\varphi}{3} = 2\sqrt{\frac{13}{3}}\cdot\cos 43^\circ 54' \approx$$
$$\approx \sqrt{17{,}33}\cdot\cos 43^\circ 54',$$

$$y_2 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \approx \sqrt{17{,}33}\cdot\cos 163^\circ 54',$$

$$y_3 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \approx \sqrt{17{,}33}\cdot\cos 283^\circ 54'.$$

По таблицам логарифмов находим:

$\lg y_1 = 0{,}4771,$ $\quad y_1 = 3,$

$\lg|y_2| = 0{,}6020,$ $\quad |y_2| = 3{,}999 \approx 4,$ $\quad y_2 = -4,$

$\lg y_3 = 0{,}0000,$ $\quad y_3 = 1.$

Преимущество данного способа решения кубических уравнений (неприводимого вида) очевидно. Читатель без труда может теперь закончить решение поставленной выше задачи об изготовлении ящика (стр. 589).

В порядке упражнений рекомендуем решить следующие задачи:

1. Имеется круг из жести, диаметр которого $D = 40$ *см*. Требуется вырезать из этого круга такой сектор, из которого можно изготовить воронку объемом в 3 *л*.

Указание. Воронка имеет форму прямого кругового конуса, у которого образующая будет равна $\frac{D}{2} = 20$ *см*. Если бы мы знали высоту этого конуса h, то можно было бы найти радиус его основания $r = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - h^2}$ и длину дуги вырезываемого сектора $l = 2\pi r$, а следовательно, и радианную меру дуги вырезываемого сектора $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{2\pi r}{\left(\frac{D}{2}\right)}$. Таким образом, за неизвестное можно принять высоту вершины h.

$$\text{Объем конуса } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - h^2}\right)^2 \cdot h,$$

$$\text{откуда } V = \frac{1}{3}\pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 - h^2\right]h.$$

Остается подставить известные значения V и D и решить полученное уравнение третьей степени относительно h.

2. Какую высоту будет иметь прямой круговой конус, вписанный в шар радиуса $R = 50$ *см*, если объем этого конуса должен быть равен $\frac{1}{4}$ объема шара?

3. При расчете некоторого технического сооружения потребовалось узнать, какую высоту будет иметь прямой круговой цилиндр, вписанный в конус с диаметром основания $D = 8$ *м* и высотой $h = 3$ *м*, если известно, что объем цилиндра должен составлять 40% от объема конуса.

Найдите искомую высоту

НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

После изучения действий с комплексными числами легко перейти к понятию алгебраической функции от комплексного аргумента. В самом деле, как бы ни была сложна алгебраическая функция, в ней над аргументом не выполняются никакие другие операции, кроме сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, а такие операции над комплексными числами уже известны. Не представляет большого труда найти, например, все значения алгебраической функции

$$\frac{(x-1)^2}{x^3+5}-\sqrt[5]{x^4+2x^2-3}$$

при $x=3-4i$ и вообще при любом комплексном значении аргумента x.

Иначе обстоит дело с функциями неалгебраическими a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$ и т. д. Может ли аргумент таких функций принимать мнимые значения? Имеют ли вообще какой-либо смысл выражения вида: 2^{5i}, $\lg(1-2i)$, $\sin i$ и т. д.?

В данной главе даются ответы на эти вопросы.

ГЛАВА VII

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 25. Один из замечательных пределов в математике

Если когда-нибудь вам приходилось пользоваться техническим справочником или просматривать (хотя бы из любопытства) какие-нибудь книги по высшей мате-

матике, теоретической физике, механике, аэродинамике и т. п., то вы непременно встречались уже с замечательной трансцендентной функцией e^x. Объясняется это тем, что с помощью такой функции выражаются закономерности многих явлений природы, как, например движение тел в сопротивляемой среде, затухающие колебательные процессы, радиоактивный распад, размножение бактерий, непрерывный биологический рост материи и т. д.

Чему же равно число e, служащее основанием этой показательной функции, и как оно было найдено математиками?

Оказывается, число e является пределом выражения

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a,$$

в котором переменная величина a безгранично возрастает т. е. стремится к бесконечности.

Попробуем найти такой предел в предположении, что величина a, возрастая неограниченно, принимает последовательно только натуральные значения: 1, 2, 3, 4, 5, . . . , n, $n + 1$, ...

Составим таблицу хотя бы нескольких первых значений функции

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a;$$

a	1	2	3	4	. . . $\to\infty$
$1 + \frac{1}{a}$	2	1,5	1,333	1,25	. . . $\to 1$
$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a$	2	2,25	2,365	2,441	. . . $\to$?

Замечаем, что при $a \to \infty$ сумма $1 + \frac{1}{a} \to 1$, но к чему стремится $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^a$ и вообще имеет ли эта величина предел, из таблицы не видно.

Придется искать ответ аналитическим путем. Разложим $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ по формуле бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Выполним сокращение и некоторые преобразования в правой части:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{n-1}{n} +$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\times$$
$$\times\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\ldots\frac{n-(k-1)}{n} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\times$$
$$\times\frac{n-4}{n}\ldots\frac{n-(n-1)}{n} = 2 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right) +$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{4}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Заметив, что все слагаемые положительны, заключаем, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$.

Замечаем также, что с возрастанием n увеличивается как число слагаемых, так и каждое слагаемое

(начиная со второго), так как возрастают множители $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\left(1-\frac{3}{n}\right)$, . . . входящие в слагаемые, следовательно, выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ является возрастающей переменной величиной.

Однако, все время возрастая, эта величина остается все же меньше 3. Чтобы убедиться в этом, заменим в правой части каждый из множителей $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\left(1-\frac{3}{n}\right)$ . . ., единицей, тогда правая часть естественно станет больше и получится неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n}$$

Теперь заменим в знаменателях все множители большие двух, двойками, тогда правая часть неравенства станет еще больше и запишется так:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

Замечаем, что при $n \to \infty$ правая часть (начиная со второго слагаемого) дает бесконечную убывающую геометрическую прогрессию с первым членом $a_1=\frac{1}{2}$ и знаменателем $q=\frac{1}{2}$. сумма такой прогрессии, как известно, равна $\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, следовательно, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ всегда меньше 3.

Итак мы установили. что при возрастании n величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ также возрастает. но всегда остается меньше 3, следовательно, по известной теореме о пределе возрастающей но ограниченной переменной вели-

чины выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к определенному пределу, который заключен между 2 и 3. Этот предел обозначают буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e принято в качестве основания так называемых натуральных логарифмов. Это число можно вычислить с любой степенью точности; запишем первые 16 его знаков:

$$e = 2{,}7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ \ldots\ .$$

Докажем теперь, что выражение $\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$ стремится к тому же пределу e и в том случае, когда a безгранично возрастает, принимая любые положительные значения (целые, дробные или иррациональные)

Пусть n — целая часть числа a, тогда

$$n \leqslant a < n+1$$

причем ясно, что при $a \to \infty$ также и $n \to \infty$.

Отметим, что для обратных чисел будет выполняться неравенство:

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{a} > \frac{1}{n+1}$$

Прибавим по единице к каждому члену неравенства, получим:

$$1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{a} > 1+\frac{1}{n+1}$$

или

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{a} \leqslant 1+\frac{1}{n}$$

Возведем левую часть неравенства в n-ю степень, среднюю — в a-ю степень и правую — в $(n+1)$-ю степень; принимая во внимание, что $n \leqslant a < n+1$, получим:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{a}\right)^a < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Но

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

Следовательно, по известной теореме о пределах и величина $\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}$ стремится к тому же пределу e:

$$\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}=e \qquad (1)$$

Остается показать, что число e является пределом величины $\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}$ и в том случае, когда a стремится к бесконечности, принимая отрицательные значения, т. е.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}=e.$$

Для доказательства положим $a=-k$, получим:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}=\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-k}=\left(\frac{k-1}{k}\right)^{-k}=\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k}=$$

$$=\left(\frac{k-1+1}{k-1}\right)^{k}=\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k}=\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}\left(1+\frac{1}{k-1}\right).$$

Внесем еще одно обозначение: $k-1=m$, получим:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\left(1+\frac{1}{m}\right).$$

Из равенств $a=-k$ и $m=k-1$ получаем: $k=-a$, следовательно, при $a\to-\infty$ $k\to+\infty$ и $m\to+\infty$, поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}=\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)=e\cdot 1=e$$

Итак, мы выяснили, как пришли математики к числу e. Теперь можно перейти к функции e^{x}.

§ 26. Функция e^x и ее приложения

Тесная связь показательной функции e^x с замечательным пределом, найденным в предыдущем параграфе, раскрывается следующей ***теоремой***: *при любом действительном значении* x

$$e^x = \lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{x}{a}\right)^a. \qquad (1)$$

Для доказательства положим $a = nx$ при $x \neq 0$, тогда

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^a = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x.$$

Понятно, что при $a\to\infty$ число n также стремится к ∞, а величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a}\right)^a = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = e^x.$$

При $x = 0$ равенство (1) также справедливо, так как $e^0 = 1$ и $\lim\limits_{a\to\infty}\left(1+\frac{0}{a}\right)^a = 1$.

Равенство (1) раскрывает природу показательной функции e^x и причину появления ее в математике. Выясним теперь, почему эта функция находит широкое применение в других науках и в технической практике.

Начнем с решения задачи, известной читателям из школьного курса математики:

Сумма в a руб. положена в сберегательную кассу по p % годовых. В какую сумму обратится этот вклад через t лет?

Решение. Так как сберегательные кассы производят начисления процентов только в конце каждого года, то рост вклада по годам выразится так:

через 1 год $a_1 = a + a\cdot\frac{p}{100} = a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ (руб.),

через 2 года: $a_2 = a_1 + a_1\cdot\frac{p}{100} = a_1\left(1+\frac{p}{100}\right) =$

$$= a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \text{ (руб.)},$$

через 3 года: $a_3 = a_2 + a_2 \cdot \frac{p}{100} = a_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) =$

$$= a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \text{ (руб.)}$$

и т. д.

Через t лет вклад обратится в сумму:

$$a_t = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t \text{ (руб.)}.$$

Поставим теперь новый вопрос: в какую сумму вырос бы тот же вклад a руб., если бы начисления процентов производились не через год, а в конце каждого месяца по тем же p % годовых и, следовательно, по $\left(\frac{p}{12}\right)$ % в месяц?

Аналогичные рассуждения дают:

через 1 месяц: $A_1 = a + a \cdot \frac{p}{12 \cdot 100} + a\left(1 + \frac{p}{12 \cdot 100}\right)$(руб.),

через 2 месяца: $A_2 = A_1 + A_1 \cdot \frac{p}{12 \cdot 100} =$

$$= A_1\left(1 + \frac{p}{12 \cdot 100}\right) = a\left(1 + \frac{p}{12 \cdot 100}\right)^2 \text{ руб.}$$

и т. д.

Через t лет $= 12t$ месяцев получим:

$$A_{12t} = a\left(1 + \frac{p}{12 \cdot 100}\right)^{12t} \text{ (руб.)}.$$

Понятно, что если бы начисление процентов производилось не через месяц, а через день, т. е. не через $\frac{1}{12}$ года, а через $\frac{1}{365}$ года, то при тех же p % годовых через t лет вклад вырос бы в сумму:

$$A_{365t} = a\left(1 + \frac{p}{365 \cdot 100}\right)^{365t} \text{ (руб.)}.$$

Если бы начисление процентов производилось через каждый час, то через t лет $= 365 \cdot 24t$ часов получилось бы:

$$A_{365 \cdot 24t} = a\left(1 + \frac{p}{365 \cdot 24 \cdot 100}\right)^{365 \cdot 24 \cdot t} \text{ (руб.)}.$$

Закономерность понятна: если начисление процентов производится через каждую $\frac{1}{n}$ года, то за t лет вклад вырастет в сумму:

$$A_{nt} = a\left(1 + \frac{p}{n \cdot 100}\right)^{nt} \text{ (руб.)}.$$

Представим себе теперь, что n неограниченно возрастает, тогда промежуток, через который производится начисление процентов, будет неограниченно уменьшаться, станет равным 1 *мин*, затем 1 *сек*, 0,1 *сек*, 0,001 *сек* и т. д. В пределе, когда $n \to \infty$, рост вклада станет непрерывным и за t лет вклад обратится в некоторую сумму

$$A = \lim_{n\to\infty} A_{nt} = \lim_{n\to\infty} a\left(1 + \frac{p}{n \cdot 100}\right)^{nt}.$$

Внесем обозначение: $\frac{p}{n \cdot 100} = \frac{1}{m}$, получим:

$$n = \frac{mp}{100}.$$

$$A = \lim_{m\to\infty} a\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{mpt}{100}} = \lim_{m\to\infty} a\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{pt}{100}} = a \cdot e^{\frac{pt}{100}}.$$

Положив ради краткости записи $\frac{p}{100} = k$, получим:

$$A = a \cdot e^{kt}. \qquad (2)$$

Как видим, закон непрерывного роста вклада по «сложным процентам» выразился знакомой уже нам показательной функцией e^x при $x = kt$. Экспериментальные исследования показывают, что по такому закону происходит непрерывный рост древесины в лесу, размножение бактерий, рост кристаллов, распад радия и многие другие явления. Поэтому на языке математики закономерности таких явлений передаются также показательной функцией e^x.

Решим несколько задач, имеющих практическое значение.

1. В некоторой отрасли промышленности запланирован ежегодный прирост продукции в 10%. Определить объем продукции в этой отрасли через $t = 5$, 10 и 20 лет.

Решение. Обозначим через a начальный объем продукции в данной отрасли промышленности; искомый объем выразится функцией:

$$y = a \cdot e^{kt}, \quad \text{где } k = \frac{p}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10},$$

т. е.

$$y = a \cdot e^{0,1t}.$$

При $t_1 = 5$ $y_1 = a \cdot e^{0,1t} = a\sqrt{e} \approx a\sqrt{2,72} \approx 1,65a$, т. е. за 5 лет продукция возрастет в 1,65 раза, или на 65%.

При $t_2 = 10$ $y_2 = a \cdot e^1 \approx a \cdot 2,72 = 2.72a$, т. е. за 10 лет продукция возрастет в 2,72 раза, или на 172%.

При $t_3 = 20$ $y_3 = a \cdot e^2 \approx a \cdot 2,72^2 \approx 7,39a$, т. е. через 20 лет продукция возрастет в 7,39 раза, или на 639%.

2. Через сколько лет от 1 $г$ радия останется 0,125 $г$, если известно, что период полураспада радия равен 1590 годам?

Решение. Закон распада радия выражается формулой:

$$y = y_0 e^{kt},$$

где y_0 — первоначальное количество радия, t—протекшее время, y—окончательное количество радия.

Обозначим через t_1 искомое число лет, получим:

$$y_1 = y_0 e^{kt_1},$$

т. е. $0,125 = 1 \cdot e^{kt_1}$,

или $\lg 0,125 = kt_1 \lg e$,

откуда $t_1 = \frac{\lg 0.125}{k \cdot \lg e}$.

Для определения коэффициента k используем условие задачи, по которому через $t = 1590$ лет остается половина первоначального количества радия, т. е. $\frac{y_0}{2} = y_0 \cdot e^{k \cdot 1590}$, или $e^{k \cdot 1590} = 0,5$.

Логарифмирование этого равенства по частям дает: $k \cdot 1590 \cdot \lg e = \lg 0,5$, откуда $k = \frac{\lg 0.5}{1590 \cdot \lg e}$.

Подставив значение k в найденную ранее формулу, получим:

$$t_1 = \frac{1590 \cdot \lg 0,125}{\lg 0,5} \approx 4770 \text{ лет.}$$

3. Закон размножения некоторого вида бактерий выражается функцией $y = y_0 e^{kt}$, где y_0 — первоначальное количество бактерий (по весу), t — протекшее время, y—окончательное количество бактерий (по весу). Определить коэффициент k, если опытным путем установлено, что из 5 *г* этих бактерий, помещенных в соответствующую питательную среду, через 8 *ч* получилось 140 *г*. В течение какого времени количество таких бактерий удваивается?

Решение. По условию имеем:

$$140 = 5 \cdot e^{k \cdot 8},$$

откуда $e^{8k} = 28$, $8k \cdot \lg e = \lg 28$,

$$k = \frac{\lg 28}{8 \cdot \lg e} \approx \frac{1,4472}{8 \cdot 0,4343} \approx 0,417.$$

Следовательно, закон размножения бактерий данного вида выразится функцией:

$$y = y_0 e^{0,417t}.$$

Обозначим через t_1 время, в течение которого количество бактерий удвоится, получим:

$$2y_0 = y_0 e^{0,417t_1}.$$

Отсюда $e^{0,417t_1} = 2$, $0,417\, t_1 \cdot \lg e = \lg 2$,

$$t_1 = \frac{\lg 2}{0.417 \cdot \lg e} \approx \frac{0,3010}{0,417 \cdot 0.4343} \approx 1,66.$$

Итак, количество данных бактерий удваивается (по весу) через 1,66 часа.

Упражнения.

1. Найти следующие пределы

1) $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$;

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{x}$;

3) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+1}{a}}$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{x}$;

5) $\lim\limits_{a \to \infty} \left(\frac{3a+2}{3a+1}\right)^{a}$.

2. Каково было начальное количество радия в минерале, возраст которого определяется в $H = 1000$ *лет*, если в настоящее время он содержит $m = 1$ *г* радия?

Указание. Распад радия происходит по закону:

$$y = y_0 e^{kt},$$

где y_0—первоначальное количество радия, t—время, y—окончательное количество, причем период полураспада радия $T = 1590$ лет.

3. Какая часть падающего на поверхность воды света дойдет до глубины 30 *м*, если слой воды в 3 *м* поглощает 50% света?

Указание. Закон поглощения света водой выражается функцией $y = y_0 e^{kx}$, где y_0—количество света, падающего на поверхность воды, y — количество света, проникающего на глубину в x метров.

4. Воздушный шар должен подняться на высоту 44 *км*. Рассчитать давление воздуха на этой высоте, если давление на уровне моря равно 768 *мм* и при подъеме на высоту 5,5 *км* оно уменьшается в 2 раза.

Указание. Изменение давления воздуха подчиняется закону, выраженному функцией $y = y_0 e^{kx}$, где y_0—давление на поверхности моря, y—давление на высоте в x *км* над уровнем моря.

§ 27. Определение показательной функции e^z с комплексным аргументом

В предыдущем параграфе мы установили, что при действительных значениях x величина e^x равна пределу функции $\left(1+\frac{x}{a}\right)^a$, когда $a \to \infty$. После этого естественно определить степень e^z с комплексным показателем $z = x + yi$ с помощью равенства:

$$e^z = \lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{z}{a}\right)^a. \qquad (3)$$

При действительных значениях z это равенство справедливо по доказанному (§ 26); при мнимых значениях z мы принимаем его как определение степени e^z.

Однако для понимания смысла равенства (3) необходимо выяснить понятие предела комплексной переменной величины.

Определение предела комплексной величины z точно такое же. как для действительной величины: *говорят, что величина z стремится к своему пределу c, и пишут*

$$\lim z = c$$

если z изменяется так что с некоторого момента величина $|z - c|$ становится меньше любого наперед заданного положительного числа ε, т. е. стремится к 0

Выясним геометрический смысл этого определения. Комплексная переменная величина $z = x + yi$ изображается вектором $\overline{OM}$ (рис. 51), который изменяет свою длину и направление с изменением z. Постоянное число $c = a + bi$ изображается вектором $\overline{OC}$. Число $z - c$ изображается вектором $\overline{CM}$, а модуль этого числа $|z - c|$ равен длине вектора $\overline{CM}$. Действительно, число $z - c = (x - a) + (y - b)\,i$; по определению модуля комплексного числа имеем:

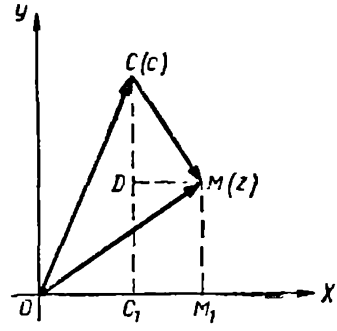


Рис. 51.

$$|z - c| = |(x - a) + (y - b)\,i| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2};$$

с другой стороны, из прямоугольного треугольника CDM находим:

$$CM = \sqrt{DM^2 + DC^2} = \sqrt{(OM_1 - OC_1)^2 + (CC_1 - DC)^2} =$$

$$= \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2},\ \text{следовательно,}\ |z - c| = CM.$$

Если z изменяется так, что $|z - c| \to 0$, то по доказанному и $CM \to 0$, следовательно, вектор $\overline{OM}$ будет приближаться к вектору $\overline{OC}$ как по направлению, так и по величине и в пределе совпадет с ним.

Итак, если переменная z стремится к своему пределу c, то изображающий эту переменную вектор $\overline{OM}$ стремится совпасть с вектором $\overline{OC}$, изображающим число c. Понятно, что при этом отрезок OM_1, равный x, будет стремиться совпасть с отрезком OC_1, равным a, и отрезок M_1M, равный y, будет стремиться совпасть с отрезком C_1C, равным b; короче:

$$x \to a, \quad y \to b,$$

а это означает, что $a = \lim x$ и $b = \lim y$.

Учтя это, равенство $\lim z = c$ можно записать так:

$$\lim z = c = a + bi = \lim x + i \lim y,$$

т. е.

$$\lim z = \lim x + i \lim y.$$

К этому соотношению можно было прийти из аналитических соображений. Действительно, по доказанному $|z-c|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, следовательно, $|z-c|$ может стремиться к нулю в том случае, если стремится к нулю сумма квадратов действительных чисел $(x-a)^2+(y-b)^2$, что возможно только при $(x-a)\to 0$ и $(y-b)\to 0$, а последнее означает, что $a=\lim x$ и $b=\lim y$.

Итак, *предел комплексной величины равен сумме пределов действительной и мнимой частей этой величины.*

В частности, если $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то получаем:

$$\lim z=\lim(r\cos\varphi)+i\lim(r\sin\varphi)=$$
$$=\lim r[\lim\cos\varphi+i\lim\sin\varphi]=$$
$$=\lim r[\cos(\lim\varphi)+i\sin(\lim\varphi)].$$

Последнее можно получить также и из геометрических соображений.

Вернемся теперь снова к равенству (3).

Чтобы найти предел величины $\left(1+\frac{z}{a}\right)^a$ при $a\to\infty$, положим $z=x+yi$ и представим $1+\frac{z}{a}=1+\frac{x}{a}+\frac{y}{a}i$ в тригонометрической форме:

$$1+\frac{z}{a}=\left(1+\frac{x}{a}\right)+\frac{y}{a}i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где

$$r=\sqrt{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2},\quad \cos\varphi=\frac{1+\frac{x}{a}}{r}$$
$$\text{и}\quad \sin\varphi=\frac{y}{ar},$$

причем ясно, что при $a\to\infty$ $r\to 1$, $\sin\varphi\to 0$, а потому и $\varphi\to 0$.

В тригонометрической форме будем иметь:

$$\left(1+\frac{z}{a}\right)^a=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^a=r^a(\cos a\varphi+i\sin a\varphi),$$

$$\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{z}{a}\right)^a=\lim r^a[\cos(\lim a\varphi)+i\sin(\lim a\varphi)].$$

Найдем сначала предел r^a:

$$r^a=\left(\sqrt{1+2\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}\right)^a=\left(1+\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{\frac{a}{2}};$$

внесем обозначение: $\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{1}{n}$, или $\frac{2}{a}\left(x+\right.$ $\left.+\frac{x^2+y^2}{2a}\right)=\frac{1}{n}$, тогда $\frac{a}{2}=n\left(x+\frac{x^2+y^2}{2a}\right)$ причем $n\to\infty$, когда $a\to\infty$; при таком обозначении r^a запишется в следующем виде:

$$r^a=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{x+\frac{x^2+y^2}{2a}}.$$

Переходя к пределу при a и n, стремящимися к бесконечности, замечаем, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$, а выражение $\left(x+\frac{x^2+y^2}{2a}\right)\to x$, следовательно, $\lim\limits_{a\to\infty} r^a=e^x$

При отыскании предела $a\varphi$ используем следующее очевидное равенство:

$$a\varphi=a\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\sin\varphi=a\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{y}{ar}=\frac{y}{r}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

Приняв во внимание, что при $a\to\infty$ $r\to 1$ и $\varphi\to 0$, будем иметь:

$$\lim_{a\to\infty} a\varphi=\lim_{a\to\infty}\left(\frac{y}{r}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)=\lim_{a\to\infty}\frac{y}{r}\cdot\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\sin\varphi}=y\cdot\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

Но для дуг I четверти выполняется неравенство:

$$\sin\varphi<\varphi<\operatorname{tg}\varphi;$$

разделив его на $\sin\varphi$, получим:

$$1<\frac{\varphi}{\sin\varphi}<\frac{1}{\cos\varphi}.$$

При $\varphi\to 0$ дробь $\frac{1}{\cos\varphi}\to 1$, следовательно, и величина $\frac{\varphi}{\sin\varphi}\to 1$, т. е. $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\sin\varphi}=1$.

Таким образом, $\lim\limits_{a\to\infty} a\varphi=y\cdot 1=y$.

Итак, окончательно имеем:

$$\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{z}{a}\right)^a=e^x(\cos y+i\sin y).$$

следовательно, равенство (3) примет теперь следующий вид:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad (3а)$$

или

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \qquad (3в)$$

Это равенство раскрывает смысл степени e^z при комплексном переменном z и дает возможность вычислять эту степень при любом значении z.

Так, например, при $z = 2{,}10 + i \cdot 1{,}35$, получаем:

$$e^{2,10+i\cdot 1,35} = e^{2,10}(\cos 1{,}35 + i \sin 1{,}35) \approx 8{,}166\,(0{,}2190 + \\ + i \cdot 0{,}9757) = 1{,}788 + i \cdot 7{,}964.$$

Нетрудно убедиться в том, что для показательной функции комплексного аргумента сохраняется основное свойство, которым обладала показательная функция действительного аргумента, а именно: при умножении показательных функций с одинаковыми основаниями их показатели складываются.

В самом деле, пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, тогда по формуле (3в) имеем:

$$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1),$$
$$e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2).$$

Перемножив эти равенства почленно, получим:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)].$$

С другой стороны:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

следовательно, по формуле (3в) имеем:

$$e^{z_1+z_2} = e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)].$$

Сравнивая результаты, получаем:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

С помощью формулы (3в) легко обнаружить и такое свойство показательной функции e^z с мнимым показателем z, которым не обладает функция e^x с действительным показателем, а именно периодичность. Показательная функция e^z обладает периодом, равным $2\pi i$, т. е.

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \qquad (*)$$

В самом деле, если $z = x + iy$, то

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i\,(y+2\pi)} = e^x[\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)] =$$
$$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy} = e^z.$$

В частности, при $z = 0$ равенство (*) дает:

$$e^{2\pi i} = 1.$$

Упражнения.

Найти значения показательной функции e^z при z, равном:

а) $1 + i$; б) $-2 + 5i$; в) $3{,}43 - i \cdot 1{,}78$; г) $0 + 3\pi i$; д) $1 - \frac{\pi}{2} i$.

ГЛАВА VIII

КРУГОВЫЕ ФУНКЦИИ ОТ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

§ 28. Замечательные формулы Эйлера

Если в равенстве

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

положить $x = 0$, то получается замечательная формула

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \tag{4}$$

открытая петербургским академиком Леонардом Эйлером в 1740 г.

Эта формула раскрывает связь круговых функций с показательной функцией мнимого аргумента и позволяет выразить круговые функции через показательную функцию.

Действительно, заменим в ней y на φ, а затем на $-\varphi$, получим:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i \sin\varphi.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим:

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi \quad \text{и} \quad e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin\varphi,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Эти формулы также открыты Эйлером и вместе с формулой (4) имеют широкое применение как в матема

тике, так и в прикладных науках, в физике, в механике и, в частности, в аэродинамике.

Формулы Эйлера с успехом применяются и в самой тригонометрии для упрощения различных тригонометрических преобразований. Пусть, например, требуется выразить $\cos^7 x$ через первые степени косинусов кратных аргументов (это преобразование бывает необходимо при интегрировании функции).

Применяя первую из формул (5) и формулу бинома Ньютона, получаем:

$$\cos^7 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^7 = \frac{1}{2^7}(e^{ix}+e^{-ix})^7 = \frac{1}{2^7}(e^{7xi}+7e^{5xi}+$$

$$+21e^{3xi}+35e^{xi}+35e^{-xi}+21e^{-3xi}+7e^{-5xi}+e^{-7xi}) =$$

$$= \frac{1}{2^6}\left(\frac{e^{7xi}+e^{-7xi}}{2}+7\cdot\frac{e^{5xi}+e^{-5xi}}{2}+21\frac{e^{3xi}+e^{-3xi}}{2}+\right.$$

$$\left.+35\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\right) = \frac{1}{2^6}(\cos 7x+7\cos 5x+21\cos 3x+35\cos x).$$

Понятно, что таким же путем можно выражать $\cos^n x$ и $\sin^n x$ через косинусы и синусы кратных аргументов при любом натуральном n.

Упражнения.

1. Используя формулы Эйлера, проверить справедливость следующих тождеств:

1) $\sin(-x) \equiv \sin x$;
2) $\cos(-x) \equiv \cos x$;
3) $\cos(x+2\pi) \equiv \cos x$;
4) $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$;
5) $\cos(x+y) \equiv \cos x \cos y - \sin x \sin y$;
6) $2\sin x \cos x \equiv \sin 2x$.

2. Используя формулу Эйлера и таблицы круговых функций, найти:

$$e^{i}; \quad e^{\pi i}; \quad e^{-\frac{\pi}{2}i}; \quad e^{1+3i}.$$

3. Доказать тождество:

$$1+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha \equiv \frac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha} \quad (\alpha \neq \pi k).$$

Указание. С помощью формул Эйлера выразить круговые функции через показательные и убедиться в равенстве левой и правой частей тождества.

4. $\cos^5 x$ и $\sin^5 x$ представить в виде сумм первых степеней косинуса и синуса кратных аргумеитов.

§ 29. Определение круговых функций от комплексного аргумента

После того как доказана справедливость формул Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

для действительных значений x, естественно определить аналогичными формулами круговые функции для комплексного аргумента:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \quad \text{и} \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \tag{6}$$

Прежде всего убедимся, что при таких определениях остается в силе для комплексного z и первая формула Эйлера:

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z. \tag{7}$$

Действительно, по определению (6) имеем:

$$\cos z + i \sin z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} + i \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = e^{zi}.$$

Теперь нетрудно показать, что все известные нам теоремы о круговых функциях действительного аргумента сохраняются и при комплексном аргументе.

Рассмотрим лишь некоторые из этих теорем, так как другие доказываются аналогичным путем.

1. Теорема о четности косинуса и нечетности синуса:

$$\cos(-z) = \frac{e^{-zi} + e^{zi}}{2} = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \cos z,$$

$$\sin(-z) = \frac{e^{-zi} - e^{zi}}{2i} = -\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = -\sin z.$$

2. Теорема сложения:

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

Действительно, используя формулы (6, 7), получаем:

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{(z_1+z_2)i} + e^{-(z_1+z_2)i}}{2} = \frac{e^{z_1 i}\, e^{z_2 i} + e^{-z_1 i}\, e^{-z_2 i}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) + \right.$$

$$\left. + (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)\right] =$$

$$= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

3. Положив в предыдущей формуле $z_2 = -z_1$, получаем:

$$\cos 0 = \cos z_1 \cos(-z_1) - \sin z_1 \sin(-z_1),$$

откуда, используя свойства четности косинуса и нечетности синуса, находим:

$$1 = \cos^2 z_1 + \sin^2 z_1.$$

4. Периодичность функции $\cos z$ с периодом 2π обнаруживается также через теорему сложения:

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \sin z \sin 2\pi = \cos z.$$

Периодичность синуса можно обнаружить, используя его определение (6) и периодичность показательной функции:

$$\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{(z+2\pi)i} - e^{-(z+2\pi)i}}{2i} = \frac{e^{zi} \cdot e^{2\pi i} - e^{-zi} \cdot e^{-2\pi i}}{2i} = \sin z,$$

так как по доказанному выше (стр. 621) $e^{2\pi i} = 1$ и $e^{-2\pi i} = \frac{1}{e^{2\pi i}} = 1$.

В заключение отметим, что с помощью формул Эйлера тригонометрическую форму комплексного числа можно заменить более краткой, так называемой показательной формой. Действительно, в тригонометрической форме всякое комплексное число z представляется так:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi);$$

но по формуле Эйлера $\cos\varphi + i \sin\varphi = e^{\varphi i}$, следовательно,

$$z = re^{\varphi i},$$

где по-прежнему r—модуль комплексного числа, а φ—его аргумент.

Представим, например, в показательной форме число $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Найдем модуль r и аргумент φ этого числа:

$$r = \sqrt{1+3} = 2;$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{откуда} \quad \varphi = -\frac{\pi}{3}.$$

Следовательно,

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

При выполнении некоторых операций показательная форма комплексного числа весьма удобна.

Особенно просто записывается правило умножения и деления чисел $z_1 = r_1 e^{\varphi_1 i}$ и $z_2 = r_2 e^{\varphi_2 i}$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{\varphi_1 i} \cdot r_2 e^{\varphi_2 i} = r_1 r_2 e^{(\varphi_1+\varphi_2) i}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\varphi_1-\varphi_2) i}.$$

Упражнения.

1. Найдем значения круговых функций $\cos z$ и $\sin z$ при $z = i$
По определению (6) имеем:

$$\cos i = \frac{e^{i \cdot i} + e^{-i \cdot i}}{2} = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} = \frac{e^2 + 1}{2e} \approx$$

$$\approx \frac{8{,}39}{5{,}44} \approx 1{,}54;$$

$$\sin i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e}{2i} = \frac{(e^{-1} - e) \cdot i}{-2} = \frac{e^2 - 1}{2e} i = 1{,}17i.$$

2. Найдем $\cos(1 - 2i)$.
По определению имеем:

$$\cos(1 - 2i) = \frac{e^{i(1-2i)} + e^{-i(1-2i)}}{2} = \frac{e^{2+i} + e^{-2-i}}{2} =$$

$$= \frac{e^2(\cos 1 + i \sin 1) + e^{-2}(\cos 1 - i \sin 1)}{2} = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \cos 1 +$$

$$+ i \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \sin 1 \approx 2{,}03 + 3{,}05i.$$

3. В упражнении 1 мы нашли $\cos i \approx 1{,}54$, который оказался действительным и притом больше единицы. Покажем, что косинус «чисто мнимого» числа всегда равен действительному числу, причем это число может быть как угодно большим.

Действительно, положим $z = xi$ в равенстве (6), получим:

$$\cos(xi) = \frac{e^{i(xi)} + e^{-i(xi)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^x} + e^x\right).$$

Итак, $\cos(xi)$ равен действительному числу $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^x} + e^x\right)$, при достаточно большом x это число может быть сколь угодно большим так как

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^x} + e^x\right) = \infty$$

4. Найти z, если $\cos z = 100$.

Будем искать ответ в виде $z = xi$. По определению имеем:

$$\cos(ix) = \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2},$$

следовательно, $\frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = 100$,

или $(e^x)^2 - 200\,e^x + 1 = 0$.

Решая это уравнение относительно e^x, получаем:

$$e^x = 100 \pm \sqrt{9999}$$

откуда $x = \ln(100 \pm \sqrt{9999}) = \lg(100 \pm \sqrt{9999}) \cdot \frac{1}{\lg e}$.

Вычисления дают: $x_1 \approx 5{,}298$,

$$x_2 \approx -4{,}606.$$

Итак, мы нашли два значения аргумента z:

$$z_1 \approx 5{,}298i \text{ и } z_1 \approx -4{,}606\,i.$$

Существуют и другие значения z, удовлетворяющие данному условию, так как функция, обратная косинусу, также многозначна во множестве комплексных чисел, как и во множестве действительных чисел, однако рамки данной книги не позволяют развивать дальше затронутые нами вопросы.

Рекомендуем читателю выполнить следующие упражнения:

1. Найти значения круговых функций $\sin z$ и $\cos z$ при $z = \pi i$, $1 - i$, $2 + 3i$.

2. Найти z, если $\cos z = 1{,}25$.

Указание. Можно положить $z = xi$.

3. В каких случаях $\sin z$, где $z = x + iy$, является действительным числом?

Указание. $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) =$

$$= \sin x \cdot \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} + \cos x \cdot \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = \sin x \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} +$$

$$+ i \cos x \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2},$$ а это число будет действительным, если

1) $\cos x = 0$ и, следовательно, $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$,

или

2) $\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = 0$, т. е. при $y = 0$.

4. Записать формулу Моавра

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

в показательной форме.

5. Если комплексное число $x + iy = re^{i\varphi}$, то сопряженное ему число $x - iy = re^{-i\varphi}$. Доказать.

6. Записать в показательной форме числа:

$$i,\ 1-i,\ 2\sqrt{3}+2i,\ 5\ (\cos 1{,}4+i\sin 1{,}4).$$

7. Проверить справедливость равенства:

$$i^i = e^{-\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)},$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Указание: $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}$.

Следовательно,

$$i^i = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}\right]^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}.$$

Как видим, степень i^i имеет бесконечное множество значений.

§ 30. Логарифм от комплексного аргумента

Известно, что логарифмом числа x при основании $a > 0$ $(a \neq 1)$ называют показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число x. Если основание $a = 10$, то логарифм называют десятичным и обозначают через $\lg x$. Если основание $a = e = 2{,}718\ldots$, то логарифм называют натуральным и обозначают через $\ln x$. При всяком другом основании a пишут $\log_a x$.

Примеры. $\lg 0{,}01 = -2$, так как $10^{-2} = 0{,}01$;

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right)^3 = -3, \text{ так как } e^{-3} = \left(\frac{1}{e}\right)^3;$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4, \text{ так как } \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81.$$

Имея таблицы десятичных логарифмов, легко найти логарифм числа при любом основании.

Пусть, например, требуется найти натуральный логарифм данного числа x. Обозначим искомое его значение через α, будем иметь:

$$\ln x = \alpha.$$

По определению логарифма это значит:

$$e^\alpha = x.$$

Возьмем десятичный логарифм от левой и правой частей этого равенства, получим:

$$\lg e^\alpha = \lg x, \text{ или } \alpha \cdot \lg e = \lg x,$$

откуда

$$a = \lg x \cdot \frac{1}{\lg e},$$

т. е.

$$\ln x = \lg x \cdot \frac{1}{\lg e}.$$

Внесем обозначение:

$$M = \frac{1}{\lg e} = \frac{1}{2{,}7182\ldots} \approx 2{,}3026,$$

получим:

$$\ln x = \lg x \cdot M \approx \lg x \cdot 2{,}3026.$$

Пример. $\ln 5{,}47 = \lg 5{,}47 \cdot M \approx 0{,}7380 \cdot 2{,}303 \approx 1{,}700.$

Данное выше определение логарифма в школьном курсе математики имело силу только для положительных чисел, так как логарифмы отрицательных чисел (не говоря уже о логарифмах мнимых чисел) в области действительных чисел не существуют.

После того как мы изучили комплексные числа, естественно поставить вопрос: не существуют ли логарифмы отрицательных чисел среди комплексных чисел и вообще нельзя ли распространить известное определение логарифма на любые комплексные числа?

Попробуем это сделать сперва для какого-нибудь конкретного числа, например для (-2).

Предположим, что $\ln(-2) = u + iv$, где u и v пока неизвестны. По определению натурального логарифма будем иметь:

$$e^{u+iv} = -2 \text{ или } e^u \cdot e^{iv} = -2.$$

Заметив, что $e^{iv} = \cos v + i \sin v$ (см. § 27) и

$$-2 = 2[\cos(\pi + 2\pi k) + i \sin(\pi + 2\pi k)],$$

где $k = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots,$

получим:

$$e^u(\cos v + i \sin v) = 2\ [\cos(\pi + 2\pi k) + i \sin(\pi + 2\pi k)].$$

Но два комплексных числа могут быть равными только в том случае, когда равны их модули и аргументы, следовательно, надо положить:

$$e^u = 2 \text{ и } v = \pi + 2\pi k,$$

откуда

$$u = \ln 2,\ u + iv = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k).$$

Итак, наше предположение, что логарифмами отрицательных чисел могут быть комплексные числа, подтвердилось на конкретном примере:

$$\ln(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k), \quad \text{где} \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \quad \ldots$$

причем оказалось, что логарифм отрицательного числа —2 имеет бесконечное множество значений. Аналогичным образом можно искать натуральный логарифм для любого комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Пусть $\ln(x + iy) = u + iv$, где u и v пока неизвестны. По определению натурального логарифма это значит, что

$$e^{u+iv} = x + iy, \text{ или } e^u \cdot e^{iv} = x + iy.$$

Переходим к тригонометрической форме с учетом, что

$$e^{iv} = \cos v + i\sin v, \text{ а } x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= r[\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)], \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

получим:

$$e^u(\cos v + i\sin v) = r[\cos\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)].$$

Сравнивая модули и аргументы этих чисел, получаем:

$$e^u = r, \quad v = \varphi + 2\pi k,$$

откуда $u = \ln r$, $u + iv = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$ и, следовательно,

$$\ln(x + iy) = \ln r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad (*)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пример. Найти $\ln(1 + i)$.

Решение. Запишем число $1 + i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

следовательно, $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

По формуле (*) получаем:

$$\ln(1 + i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \text{ где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Упражнения.

1. Используя таблицы десятичных логарифмов, найти: $\ln 2$, $\ln \sqrt{2}$, $\ln \pi$, $\ln 10$, $\ln 0{,}7328$.

2. Найти: $\ln(-1)$, $\ln i$, $\ln(1-i\sqrt{3})$.

3. Найти натуральные логарифмы чисел.

$$z_1 = e\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right); \; z_2 = 0{,}1\,(\cos 1 + i\sin 1);$$

$$z_3 = 5{,}8\,(\cos 1{,}34 + i\sin 1{,}34).$$

4. Найти: $\lg(-1)$, $\lg(-e)$, $\lg i$.

Указание. $\lg z = \ln z \cdot \dfrac{1}{\ln 10}$.

ОТВЕТЫ

Часть I. Тригонометрия острого угла

§5. 2. 24°. 4. 68°.

§6. 3. 68°12′ и 21°48′. 4. $R \approx 10{,}3$ *кг*, $\alpha \approx 30°20'$, $\beta \approx 59°40'$. 5. 30°00′ 6. Не менее 1,5°. 8. 34′. 9. 60° и 30° 11. 12,4%. 12. $\frac{1}{160}$; 0°22′. 13. 1) 2°00′; 2) 2°20′.

§ 7. 1. 40 *м*. 2. 2,6 *км*. 3. 1,0 *м*.

§ 8. 1. 77,9 *м*. 2. 242 *м*.

§ 12. 7. 38°, 8. Отклонение от перпендикулярного направления против течения 37°. 9. 10°. 10. 27,2 *см*. 11. 7,8 *м*. 12. 4,4 *м*.

§ 13. 1. Около 2 *км*. 3. $1{,}4 \cdot 10^6$ *км*. 4. 5,2 *км*. 5. 1640 *м*. 6. Высота 5,4 *м*, основание 15 *м*. 7. 720 $м^2$. 8. 4,8 *км*. 9. Расстояние между центрами отверстий 106 *мм*. 10. 1,8 дюйма; 9,4 %, 12. $AC = CD \approx 8{,}81$ *м*, $CE \approx 16{,}3$ *м* наклон ската AC равен 67°30′, наклон ската CD — 22°30′.

§ 16. 1. 1. $b \approx 8{,}93$, $c \approx 15{,}0$, $B \approx 36°40'$; 2. $a \approx 8{,}0$, $c \approx 8{,}9$, $B \approx 26°$; 3. $a \approx 15$, $b \approx 20$, $B \approx 53°$; 4. $a \approx 209$ $b \approx 120$, $A \approx 60°10'$; 5. $c \approx 29$, $A \approx 44°$, $B \approx 46°$; 6. $c \approx 137$, $A \approx 40°00'$, $B \approx 50°00'$; 7. $b \approx 33$, $A \approx 60°$, $B \approx 30$; 8. $a \approx 0{,}680$, $A \approx 13°20'$, $B \approx 76°40'$; 2. 23 *см*; 66°, 3. $d_1 \approx 125$ *см*, $d_2 \approx 31{,}7$ *см*. 4. $\alpha \approx 92°30'$, 5. 54°.

§ 17. 1. 1. $b \approx 15$, $c \approx 14$; 2. $a \approx 49{,}9$, $c \approx 110$; 3. $c \approx 361$, $A \approx 109\,40'$; 4. $c \approx 21{,}0$. $B \approx 36°50'$; 5. $A \approx 67°20'$. $B \approx 18°50'$. 3. 44°20′. 5 11 $дм^2$.

§ 18. 2. $AP = 1{,}5 + 8{,}0 \sin x$, где $\alpha = \sphericalangle A_1BA$ 3. $l \approx 140$ *м*, $v \approx 34$ *м/сек*, 4. 46°, 5. 6,4 *км*. 8. 159 *м*, 9. 680 *м*. 10. 67 *кг*. 11. 109°. 12. 205 *м*. 14. 4,8 *м* 16. 22,6 *га*. 17. 51°.

Часть II Основной курс тригонометрии

§ 4. 3. Сложение обобщенных дуг и углов выполняется так же, как и сложение направленных отрезков. Если нумерация точек A_1, $A_2, \ldots, A_{12}$ на окружности произведена в направлении, противоположном движению часовой стрелки, то получаем: а) $\cup A_1A_4 + \cup A_4A_5 + \cup A_5A_7 = \cup A_1A_7 = \pi$; б) $\cup A_5A_3 + \cup A_3A_5 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 0$.

в) $\measuredangle A_3OA_3 + \measuredangle A_3OA_2 + \measuredangle A_2OA_6 = \measuredangle A_2OA_6 = \frac{2}{3}\pi$; г) $\measuredangle A_4OA_2 +$ $+ \measuredangle A_3OA_6 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$; д) $\measuredangle A_2OA_1 + \measuredangle A_1OA_2 = -\frac{\pi}{6} +$ $+ \frac{\pi}{6} = 0$; е) $\cup A_7A_0 + \cup A_1A_2 + \cup A_1 = \cup A_7A_0 = \frac{\pi}{3}$ 4. а) $\frac{8}{3}\pi$ радиан; б) $\frac{8}{3}\pi l$ радиан или $2\pi l$ метров; в) $2\pi \frac{м}{сек}$.

§ 5. 7. Точка $M(z)$ а) перейдет в точку $M'(z')$, где $z' = z + a$ — круговая координата точки M'; б) перейдет в точку $M''(z'')$ где $z'' = z - a$ — круговая координата точки M''. 8. Отрезок (дуга) с началом в точке $M(-a)$ и концом в точке $M'(+a)$ 11. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$;

$\frac{3}{4}\pi + 2\pi k$, $\frac{5}{4}\pi + 2\pi k$ и $\frac{7}{4}\pi + 2\pi k$

§ 11. 2. $0 \leqslant z \leqslant \frac{7}{6}\pi$ и $\frac{11}{6}\pi \leqslant z \leqslant 2$

§ 12. 2. 1) $\frac{\pi}{3} < z < \frac{5}{3}\pi$; 2) $0 < z < \frac{\pi}{3}$ и $\frac{5}{3}\pi < z < 2\pi$;

3) $z_1 = \frac{\pi}{3}$ и $z_2 = \frac{5}{3}\pi$.

§ 13. 2. При $0 \leqslant z \leqslant \frac{\pi}{4}$, при $\frac{\pi}{2} < z \leqslant \frac{5}{4}\pi$ и при $\frac{3}{2}\pi < z \leqslant$ $\leqslant 2\pi$.

§ 15. 2. 1) Весь график данной функции можно получить параллельным смещением уже построенной части графика $\overline{OABCD}$ вдоль оси ot на отрезки, кратные 5. 2) Период функции $a = 5$ *сек*, т. е. $f(t + 5) \equiv f(t)$. 3) Скорость движения $v = 0$ в промежутках $5k < t <$ $< 1 + 5k$ и $3 + 5k < t < 4 + 5k$; $v = \frac{3}{2}\frac{см}{сек}$ в промежутках $1 + 5k <$ $< t < 3 + 5k$; $v = -3\frac{см}{сек}$ в промежутках $4 + 5t <$ $< 5(t + 1)$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ 4) $f(1) = f(6) = f(11) = \ldots = f(1 + 5k) = 0$; $f(2) =$ $= f(7) = f(12) = \ldots = f(2 + 5k) = 1.5$; $f(3) = f(8) = f(13) = \ldots =$ $= f(3 + 5k) = 3$; $f(4) = f(9) = f(14) = \ldots = f(4 + 5k) = 3$; $f(0) = f(5) =$ $= f(10) = \ldots = f(5k) = 0$; $f(245) = f(5 \cdot 49) = 0$; $f(584) = f(4 + 5 \cdot 116) =$ $= f(4) = 3$ (k — целое). 5) $g(t) = 0$ при $5k < t < 1 + 5k$; $g(t) =$ $= 1$ при $t = \frac{5}{3} + 5k$ *сек*; $g(t) = 2$ при $t = \frac{7}{3} + 5k$ *сек*; $g(t) = 3$ при $3 + 5k < t < 4 + 5k$ (k — целое)

§ 21. 2. $P = \frac{1}{2}(a^2 - 1)$ 3. $(a^2 - b^2)^2 = 16ab$. 4. $\frac{m + n}{m - n}$ или $\frac{m - n}{m + n}$. 7. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). 8. В точках с координатами $x = 2\pi k$, $y = 0$ (k — целое). 9. $z = 2\pi k$ (k — целое).

§ 24. 7. Уравнение траектории точки M $x+y=a$, где $x \leqslant a$ и $y \leqslant a$, следовательно, траекторией будет отрезок прямой, ограниченный точками $A(a; 0)$ и $B(0; a)$. На этом отрезке точка $M(x, y)$ совершает колебательное движение с периодом π, так как $x = \frac{1}{2} a(1+\cos 2t)$, $y = \frac{1}{2} a(1-\cos 2t)$. За время $t = 2\pi$ *сек* она проходит путь $S = 4AB = 4a\sqrt{2}$.

§ 28. 5. При $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (k — целое).

§ 30. 2б) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7} = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\left(-\cos\frac{2\pi}{7}\right) =$

$$= \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\left(-\cos\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\left(-\cos\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= -\frac{\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{8}.$$

§ 31. 14. 1) Использовать равенство $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ (см. упр. 11а), 2) Пусть, например, $A > 90°$, тогда $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B < 0$ и $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} C < 0$; остается показать, что $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C < 1$.

15. $\cos A + \cos B + \cos C = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} -$

$$-\cos(A+B) = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2} +$$

$+1 \leqslant 2\cos\frac{A+B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2} + 1$. Внесем обозначение:

$2\cos\frac{A+B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2} + 1 = m$, получим: $2\cos^2\frac{A+B}{2} -$

$-2\cos\frac{A+B}{2} + (m-1) = 0$, откуда $\cos\frac{A+B}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3-2m}}{2}$

действительное число и, следовательно, $3-2m \geqslant 0$, откуда $m \leqslant \frac{3}{2}$ и $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$. Доказательство левой части неравенства трудностей не вызывает.

§ 40. 1. д) $z = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n\right]$. 2. д) $-3 \leqslant$

$\leqslant x \leqslant 1$; е) $0 \leqslant x \leqslant 1$. 5. г) $z = \operatorname{ctg}^2(y-1)$, где $1 < y \leqslant 1 + \frac{\pi}{2}$

§ 42. 8. $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и

$xy < 1$; $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \pi + \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $xy > 1$.

9. а) Неверно; б) верно. 11. д) 75°; е) $\dfrac{\pi}{2} - 1$. 12. б) Решений нет; в) решений нет; г) $x = \sin\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}$; д) $x = \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{5}$; ж) $x = -\sin 0{,}5$.

§ 45. 2. В точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, где $x_1 = 3k$, $x_2 = 2 + 3k$ (k — целое). 4. Период функции равен π. Наибольшее значение равное $\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$, функция принимает при $x = \dfrac{\pi}{2}(2k+1) - \dfrac{\varphi}{2}$, а на именьшее значение, равное $-\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$, она принимает при $x = \pi k - \dfrac{\varphi}{2}$ (k — целое). 6. $x \approx 46°$. 7. $x \approx 51°$.

§ 46. 1. 1) $x_1 = \dfrac{1}{4}(5 + 2\pi k)$, $x_2 = \dfrac{1}{6}(-5 + 2\pi k)$; 3) $x = \dfrac{\pi^2 k}{1+\pi^2}$ (k — целое). 2. Графики данных функций имеют общие точки $(x; 0)$ где $x = \pi k$ (k — целое).

§ 47. 1. 3) $x = \dfrac{\pi}{3}(6k \pm 1)$. 2. $x_1 = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ $y_1 = -3\cos\left(1 + \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{4\pi k}{5}\right)$; $x_2 = 2 + \dfrac{\pi}{2} - 2\pi k$ $y_2 = -3\cos 5$ (k — целое)

§ 48. 1. 1) $x = \pm\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k$ (k — целое); 2) $x = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{5}{4} + \pi n$ (n — целое).

§ 49. 1) $x_1 = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k$ $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + \pi k$; $x_3 = \dfrac{2\pi}{3} + \pi k$ (k—целое) решения уравнения; $x_4 = \pi m$ (m — целое) — несобственное решение уравнения. 2) Уравнение имеет только несобственное решение $x = 2\pi n$ (n — целое). 3) $x_1 = 1 - \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = 1 - (-1)^n\dfrac{\pi}{6} - \pi n$ k и n — целое).

§ 50. 1. 1) $x = \pm\arccos 0{,}8 + 2\pi k$ (k — целое).

2) $x = \pm(-1)^n\dfrac{1}{2}\arcsin\sqrt{2(1-a^2)} + \dfrac{\pi}{2}n$, где $\dfrac{1}{2} \leqslant a^2 \leqslant 1$ (n—целое)

3) $x = 2\operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{2}) + 2\pi n$;

4) $x = \dfrac{1}{2}\left[(-1)^n \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\cos\varphi\right) + \pi n - \varphi - 1\right]$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$ и n — целое;

5) $x = \varphi \pm \arccos(1{,}135\cos\varphi) + 360°\,k$, где $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{14{,}3}{23\,0} \approx 31°\,50'$ и k — целое;

6) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}\right) + \pi n$ (n — целое).

5. $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{m}{\sqrt{2}}$, где $1 < m \leqslant \sqrt{2}$.

§ 51. 1. 1) $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2 = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$; 2) $x_1 = \frac{1}{2}\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $x_3 = \frac{2\pi}{3} + \pi k$; 3) если $m \neq -1$ и $\left|\frac{1-m}{1+m}\cos 2a\right| \leqslant 1$, то $x = \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-m}{1+m}\cos 2a\right) + \pi k$ (k — целое); при $m = -1$ и $a = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$ уравнение обращается в тождество, справедливое при всех $x \neq \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$; если же $m = -1$, но $a \neq \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$, то уравнение решений не имеет; 4) $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$ (k — целое); 5) $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$ (k — целое); 6) $x = \frac{1}{8}\pi k$ (k — целое); 8) если $b_1 - b_2 \neq \pi(2k+1)$, то $x = \frac{1}{a}\left[\pi k - \frac{b_1+b_2}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{m+1}{m-1}\operatorname{tg}\frac{b_1-b_2}{2}\right)\right]$. При $b_1 - b_2 = \pi(2k+1)$ и $m = -1$ уравнение обращается в тождество. Если же $b_1 - b_2 = \pi(2k+1)$, но $m \neq -1$, то уравнение решений не имеет; 9) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ (k — целое); 10) $x = 1{,}5 + \operatorname{arctg}(5 \operatorname{tg} 0{,}5) + \pi k$ (k — целое); 11) если $|2c - \cos(b_1 - b_2)| \leqslant 1$ и $a \neq 0$, то $x = \frac{1}{2a}\{2\pi k - b_1 - b_2 \pm \arccos[\cos(b_1 - b_2) - 2c]\}$; 12) $x_1 = \frac{1}{3}\pi k$ (k — целое), $x_2 = \pi k \pm \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§ 52. 1. 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ (k — целое); 2) $x_1 = \frac{\pi}{2}(4n+1)$, $x_2 = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, $x_3 = \frac{\pi}{6}(4n+1)$ (n — целое); 3) $x_1 = \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$; 4) $x_1 = \frac{\pi}{11}\left(k - \frac{1}{6}\right)$ $x_2 = \frac{\pi}{6}\left(k + \frac{2}{3}\right)$ где k — целое; 5) $x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}$ (n — целое); 6) $x_1 = \frac{\pi}{4}k$. $x_2 = \frac{\pi}{24}(2k+1)$ (k — целое);

7) $x = \frac{1}{2}\left[\pi n - 1 + (-1)^{n+1}\arcsin\left(\frac{1}{2} - \sin 3\right)\right]$ (n — целое),

8) при $a \neq \pm 1$ $x_1 = \frac{\pi}{a-1}\left(k + \frac{7}{24}\right)$; при $a \neq -1$ $x_2 = \frac{\pi}{a+1}\left(k +$

$+\frac{13}{24}\Big)$. При $a=1$, $x=\frac{\pi}{2}\Big(k+\frac{13}{24}\Big)$; при $a=-1$ $x=-\frac{\pi}{2}\Big(k+\frac{7}{24}\Big)$.

9) $x=\frac{\pi}{a}\Big(k\pm\frac{1}{6}\Big)$, где $a\neq 0$ и k — целое. При $a=0$ уравнение не имеет решений; 10) $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\Big(-\frac{2}{3}\Big)$ (k — целое); 11) $x_1=\frac{\pi}{3}\Big(\frac{1}{6}-2k\Big)$ $x_2=-\frac{\pi}{6}+\pi(2k+1)$ (k — целое); 12) $x=\frac{1}{2}\Big[\pi n+\frac{\pi}{18}+(-1)^n\arcsin 0{,}1\Big]$ (n — целое).

2. На 12°. **3.** Указание. Внеся обозначение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$, получим уравнение: $\pi m(1-u^2)u=2$. При $m=\frac{20}{\pi}$ получаем: $u^3-u=-0{,}1$. Используя графический метод и таблицу кубов, находим $u_1\approx 0{,}95$, откуда $x_1\approx 87°$; $u_2\approx 0{,}1$, откуда $x_2\approx 11{,}5°$.

§ 53. 1) $x=1\pm\sqrt{1+\frac{\pi}{3}+\pi n}$, где $n=0, 1, 2, \ldots$;

2) $x=\frac{4k}{4k-1}$ (k — целое); 3) $x=2\pm\sqrt{14+\pi n}$, где целое $n\geqslant -4$;

4) $x=\operatorname{arctg}u+\pi k$, где $u=\frac{1}{2}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2-1}$, k—целое, а n—целое, отличное от 0; ± 1 и 2; 5) $x_1=2m\pm\frac{1}{\pi}\arccos 0{,}1$, $x_2=2m\pm\frac{1}{3}$, $x_3=2m\pm\frac{1}{\pi}\arccos(-0{,}7)$ (m — целое); 6) $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=2\pi k$ (k — целое); 7) $x_1=\Big(\frac{-\pi}{12}+\pi k\Big)^2$, где k—натуральное, $x_2=\Big(-\frac{7\pi}{12}+\pi k\Big)^2$.

§ 54. 1. а) $x_1=0$, $x_2\approx 0{,}97$; б) $x=0$. 2. Уравнение имеет 7 корней. 3. В промежутке $[0; 10\pi]$ уравнение имеет 9 корней; наименьший из этих корней $x_1\approx 4{,}92$.

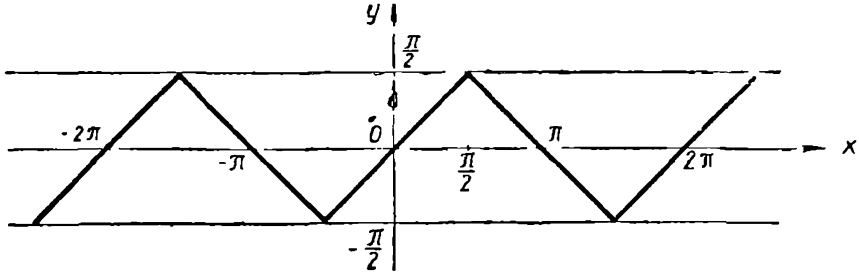
§ 55. 1. 1) $x_1=x_2=1$; $x_3=-2$; 2) $x=\frac{3}{7}$; 3) $x=\sin\frac{1}{2}\approx$ $\approx 0{,}4794$; 4) $x=2$; 5) $x=1$; 6) решений нет; 7) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ (k — целое). 2. Кривые имеют одну общую точку $(x; y)$ с координатами $x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\approx 1{,}56$ и $y=\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{6}\approx 1{,}02$. 3. Указание. Положив $y=0$, получим уравнение: $x=\arcsin(\sin x)$, которому удовлетворяют значения $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ следовательно, график данной функции имеет с осью Ox общий отрезок $\Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big]$.

4. Указание. 1) По определению арксинуса функцию можно заменить системой двух соотношений: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, & (1) \\ \sin y = \sin x. & (2) \end{cases}$

Из (2) имеем: $y = x + 2\pi k$, (2′)
а также $y = -x + \pi(2k + 1)$ (2″).
Давая параметру k целые значения 0, ± 1, ± 2, ... получим две совокупности уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} y = x, \\ y = x + 2\pi, \\ y = x - 2\pi, \\ y = x + 4\pi, \\ y = x - 4\pi, \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (2') \qquad \left.\begin{array}{l} y = -x + \pi, \\ y = -x - \pi, \\ y = -x + 3\pi, \\ y = -x - 3\pi, \\ y = -x + 5\pi, \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (2'')$$

Этим уравнениям соответствуют два семейства параллельных прямых. Приняв во внимание условие (1), замечаем, что графику данной функции будут принадлежать лишь отрезки этих прямых, расположенные в полосе $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$ и образующие бесконечную ломаную (см. рис. 52).



Аналогичные рассуждения приводят к построению графиков функций 2), 3), 4) и 5).

§ 56. 1) $x = -180^\circ n + 38^\circ 30' - (-1)^n \arcsin\left(\frac{0{,}245}{\sin 38^\circ 30'}\right) \approx$ $\approx -180^\circ n + 38^\circ 30' - (-1)^n \cdot 23^\circ 10'$, $y = 180^\circ n + 38^\circ 30' +$ $+ (-1)^n \cdot \arcsin\left(\frac{0{,}245}{\sin 38^\circ 30'}\right) \approx 180^\circ n + 38^\circ 30' + (-1)^n \cdot 23^\circ 10'$ (n — целое); 2) $x = \pi k + \frac{\pi}{8} \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\sqrt{0{,}32}\right)$, $y = -\pi k + \frac{\pi}{8} \mp$ $\mp \frac{1}{2} \arccos\left(-\sqrt{0{,}32}\right)$ (k — целое); 3) если $a \neq b$ и $c \neq \pi k$, то $x = \pi n + \frac{c}{2} + \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+b}{a-b} \operatorname{ctg} \frac{c}{2}\right)$, $y = -\pi n + \frac{c}{2} -$ $- \operatorname{arcctg}\left(\frac{a+b}{a-b} \operatorname{ctg} \frac{c}{2}\right)$

При $a=b$ и $c\neq\pi(2k+1)$ $x=\frac{c}{2}+\pi k$, $y=\frac{c}{2}-\pi k$.

При $a=b$ и $c=\pi(2k+1)$ система выполняется при всех значениях x и y, удовлетворяющих условию $y=\pi(2k+1)-x$;

4) $x=180^\circ\cdot k+\frac{1}{2}\left[5^\circ\pm\arccos\left(\frac{2\cos 5^\circ}{23}\right)\right]\approx 180^\circ\cdot k+\frac{1}{2}(5^\circ\pm$ $\pm 85^\circ)$, $y=180^\circ\cdot k-\frac{1}{2}\left[5^\circ\mp\arccos\left(\frac{2\cos 5^\circ}{23}\right)\right]\approx 180^\circ\cdot k-\frac{1}{2}(5^\circ\mp$ $\mp 85^\circ)$;

5) $\begin{cases} x_1=\pi\left(n+k+\frac{5}{12}\right) \\ y_1=\pi\left(n-k+\frac{1}{4}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\pi\left(n+k+\frac{1}{4}\right) \\ y_2=\pi\left(n-k+\frac{5}{12}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} x_3=\pi\left(n+k-\frac{5}{12}\right) \\ y_3=\pi\left(n-k-\frac{1}{4}\right) \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=\pi\left(n+k-\frac{1}{4}\right) \\ y_4=\pi\left(n-k-\frac{5}{12}\right) \end{cases}$

(n и k — целые);

6) $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\pi(k+n) \\ y=\frac{\pi}{4}+\pi(k-n), \end{cases}$ где k и n — целые;

7) $\begin{cases} x=2\pi k-\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(-\sqrt{0{,}02}\right) \\ y=2\pi\,(n-k)-\frac{\pi}{4}\mp\arccos\left(-\sqrt{0{,}02}\right) \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1=\frac{\pi}{6}+\pi(k-n) \\ y_1=\frac{\pi}{3}+\pi(k+n) \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-\frac{5\pi}{6}+\pi(k-n) \\ y_2=\frac{\pi}{3}+\pi(k+n) \end{cases}$

(k и n—целые).

Часть III. **Дополнительный курс тригонометрии**

§ 1. 1. 4776 *км*. 2. $89^\circ 57'$.

§ 2. 1. $56{,}19$ *м*^{2}.

§ 3. 2. $30^\circ < c < 90^\circ$.

§ 4. 4. $12^\circ < C < 180^\circ$. 5. 124,7 *м*^{2}.

§ 7. 4. 8600 *км*. 7. $A=42^\circ 37'$, $B=37^\circ 42'$, $C=138^\circ 48'$.
8. Угол между боковыми гранями 153°.
9. В основании десятиугольник.

§ 8. 1. $c = 112° 15'$, $A = 117° 52'$, $B = 87° 19'$.
3. Плоский угол $37° 58'$, двугранные углы—$83° 43'$ и $54° 16'$.
§ 9. 1. $a = 129° 23'$ $b = 50° 18'$. $C = 86° 53'$.
2. $C = 54° 26'$.
§ 10. 1. $a = 30° 05'$, $b = 27° 32'$, $c = 32° 16'$.
2. $\alpha = 60° 32'$, $\beta = 117° 28'$, $\gamma = 78° 42'$.
3. $\alpha = 129°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 113°$.
§ 11. 1. $c = 99° 10'$, $A = 123° 12'$, $B = 76° 19'$.
2. $a = 149° 11'$. $b = 156° 56'$. $B = 140° 17'$.
3. 11 800 *км*.
5. Корабль пересечет экватор в пункте, расположенном под $5° 32'$ западной долготы при курсе $S\ 17° 35'\ W$; расстояние от Лиссабона до этого пункта равно 4550 *км*.
§ 15. 4. 1) $z = x + 0 \cdot i$;
2) $z = 0 + yi$;
3) $z = x + xi$;
4) $z = 1 + yi$.
5. 1) $x < 0$ $y > 0$;
2) $y < 0$;
3) $|x| = |y|$;
4) $x^2 + y^2 = 4$.
6. 1) Действительная ось Ox;
2) мнимая ось Oy;
3) внутренняя область первого координатного угла;
4) внутренняя область четвертого координатного угла;
5) биссектриса I и III координатных углов;
6) биссектриса II и IV координатных углов;
7) прямая, проходящая через точки (0; 0) и (1; 3);
8) прямая, параллельная оси Oy и отсекающая на оси Ox отрезок $OA = 4$;
9) прямая, параллельная оси Ox и отсекающая на оси Oy отрезок $OB = -2$;

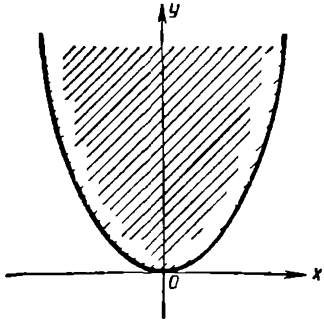


Рис. 53.

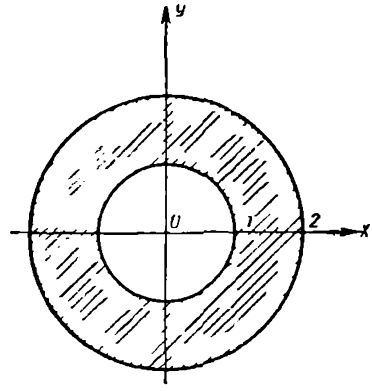


Рис. 54.

10) парабола (рис. 53);
11) область, ограниченная параболой снизу (на рисунке 50 эта область заштрихована);
12) окружность с центром O и радиусом $r = 1$;
13) окружность с центром O и радиусом $r = 2$;
14) область, ограниченная концентрическими окружностями с центром O и радиусами $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ (на рисунке 54 эта область заштрихована)

7. $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = -1 - i$ и $z_D = 1 - i$;
1) $z_A + z_D = 2$; 2) $z_A + z_B = 2i$; 3) $z_C + z_D = -2i$;
4) $z_A + z_C = 0$.

8. 1) $z_A = 1 + 0 \cdot i$; $z_B = 5 + 0 \cdot i$ $z_C = 3 + 2\sqrt{3} \cdot i$;
2) $|z_A| = 1$; $|z_B| = 5$; $|z_C| = \sqrt{21}$;
3) $z_A + z_C = 4 + 2\sqrt{3}\,i$; $z_B + z_C = 8 + 2\sqrt{3}\,i$;
4) $z_A + z_B + z_C = 9 + 2\sqrt{3}\,i$.

§ 16. 4. $z = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{7} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7} + 2\pi k\right)\right]$ где r — любое действительное неотрицательное число, а k — целое

5. 1) Окружность с центром O и радиусом $r = 1$;
2) луч OM, образующий с осью Ox угол φ $\frac{\pi}{9}$;
3) внутренняя область II координатного угла;
4) внешняя область круга с центром O и радиусом $r = 1$;
5) часть внутренней области I координатного угла, ограниченная дугами концентрических окружностей с центром O и радиусами $r_1 = 1$, $r_2 = 3$ (на рисунке 55 эта область заштрихована).

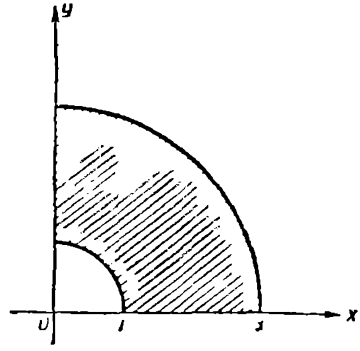


Рис. 55.

§ 17. 7. $x = \cos 1 + i \sin 1$;
$y = \frac{1}{6}(\cos 6 - i \sin 6)$.

9. $z_1 = \cos 1 + i \sin 1$; $z_2 = \cos 2 + i \sin 2$, ..., $z_{19} = \cos 19 + i \sin 19$.

§ 18. 2. Указание. Основания степеней представить в тригонометрическом виде. 3 См указание к предыдущему упражнению

4. $\sqrt{i} = \pm\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. $\sqrt[3]{2 - 2i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi k - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi k - \frac{\pi}{12}\right)\right]$ где $k = 0, 1, 2$;

$\sqrt[4]{-4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)$ где $k = 0, 1, 2, 3$;

$\sqrt[5]{32} = 2\left(\cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}\right)$ где $k = 0, 1, 2, 3, 4$;

5 $\sqrt{\frac{1 - i}{\sqrt{3} + i}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left[\cos\left(\pi k - \frac{5\pi}{24}\right) + i\sin\left(\pi k - \frac{5\pi}{24}\right)\right]$
где $k = 0; 1$.

6. Указание. $1+\cos x+i\sin x=2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)$.

§ 20. 5. а) $x=\frac{\pi}{2}n$ (n — целое); б) $x_1=\frac{\pi}{2}n$;

$x_2=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$ (n — целое); с) $x_1=\frac{\pi}{2}n$; $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n$ (n — целое).

§ 22. 3. Указание. Можно воспользоваться формулой (3x) на стр. 571. Данная сумма равна $-\frac{1}{2}$.

§ 24. 1. Высота конуса $h\approx 14$ *см* либо 8,9 *см*; в первом случае надо вырезать сектор с углом $\alpha\approx 257°$, во втором — $\alpha\approx 268°$. 2. $h_1\approx 7{,}89$ *дм*; $h_2\approx 5{,}36$ *дм*. 3. Высота искомого цилиндра $x\approx$ $\approx 0{,}65$ *м* либо 1,39 *м*.

§ 26. 1. 1) e; 2) $\sqrt[3]{e}$; 3) e; 4) e^{-5}; 5) $\sqrt[3]{e}$. 2. 1,95 *г*. 3. 0,098 %. 4. 30,0 *мм*.

§ 27. 1. а) $1{,}469+2{,}288i$; б) $0{,}03843-0{,}1297i$; с) $16{,}64-$ $-25{,}98i$; д) -1; е) $-2{,}718i$.

§ 28. 2. $e^i\approx 0{,}5403+0{,}8415i$; $e^{\pi i}=1$; $e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i$; $e^{1{,}3i}\approx 0{,}2675+0{,}9636i$.

§ 29. 1. $\cos\pi i\approx 11{,}58$; $\sin\pi i\approx 11{,}53i$; $\cos(1-i)\approx 0{,}8266+$ $+1{,}0098i$; $\sin(1-i)\approx 1{,}277-0{,}6486i$; $\cos(2+3i)\approx$ $\approx -0{,}4186-9{,}102i$; $\sin(2+3i)\approx 9{,}148-4{,}156i$.

2. Если $z=xi$, то $z_1\approx 0{,}6931i$, $z_2\approx -0{,}6931i$.

§ 30. 2. $\ln(-1)=\pi(2k+1)i$; $\ln i=\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}\right)i$;

$\ln\left(1-i\sqrt{3}\right)\approx 0{,}6931+\left(2\pi k-\frac{\pi}{3}\right)i$ ($k=0,\ \pm 1,$

$\pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$).

3. $\ln z_1=\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}\right)i$;

$\ln z_2\approx -2{,}302+(2\pi k+1)i$;

$\ln z_3\approx 1{,}758+(2\pi k+1{,}34)i$ (k — целое).

Иван Козьмич Андронов, Александр Кузьмич Окунев

КУРС ТРИГОНОМЕТРИИ,
РАЗВИВАЕМЫЙ НА ОСНОВЕ РЕАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Редактор *Л. А. Сидорова*
Художник *В. Б. Александров*
Художественный редактор *А. И. Овчинников*
Технические редакторы *Т. В. Павлова* и *Н. Ф. Макарова*
Корректор *И. И. Котельникова*

Сдано в набор 22/XII 1965 г. Подписано к печати 29/VIII 1966 г. 84×108¹/₃₂
Печ. л. 20,25. Уч.-изд. л. 28,39. Тираж 50 тыс. экз. (Тем. пл. 1966 г. № 112). А13941

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Ярославский полиграфкомбинат Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Ярославль, ул. Свободы, 97. Заказ № 58.

Цена без переплета 77 коп., переплет 18 коп.